Teoria dos Grafos - BCC 204
Fluxo em Grafos

Haroldo Gambini Santos

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

19 de abril de 2011

Notas

Valoração de Grafos

Exemplos

- valores estáticos:
  - a distância da rodovia que liga a cidade a e a cidade b é de 70 kilômetros
- valores dinâmicos:
  - na rodovia que liga a a b passam 2 carros por minuto, em média

Fluxo em Grafos

- considera-se valores dinâmicos, por exemplo, quantos veículos passam por minuto em uma rodovia

Notas

Fluxo em Grafos

Fluxo em Grafos

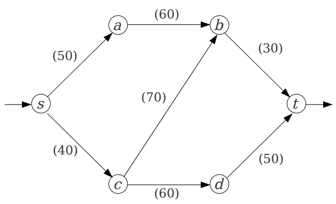
- considera-se algum **recurso**
- esse recurso *se move* pelo grafo através dos **arcos**

Fluxos: exemplos práticos

- líquidos em canos
- dados em redes de computadores
- veículos na malha viária
- peças em uma linha de montagem
- ...

Notas

Anatomia de um Problema de Fluxo



- s : *source* ou fonte, emissor do fluxo
- t : *terminal* ou sumidouro, quem consome o fluxo
- (n) : capacidade de cada arco

Notas

Ajustes

- Como representar arcos paralelos ?
- Como considerar mais de uma fonte / sumidouro ?

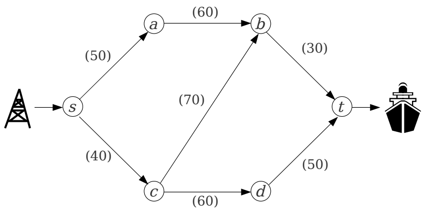
Notas

Problemas Comuns

- qual a **maior quantidade de fluxo** que pode passar por um grafo ?
- qual o **menor custo** associado com a passagem de um dado custo ?
- **que arcos teríamos que modificar** se quiséssemos passar mais fluxo pelo grafo ?

Notas

Exemplo



Qual o **máximo** de petróleo que pode ir do poço até o navio ?

Notas

Corte

Definição

Em um grafo $G = (V, A)$, um corte é uma divisão dos vértices em dois conjuntos disjuntos :

- $S \subseteq V$ e
- $V \setminus S$

Cortes em Redes

Em uma rede de fluxo, definimos um **corte** $s - t$ como um corte rm que a fonte s e o sumidouro t encontram-se em conjuntos diferentes.

Notas

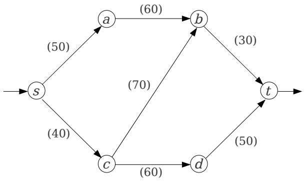
Corte

Capacidade do Corte

Em um grafo $G = (V, A)$, a capacidade de um corte $s - t$ $K = (S, V \setminus S)$ é a soma das capacidades dos arcos que **saem de** S e **chegam em** $V \setminus S$.

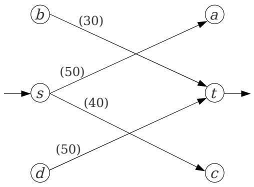
Notas

Cortes $s - t$



Corte $(\{b, s, d\}, \{a, t, c\})$

Capacidade: 170



Qual o corte de
menor capacidade ?

Notas

O Teorema do Fluxo Máximo/Corte Mínimo

Teorema
O fluxo máximo de uma fonte s até um terminal t em uma grafo com capacidade nos arcos é igual a capacidade do corte $s - t$ com menor capacidade.

Notas

Exercícios

1. Modele o problema do casamento máximo em grafos bipartidos como um problema de fluxo máximo.
2. Como modelar, além da capacidade em arcos, a capacidade em vértices ?

Notas

Fluxo Máximo

- Entrada:
  - grafo $G = (V, E)$
  - capacidades $c_{(u,v)} \in \mathbb{R}^+ \;\; \forall (u, v) \in E$
  - nó produtor s e nó consumidor t
- Variáveis:
  - $f_{(u,v)} \in \mathbb{R}^+ \;\; \forall (u, v) \in E$

Notas

O Problema do Fluxo Máximo

Maximize:

$$\sum_{(u,v)\in E} f_{(u,v)}$$

Sujeito a:

$$f_{(u,v)} \leq c_{(u,v)} \;\; \forall (u, v) \in E$$

$$\sum_{u\in\delta^-(v)} f_{(u,v)} = \sum_{u\in\delta^+(v)} f_{(u,v)} \;\; \forall v \in V \setminus \{s, t\}$$

Notas

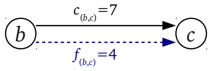
Computando o Fluxo Máximo

- Uma idéia importante para computar o fluxo máximo é encontrar **Caminhos** entre e e t para o envio de fluxo
- O algoritmo de Ford & Fulkerson trabalha com essa idéia, mas considerando um **Grafo de Capacidades Residuais**

Notas

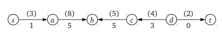
Capacidades Residuais

Considere um arco com capacidade 7 e com fluxo atualmente em 4.



Temos então uma *capacidade residual* de $7-4=3$ para qualquer fluxo adicional de b para c
De outro modo:

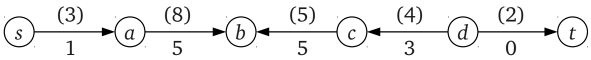
- no máximo 4 unidades de fluxo podem ser enviadas de volta de c para b
- nesse sentido, 4 é a capacidade residual do arco reverso $c \rightarrow b$



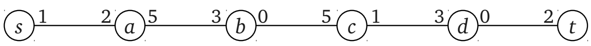
Notas

Exemplo

Considere a seguinte seqüência de arcos com capacidades e fluxos associados:



Dessa forma, obtemos o grafo com capacidades residuais:



Baseado no grafo acima, quanto de fluxo podemos passar **a mais** de s para t ?

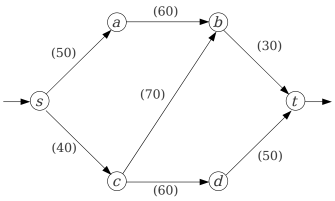
Notas

Agoritmo de Ford & Fulkerson

função `ffulkerson`(V, E, c, s, t)
Saída: fluxo máximo f de s até t
$f_{(u,v)} = 0 \;\; \forall (u,v) \in E$;
inicialize as capacidades residuais $r_{(u,v)} \;\; \forall (u,v) \in E$;
enquanto existir um caminho p **de** s **até** t **tal que** $c^f_{(u,v)} > 0 \;\; \forall (u,v) \in p$ **faça**
  calcule $\underline{r} = \min_{(u,v)\in p}\{c^f_{(u,v)}\}$;
  para todo $(u,v) \in p$ **faça**
    $f_{(u,v)} \leftarrow f_{(u,v)} + \underline{r}$;
    $f_{(v,u)} \leftarrow f_{(v,u)} - \underline{r}$;
  fim
fim

Notas

Exemplo



Construção do grafo com capacidades residuais

Notas

Notas

Notas