Algoritimos e Estruturas de Dados III
CIC210
Algoritmos em Grafos - Busca em Grafos

Haroldo Gambini Santos

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

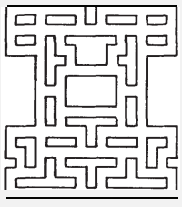
28 de setembro de 2009

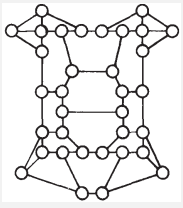
Notas

Atravessando Labirintos

Notas

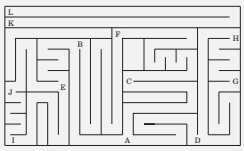
Atravessando Labirintos



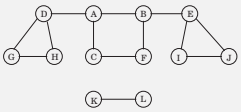


Notas

Busca em Grafos



Um labirinto



Grafo correspondente

Notas

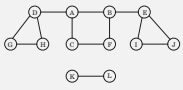
Exploração de Grafos - Partindo de uma fonte

1 /* inicializado em algum outro ponto do programa ou somente na primeira chamada recursiva de dfs */
$visitado[v] = falso \quad \forall v \in V$;

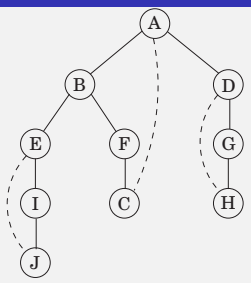
2 função `explore`$(V, A, s, visitado)$
Saída: vetor *visitado* com informação para cada cada nó em V se o mesmo pode ser alcançado a partir do nó s
3 $visitado[s] = verdadeiro$;
4 **para todo** $(s, d) \in A$ **faça**
5 **se** $(visitado[d] = falso)$ **então**
6 `explore`$(V, A, d, visitado)$;
7 **fim**
8 **fim**

Notas

Exploração de Grafos - Partindo de uma fonte



Grafo de entrada



Floresta do percorrimento de `explora` com s =A
- linhas normais: **arestas da árvore** (AV): (u, v) é uma AV se v foi descoberto primeiro pela exploração de (u, v)
- linhas tracejadas: **arestas de retorno**: arestas que levam a um nó já conhecido

Notas

Busca em Profundidade - *Depth-First Search*

```
1 função dfs(V, A, visitado)
2 visitado[i] = falso  ∀i ∈ V;
3 para todo v ∈ V faça
4     se (visitado[v] = falso) então
5         explore(V, A, v, visitado);
6     fim
7 fim
```

Complexidade de Tempo

$$O(|V| + |A|)$$

Note que cada aresta é examinada duas vezes.

Notas

Busca em Profundidade

Estado dos vértices durante a busca

- Visitação:
  - E1: Concluída
  - E2: Em Execução
  - E3: Vértice Ainda Desconhecido

Propriedades

- Nunca se encontrará uma aresta apontando para qualquer vértice em **E1**
- Chamada recursiva será feita sempre que um vértice em **E3** for encontrado
- Arestas para nós em **E2** são aquelas que conectam o vértice corrente com algum vértice do caminho do mesmo para a raiz

Notas

Busca em Profundidade

Categorizando o Grafo

Ciclos: existirão sempre que uma **Aresta de Retorno** for encontrada

Componentes Conexos: cada chamada não recursiva para `explore` irá processar uma árvore diferente

Notas

Busca em Amplitude

Funcionamento

- Atuação em camadas:
  - inicialmente são considerados os nós com distância 0 (o nó fonte s);
  - o algoritmo procede: na iteração 1 são encontrados os; nós com distância 1; prosseguindo, de modo genérico, na iteração d será adicionada uma camada com todos os nós com distância d;
  - cada novo nó descoberto é adicionado no final de uma fila Q (operação *enfileira*);
  - os nós dessa fila são removidos, com a operação *pegaPrimeiroFila*.

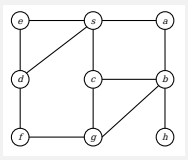
Notas

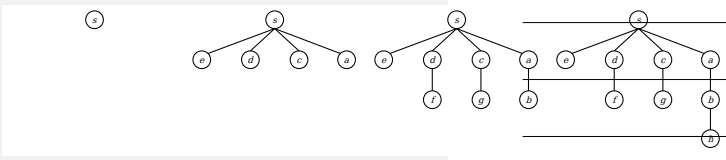
Busca em Amplitude - *Breadth-first Search*

```
1  função bfs(V, A,s)
2  dist[i] = ∞  ∀i ∈ V;
3  dist[s] = 0;
4  inicializaFila(Q);
5  enfileira(Q, s);
6  enquanto tamanhoFila(Q) > 0 faça
7      u = pegaPrimeiroDaFila(Q);
8      para todo (u, v) ∈ A faça
9          se dist[v] = ∞ então
10             enfileira(Q, v);
11             dist[v] = dist[u] + 1;
12         fim
13     fim
14 fim
```


Notas

Execução de Exemplo





Notas

Busca em Amplitude

Corretude:

- em uma iteração d todos os nós com distância $\leq d$ tem suas distâncias corretamente calculadas e todos os outros nós tem distância=∞, a fila contém exatamente os nós com distância d;

Complexidade

- $O(|V| + |E|)$
  - $2 \times |V|$ operações na fila
  - arestas processadas $2 \times |E|$ (grafos não direcionados)

Notas

DFS $\times$ BFS

DFS - Busca em Profundidade

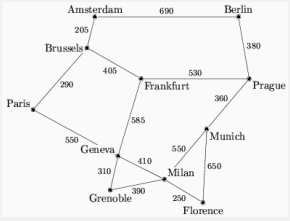
- incursões **profundas** no grafo, voltando somente quando não existem mais nós desconhecidos pela frente;
- boas propriedades já discutidas;
- possível problema: levar muitas iterações para encontrar nó próximo;
- uso de pilha.

BFS - Busca em Amplitude

- busca progride em "largura": certifica-se de que vizinhos próximos sejam visitados primeiro;
- sem reinício: interessam apenas os nós alcançáveis a partir de s
- uso de fila.

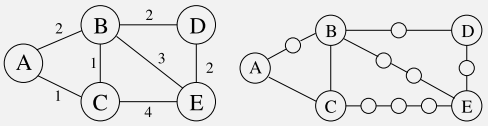
Notas

Grafos com Pesos - Computando caminhos mínimos



Notas

Usando BFS



Notas

Algoritmo do Alarme

- Coloque o alarme do nó s para o tempo 0
- Repita enquanto houverem alarmes:
  - pegue o nó u com alarme no menor tempo t
  - para cada vizinho v de u faça:
    - se não houver alarme para v ajuste o alarme de v para $t + dist(u, v)$
    - se houver alarme para v e for maior que o tempo $t + dist(u, v)$, ajuste o mesmo para esse tempo menor

Notas

Algoritmo do Alarme

- Computa caminhos mínimos para qualquer grafo com pesos positivos
- Como implementar sistema de alarmes ?

Notas

Sistema de Alarmes

Fila de Prioridades - operações que necessitamos

- `inicializa`$(heap, alarmes)$
- `diminui`$(heap, elemento, alarmeMenor)$
- `pegaMenor`$(heap)$

Notas

Algoritmo de Dijkstra

```
1  função dijkstra(V, A, d, s)
2  /* d_a indica a distância do arco (ou aresta) a ∈ A */
   Saída: dist_u e prev_u : comprimento e antecessor do nó u no caminho mínimo
          s → u
3  para todo u ∈ V faça
4      dist_u = ∞;
5      prev_u = nulo;
6  fim
7  dist_s = 0;
8  inicializa(heap, dist);
9  enquanto tamanho(heap) > 0 faça
10     v = pegaMenor(heap);
11     para todo u : (v, u) ∈ A faça
12         se dist_u > dist_v + d_(v,u) então
13             dist_u = dist_v + d_(v,u);
14             prev_u = v;
15             diminui(heap, u, dist_u);
16         fim
17     fim
18 fim
```


Notas

Complexidade

- Estruturalmente idêntico ao BFS
- Operação mais difícil em fila: sem as operações em tempo constante `pegaPrimeiroDaFila` e `enfileira`
- Operações:
  - $|V|$ operações de `pegaMenor`
  - $|V| + |E|$ operações de `diminui`
    - *Heap* binária: `diminui` fica $O(\log |V|)$

Notas

Caminhos Mínimos entre Todos os Pares

$dist(i, j, k)$: o comprimento do caminho mais curto entre i e j tal que apenas os nós $\{1, \ldots, k\}$ podem ser usados como intermediários.

Relação de recorrência

$$dist(i, j, k) = \min\{dist(i, k, k-1) + dist(k, j, k-1), dist(i, j, k-1)\}$$

Notas

O Algorithmo de Floyd-Warshall

```
1  função fwarshall(V, A, d, s)
2  para todo u ∈ V faça
3      para todo v ∈ V faça
4          dist(u, v, 0) = ∞;
5      fim
6  fim
7  para todo (u, v) ∈ A faça
8      dist(u, v, 0) = d_(u,v);
9  fim
10 para k = 1 até |V| faça
11     para i = 1 até |V| faça
12         para j = 1 até |V| faça
13             dist(i, j, k) =
               min{dist(i, k, k − 1) + dist(k, j, k − 1), dist(i, j, k − 1)};
14         fim
15     fim
16 fim
```


Notas

Notas