Teoria dos Grafos - BCC 204

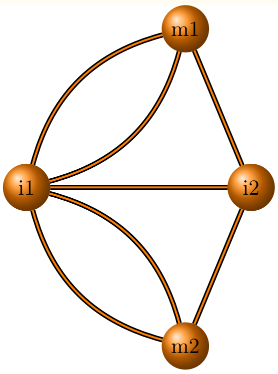
Haroldo Gambini Santos

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

20 de novembro de 2011

Notas

Novamente: Pontes de Königsberg



Notas

Novamente: Pontes de Königsberg

Euler:
Existe percurso fechado *somente se* não houverem graus ímpares no grafo.

Notas

p-grafo

Grafo onde existem p arestas entre dois vértices quaisquer.

Notas

Um Lema

Lema : todo p-grafo $G = (V, E)$ conexo no qual se tenha $d(v) \geq 2$ para todo $v \in V$ contém um ciclo.

Demonstração : se $p > 1$, G possui arestas múltiplas e o teorema fica provado; senão, basta iniciar um percurso a partir de um vértice qualquer: todo vértice atingido ou é um novo vértice ou é um vértice já visitado e desse modo obtém-se um ciclo.

Notas

Grafos Eulerianos

Percurso Euleriano

Percurso fechado que utilize **todas** as arestas de um grafo, **uma vez e uma só**.

Grafo Euleriano

Grafo que possua esse percurso.

Notas

Euler-Hierholzer

Lema

Um grafo $G = (V, E)$ não orientado e conexo possui um ciclo euleriano se e somente se todos os seus vértices tiverem grau par.

Demonstração

Seja $G = (V, E)$ euleriano e seja um ciclo euleriano em G. Ao percorremos esse ciclo a partir de um vértice dado, cada vez que atravessarmos um vértice utilizaremos duas arestas, uma na chegada e outra na saída. Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.
Por indução, sobre o número de arestas: o teorema é válido, por vacuidade, quando $m = 0$.

Notas

Algoritmo de Fleury

Passos

1. inicie em um vértice qualquer
2. a cada passo remova do grafo uma aresta que não seja uma ponte e aumente o ciclo construído

Complexidade

$O(|E|)$ remoções de arestas e $O(|E|)$ para detecção de pontes (algoritmo ingênuo), no final: $O(|E|^2)$

Notas

Algoritmo de Hierholzer

Passos

1. selecione um vértice inicial v e caminhe até chegar novamente a v
2. note que com vértices de grau par não se ficará preso em um outro vértice intermediário
3. tem-se um percurso fechado formado, que *pode não incluir todas as arestas do grafo*
4. enquanto houver um vértice v que pertence ao percurso corrente mas que têm arestas adjacentes não exploradas ainda inicie outro percurso em v usando arestas ainda não exploradas até retornar novamente a v

Complexidade

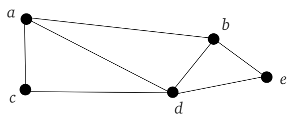
$O(|E|)$ Com as estruturas de dados apropriadas.

Notas

Grafos Unicursais

Definição

Um grafo G é dito **unicursal** se ele possuir um percurso **aberto** de Euler, ou seja, se é possível percorrer todas as arestas de G apenas 1 vez sem retornar ao vértice inicial.



Percurso aberto de Euler: a, c, d, a, b, d, e, b

Propriedade

Adicionando **1 aresta** a um Grafo Unicursal, conectando o vértice inicial e final do caminho, obtemos um Grafo Euleriano.

Notas

Grafos Unicursais

Um Grafo é **Unicursal** *se e somente se* ele possuir exatamente 2 vértices de grau ímpar.

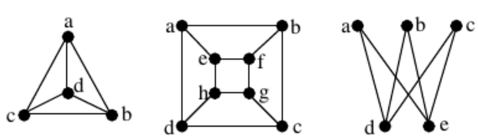
Teorema

Em um grafo conexo G com exatamente $2k$ vértices de grau ímpar, existem k subgrafos disjuntos de arestas, todos eles unicursais, de maneira que juntos eles contêm todas as arestas de G.

Notas

Exercício

Quais dos grafos abaixos são Unicursais ? Encontre o percurso Euleriano quando posssível.



A B C

Notas

O Problema do Carteiro Chinês

Introdução

Considere serviços como coleta de lixo ou correios. Os cruzamentos são vértices do grafo e as arestas suas ligações. Cada ligação tem um custo de percorrimento associado que representa sua distância (ou tempo).

Deve-se percorrer **todas as ligações** e retornar ao **ponto inicial** com **custo mínimo** .

Aplicações

- coleta de lixo
- vendas em domicílio
- entrega do correio
- ...

Notas

Carteiro Chinês

Resolução

A solução deverá consistir em um *itinerário único*, de modo que caso o grafo não seja Euleriano haverão ligações que serão percorridas *mais de uma vez*.
O processo de solução, no caso de trabalharmos com um grafo não euleriano, **adiciona arestas** até que se obtenha um grafo euleriano.

Notas

Carteiro Chinês

Para um grafo não orientado e conexo, pode-se usar a seguinte abordagem:

1. verificar se G é Euleriano; caso positivo vá para 6
2. determinar I, o conjunto de vértices com grau ímpar em G
3. determinar as distâncias d_{ij} para cada $(i, j) \in I$
4. seja $D(I)$ a matriz de distâncias obtida, faça $d_{ii} = \infty$ e execute o algoritmo húngaro
5. para cada alocação (k, l) feira pelo alg. húngaro adicione a aresta (k, l) de valor d_{kl}
6. aplicar o algoritmo de busca de percursos eulerianos

Notas

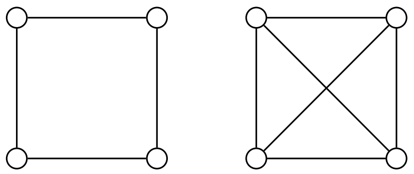
Grafo Hamiltoniano

Definição

Um grafo Hamiltoniano é um grafo que possui um percurso fechado que inclui todos os vértices, sem repetições.

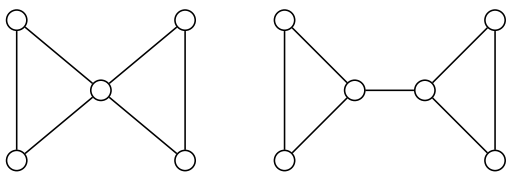
Notas

Euleriano? Hamiltoniano? (1/2)



Notas

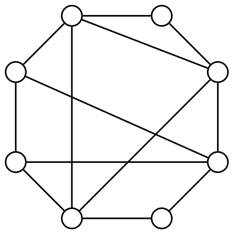
Euleriano? Hamiltoniano? (2/2)



Notas

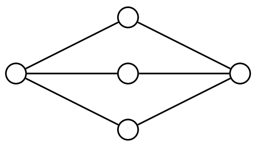
Ciclos

Todo grafo hamiltoniano com n-vértices é constituído por um C_n e mais algumas arestas.



Notas

Todo Grafo 2-conexo é Hamiltoniano ?



Notas

Grafos Hamiltonianos

Ao contrário dos grafos Eulerianos, não se conhece uma condição necessária e suficiente trivial para a existência de um percurso hamiltoniano em um grafo.

Karp, 1972

Encontrar um Ciclo/Circuito Hamiltoniano em um grafo é um problema **NP-Completo**.

Notas

Ciclos Hamiltonianos

Algumas condições suficientes para sua existência

Dirac um grafo no qual $d(v) \geq n/2$ para todo $v \in V$ é hamiltoniano;

Ore um grafo no qual se tenha $d(v) + d(w) \geq n$ para todo par (v, w) de vértices não adjacentes é hamiltoniano;

Notas

O Fecho Hamiltoniano - $\Phi(G)$

Construção

O Fecho Hamiltoniano de um grafo G $\Phi(G)$ é o grafo obtido a partir de G do seguinte modo: sucessivamente são adicionadas arestas entre pares (u, v) não adjacentes até que em algum momento temos $d(u) + d(v) \geq n$.

Teorema

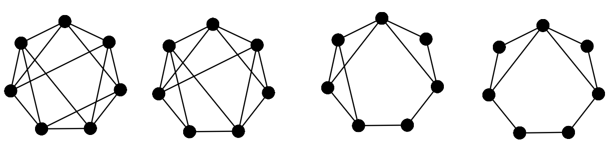
Bondy & Chvátal : Se $\Phi(G) = K_n$ então G será hamiltoniano.

outro resultado: um grafo será hamiltoniano <u>se e somente se</u> $\Phi(G)$ é hamiltoniano.

Tente usar esse resultado para o C_5

Notas

Ciclos Hamiltonianos: Uso dos Teoremas

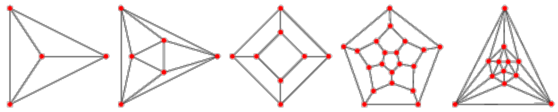


Indique quais satisfazem Dirac, Ore e Bondy & Chvátal

Notas

Exercícios

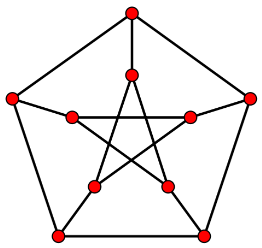
1. Mostre que um grafo Euleriano não possui uma ponte (aresta que se removida desconecta o grafo).
2. Mostre que os grafos correspondentes aos 5 sólidos platônicos são hamiltonianos. Quais são eulerianos ?



Notas

Exercício

Mostre que o grafo de Petersen não é Hamiltoniano.



Notas

Notas