

Introdução

Exemplos
○○○○○
○○○
○○○
○○○

Resolvendo Recorrências
○○○

Algoritimos e Estruturas de Dados III
CIC210
Divisão e Conquista

Haroldo Gambini Santos
Concurso Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP
3 de setembro de 2009

Haroldo Gambini SantosDivisão e Conquista1/21

Notas

Introdução

Exemplos
○○○○○
○○○
○○○

Resolvendo Recorrências
○○○

Conteúdo

1

Introdução

2

Exemplos

- Multiplicação de Inteiros
- Busca Binária
- Quicksort

3

Resolvendo Recorrências

- O Método Mestre

Haroldo Gambini SantosDivisão e Conquista2/21

Notas

Seção

1

Introdução

2

Exemplos

- Multiplicação de Inteiros
- Busca Binária
- Quicksort

3

Resolvendo Recorrências

- O Método Mestre

Notas

Introdução

Exemplos
○○○○○
○○○○
○○○
○○○

Resolvendo Recorrências
○○○

Técnica de Divisão e Conquista

Passos Básicos

Dividir

Dividir o problema em uma ou mais subproblemas

Conquistar

Resolver os subproblemas caso esses sejam suficientemente pequenos, caso contrário continuar a divisão

Combinar

Soluções dos subproblemas para a solução do problema original

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

3/21

Notas

Introdução

Exemplos
○○○○○
○○○○
○○○
○○○

Resolvendo Recorrências
○○○

Divisão e Conquista

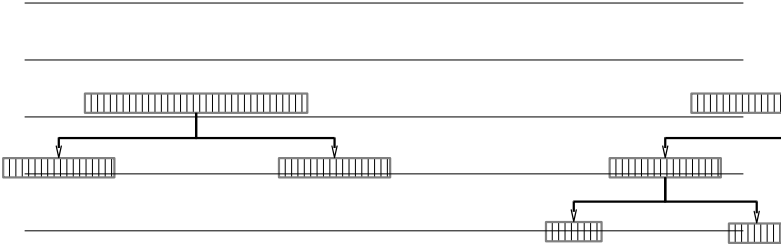


Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

4/21

Notas



Introdução

Exemplos
○○○○○
○○○○
○○○
○○○

Resolvendo Recorrências
○○○

Divisão e Conquista

```
1 função divConq( x )
2 se x é suficientemente pequeno então
3   retorna resolver(x) ;
4 senão
5   decompõe x em k conjuntos menores: x1,x2,...,xk;
6   para i=1 até k faça
7     yi = divConq( xi );
8   fim
9   combine o resultados de y1,y2,...,yk;
10  retorne y;
11 fim
```

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

5/21

Notas

Introdução

Exemplos
ooooo
oooo
oooo
oooo

Resolvendo Recorrências
ooo

Divisão e Conquista

Vantagens

- Eficiência do algoritmo
- Tratamento da complexidade
- Paralelismo
- Acesso à memória

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

6 / 21

Notas

Seção

1

Introdução

2

Exemplos

- Multiplicação de Inteiros
- Busca Binária
- Quicksort

3

Resolvendo Recorrências

- O Método Mestre

Notas

Subseção

1

Introdução

2

Exemplos

- Multiplicação de Inteiros
 - Busca Binária
 - Quicksort

3

Resolvendo Recorrências

- O Método Mestre

Notas

Introdução

Exemplos

Resolvendo Recorrências

●●●●●●

○○○○

○○○

Multiplicação de Inteiros

Multiplicação de Inteiros

Entrada

Entrada: 2 inteiros, x e y representados em n bits.

Algoritmo trivial

$\Theta(n^2)$

Pode-se melhorar ?
SIM, ao menos comportamento assintotico.

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

7/21

Notas

Introdução

Exemplos

Resolvendo Recorrências

○○●○○○

○○○○

○○○

Multiplicação de Inteiros

Multiplicação de Inteiros

Passo 1

Dividir os números x e y em duas partes:

$$x = 2^{\frac{n}{2}}a + b$$
$$y = 2^{\frac{n}{2}}c + d$$

Obtemos

$$xy = 2^na c + 2^{\frac{n}{2}}(ad + bc) + bd$$

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

8/21

Notas

Introdução

Exemplos

Resolvendo Recorrências

○○○●○○

○○○○

○○○

Multiplicação de Inteiros

Multiplicação de Inteiros

Continuando

$$xy = 2^na c + 2^{\frac{n}{2}}(\textcolor{red}{ad} + \textcolor{red}{bc}) + \textcolor{red}{bd}$$

4 multiplicações

Alternativa

$$\begin{aligned}x_1 &= \textit{multiplica}(a, c) \\ x_2 &= \textit{multiplica}(b, d) \\ x_3 &= \textit{multiplica}(a + b, c + d) - x_1 - x_2\end{aligned}$$

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

9/21

Notas

Introdução

Exemplos

Resolvendo Recorrências

○○○○●○

○○○○

○○○

Multiplicação de Inteiros

Multiplicação de Inteiros

Alternativa

$$\begin{aligned}x_1 &= \textit{multiplica}(a, c) \\ x_2 &= \textit{multiplica}(b, d) \\ x_3 &= \textit{multiplica}(a + b, c + d) - x_1 - x_2\end{aligned}$$

Recorrência

$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$$
$$\Theta(n^{1.59})$$

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

10/21

Notas

Introdução

Exemplos

Resolvendo Recorrências

○○○○●○

○○○○

○○○

Multiplicação de Inteiros

Multiplicação de Inteiros

```
1 função multiplicaInteiros( x, y, n )
2 // x e y são vetores binários de tamanho n
  Saída: vetor binário z com o resultado da multiplicação
3 se n == 1 então
4   retorne xy;
5 fim
6 xL = ⌈n/2⌋ bits à esquerda de x;
7 xR = ⌊n/2⌋ bits à direita de x;
8 yL = ⌈n/2⌋ bits à esquerda de y;
9 yR = ⌊n/2⌋ bits à direita de y;
10 P1 = multiplicaInteiros(xL, yL, ⌈n/2⌋) ;
11 P2 = multiplicaInteiros(xR, yR, ⌊n/2⌋) ;
12 P3 = multiplicaInteiros(xL + yR, xL + yR, ⌈n/2⌋) ;
13 retorne P1 × 2n + (P3 − P1 − P2) × 2n/2 + P2
```

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

11/21

Notas

Subseção

Notas

1

Introdução

2

Exemplos

■ Multiplicação de Inteiros

■ Busca Binária

■ Quicksort

3

Resolvendo Recorrências

■ O Método Mestre

Introdução

Exemplos

Resolvendo Recorrências

Busca Binária

Busca Binária

```
1 função buscaBin( V[], n, chave )
2 // V deve ser um vetor ordenado com posições 0, ..., n - 1
  Saída: posição de V com valor igual a chave ou -1
3 l = 0; r = n - 1;
4 enquanto l ≤ r faça
5     m = ⌊ (l+r)/2 ⌋;
6     se V[m] == chave então
7         retorne m;
8     senão
9         se chave < V[m] então
10             r = m - 1;
11         senão
12             l = m + 1;
13     fim
14 fim
15 fim
16 retorne -1;
```

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

12/21

Notas

Introdução

Exemplos

Resolvendo Recorrências

Busca Binária

Busca Binária

Exemplo

```
chave 31
V[i] = 3  14  27  31  39  42  55  70  74  81  85  93  98
i      0   1   2   3   4   5   6   7   8   9  10  11  12

it. 1  l      m                      r

it. 2  l      m      r

it. 3      l  m  r

it. 4      l
           m
           r
```

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

13/21

Notas

Introdução

Exemplos

Resolvendo Recorrências

Busca Binária

Busca Binária

Comentários

- número de possíveis índices: $r - l + 1$
 - reduz-se pela metade (ou mais) a cada iteração
- nr. de vezes que n é dividido por 2 até que $n < 1$
 - $\lg n$

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

14/21

Notas

Subseção

1

Introdução

2

Exemplos

- Multiplicação de Inteiros
- Busca Binária
- Quicksort

3

Resolvendo Recorrências

- O Método Mestre

Notas

Introdução

Exemplos
○○○○○
○○○
○○○
○●○○

Resolvendo Recorrências
○○○

Quicksort

Quicksort

```
1 função quickSort( V[l,...,r] )
2 se l < r então
3   p = partition( V[l,...,r] );
4   quickSort(V[l,...,p-1]);
5   quickSort(V[p+1,...,r]);
6 fim
```

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

15/21

Notas

Introdução

Exemplos
○○○○○
○○○
○○○
○●○○

Resolvendo Recorrências
○○○

Quicksort

Quicksort

```
1 função partition( V[l,...,r] )
2 pivot = V[l];
3 i = l;
4 j = r + 1;
5 repita
6   repita i = i + 1 até que V[i] ≥ pivot;
7   repita j = j - 1 até que V[j] ≤ pivot;
8   se i < j então
9     troque V[i] e V[j]
10  fim
11 até i ≥ j ;
12 troque V[l] e V[j];
13 retorne j;
```

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

16/21

Notas

Introdução

Exemplos
○○○○○
○○○○
○○○●

Resolvendo Recorrências
○○○

Quicksort

Quicksort

Exemplo

53198274

2314*5879

1*2347*88

34

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

17/21

Notas

Seção

1

Introdução

2

Exemplos

- Multiplicação de Inteiros
- Busca Binária
- Quicksort

3

Resolvendo Recorrências

- O Método Mestre

Notas

Introdução

Exemplos
○○○○○
○○○○
○○○

Resolvendo Recorrências
○○○

Resolvendo Recorrências

Padrão Genérico

- Problema é sucessivamente:
 - Dividido em a subproblemas
 - Cada subproblema de tamanho $\frac{n}{b}$

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

18/21

Notas

Introdução

Exemplos
○○○○○
○○○○
○○○

Resolvendo Recorrências
○○○

Resolvendo Recorrências

The diagram illustrates a recursion tree for a divide-and-conquer algorithm. The root node represents a problem of size n . It branches into a subproblems, each of size n/b . These subproblems further divide into a subproblems of size n/b^2 , and so on, until the base case of size 1 is reached. The tree has a branching factor of a and a depth of $\log_a n$. The width of the tree at each level is labeled as 'largura' (width), and the height is labeled as 'profundidade' (depth). The total number of nodes at each level is a^i for level i .

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

19/21

Notas

Subseção

1

Introdução

2

Exemplos

- Multiplicação de Inteiros
- Busca Binária
- Quicksort

3

Resolvendo Recorrências

- O Método Mestre

Notas

Introdução

Exemplos
○○○○○
○○○○
○○○

Resolvendo Recorrências
○○●

O Método Mestre

O Método Mestre

Utilidade

- Caracterizar assintoticamente um algoritmo recursivo
- Permite resolver recorrências que aparecem em algoritmos do tipo D e C

Formato
$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$$

- a : número de subproblemas (> 1)
- $\frac{n}{b}$: tamanho de cada subproblema ($b > 1$)
- custo de dividir o problema e de se combinar os resultados ($d \geq 0$)

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

20/21

Notas

Introdução

Exemplos
○○○○○
○○○○
○○○
○○○

Resolvendo Recorrências
○○●

O Método Mestre

O Método Mestre

$T(n)$

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + O(n^d)$$

Limitação assintótica de $T(n)$

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & \text{se } d > \log_b a \\ O(n^d \log n) & \text{se } d = \log_b a \\ O(n^{\log_b a}) & \text{se } d < \log_b a \end{cases}$$

Haroldo Gambini Santos

Divisão e Conquista

21 / 21

Notas

Notas

Notas
