# Teoria dos Grafos - BCC204
# Casamento em Grafos

Haroldo Gambini Santos

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

16 de maio de 2011



Notas

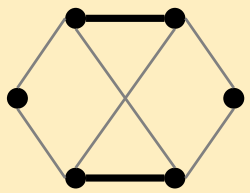


## Casamento em Grafos

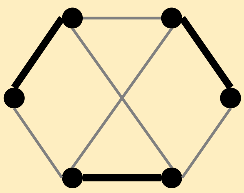
**Descrição**

Em grafos, um **Casamento** (***Matching***) ou acoplamento é um Conjunto Independente de Arestas, ou seja, um conjunto de arestas sem vértices em comum.

**Um Casamento *Maximal***



**Um Casamento *Máximo* e *Perfeito***





Notas



## Casamento em Grafos

**Casamento Perfeito**

Diz-se que um vértice que faz parte do casamento é um vértice ***saturado***. Um casamento perfeito ocorre quando todos os vértices são saturados.



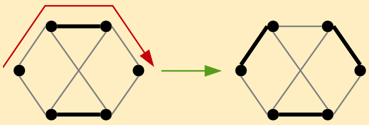
Notas

## Cadeia $M$-*aumentante*

**Definição**

Considere um grafo $G$ e um casamento $M$. Uma cadeia $M$-*aumentante* é um percurso que liga dois vértices não saturados por $M$ que alternam arestas de $M$ e arestas de $G \setminus M$.

**Exemplo**



**Melhoramento**

Sempre que encontrarmos uma cadeia $M$-*aumentante* poderemos aumentar o casamento.

De fato, O modo acima é o único modo de melhorar um acoplamento.

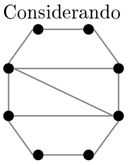


Notas



## Exercício

1. Considerando o grafo abaixo, crie diferentes casamentos:



   1. 1 casamento maximal
   2. 2 casamentos máximos e perfeitos

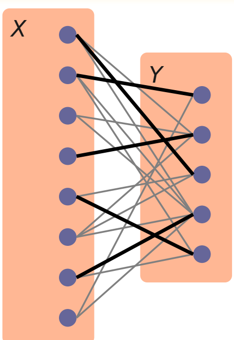
2. Crie um grafo no qual seja possível encontrar um casamento máximo mas que não seja perfeito, desenhando também o casamento em questão.



Notas



## Casamento em Grafos Bipartidos



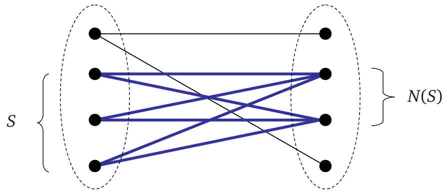

**Definição**

Seja $G$ um grafo bipartido com uma partição $(X, Y)$ dos vértices. Dizemos que temos um casamento de $X$ em $Y$ quando um acoplamento de $G$ satura $Y$ (não necessariamente $X$).



Notas

## Casamento em Grafos Bipartidos




**Teorema (Hall,1935)**

Seja $G$ um grafo bipartido com uma partição de vértices $\{X, Y\}$. Então $G$ tem um acoplamento de que satura $X$ se e somente se $|N(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq X$.



Notas

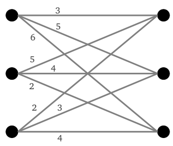


## O Problema da Alocação Linear

Exemplo:

*Em uma fábrica temos 3 operários e 3 máquinas. Pelo conhecimento e pelas características de cada operário o custo por hora é diferente, segundo a atribuição das máquinas a cada operário. Qual a alocação de menor custo ?*

| Operário\Máquina | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 6 |
| 2 | 5 | 4 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 4 |



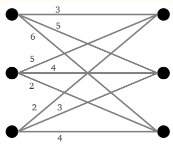


Notas



## Exemplo

| Operário\Máquina | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 6 |
| 2 | 5 | 4 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 4 |



Ao atribuir uma máquina para cada operário estamos tomando 3 elementos da matriz tais que:

- cada elemento está em uma linha diferentes
- cada elemento está em uma coluna diferentes
- cada linha e coluna contém exatamente 1 elemento

Uma solução[1]: $x_{1,1}, x_{2,2}, x_{3,3}$, com custo 11. Solução ótima ?

[1] $x_{i,j}$ indica a seleção do elemento da linha $i$ e coluna $j$.



Notas

## O Método Húngaro

Primeiramente, observe que a solução ótima permanece a mesma se somarmos ou subtrairmos um mesmo valor de todos os elementos de uma linha (ou coluna). Somente um dos elementos afetados estará na solução ótima.

$$\begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{c} \text{-3} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \rightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0^* & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2^* \\ 2 & 3^* & 4 \end{array}\right|$$



Notas



## O Método Húngaro

Completando para as linhas e em um passo seguinte ajustando as colunas:

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{c} -3 \\ -2 \\ -2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} \phantom{0} & \text{-1} & \phantom{0} \end{array} \end{array} \rightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0^* & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0^* \\ 0 & 0^* & 1 \end{array}\right|$$

A solução ótima fica evidente.



Notas



## O Método Húngaro

Outro caso:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{c} -2 \\ -3 \\ -2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} \phantom{0} & \phantom{0} & \text{-2} \end{array} \end{array} \rightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Solução infactível, mais zeros necessários. Continuando...



Notas

## Factibilidade

$$
\begin{array}{ccc}
0 & 4 & 3 \\
0 & 3 & 5 \\
0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Sempre que se conseguir riscar todos os zeros da matriz com menos de 3 riscos a solução é infactível.



Notas



## Factibilidade (cont. i)

$$
\begin{array}{ccc}
0 & 4 & 3 \\
0 & 3 & 5 \\
0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Operação de Factibilização:

Pega-se o valor do menor elemento **não coberto** e diminui-se em todos os elementos não cobertos. Para elementos cobertos em posições onde passam duas linhas adiciona-se esse valor.



Notas



## Factibilidade (ex.:)

$$
\begin{vmatrix}
0 & \mathit{4} & \mathit{3} \\
0 & \mathit{3} & \mathit{5} \\
0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
-\mathit{3}
\qquad\qquad
\begin{vmatrix}
0* & 1 & 0 \\
0 & 0* & 2 \\
3 & 0 & 0*
\end{vmatrix}
$$

Matriz Original:

$$
\begin{vmatrix}
2* & 6 & 7 \\
3 & 6* & 10 \\
2 & 2 & 4*
\end{vmatrix}
$$

Solução com custo 12.



Notas

## Método Húngaro - Sumário

- Passo 1 identifique o mín. de cada linha e subtraia
- Passo 2 identifique o mín. de cada coluna e subtraia
  - Passo 2a identifique o mínimo de riscos que cubra todos os zeros
  - Passo 2b sem solução viável (nr. riscos$<n$): pegue o o valor mín. das entradas não riscadas e subtraia dessas entradas; para entradas cobertas por dois riscos adicione esse valor
  - Passo 2c sem solução viável novamente, então volte para 2a. Caso contrário Passo 3.
- Passo 3 identifique a solução ótima na solução viável encontrada.



Notas



## Exercício

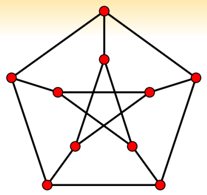
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 11 | 7 | 9 | 13 |
| 7 | 4 | 9 | 15 | 14 |
| 6 | 12 | 13 | 17 | 18 |
| 13 | 10 | 12 | 15 | 17 |
| 12 | 9 | 9 | 14 | 14 |



Notas



## Exercício



Sobre o grafo de Petersen (P), acima representado, responda:

1. Qual o número de independência $\alpha(P)$ ?
2. Encontre um acoplamento maximal de $P$ com 3 arestas.
3. Use cadeias aumentantes para encontrar um acoplamento maximal de $P$ com 4 arestas.
4. Encontre um acoplamento máximo de $P$.



Notas