

Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas

José Álvaro Tadeu Ferreira, Departamento de Computação, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, 35400-000 Ouro Preto, MG, Brasil, <http://www.decom.ufop.br/prof/bob/com400.htm>, E-mail: bob@iceb.ufop.br

1 - Introdução

A resolução de sistemas de equações lineares simultâneas é um dos problemas numéricos mais comuns em aplicações científicas para simular situações do mundo real. É etapa fundamental na resolução de vários problemas que envolvam, por exemplo, equações diferenciais parciais, determinação de caminhos ótimos em redes (grafos), regressão, sistemas não lineares, interpolação de pontos, dentre outros. Vários problemas da Engenharia envolvem a resolução de sistemas de equações lineares. A título de exemplo, considere-se a determinação de do potencial em redes elétricas, o cálculo da tensão em estruturas metálicas na construção civil, o cálculo da razão de escoamento em um sistema hidráulico com derivações, a previsão da concentração de reagentes sujeitos a reações químicas simultâneas.

Neste texto será considerada a resolução de um sistema de equações lineares de n equações com n incógnitas, da forma mostrada em (1.1).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.1)$$

Onde x_1, x_2, \dots, x_n são as incógnitas, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ os coeficientes das incógnitas e $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ os termos independentes do sistema de equações. Este sistema pode ser escrito sob a forma matricial, freqüentemente mais vantajosa, mediante o emprego da seguinte notação

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1.2)$$

Em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Assim, \mathbf{A} é a matriz dos coeficientes das incógnitas, \mathbf{x} o vetor coluna das incógnitas e \mathbf{b} o vetor coluna dos termos independentes. A matriz \mathbf{A} e os vetores coluna \mathbf{x} e \mathbf{b} serão considerados reais, não obstante muito do que se vai dizer neste capítulo ser generalizável ao campo complexo sem grande dificuldade.

Uma matriz bastante importante, e que será utilizada posteriormente, é a matriz aumentada de um sistema de equações lineares. Conforme mostrado a seguir, para obtê-la basta acrescentar à matriz dos coeficientes o vetor \mathbf{b} dos termos independentes.

$$[\mathbf{A} | \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right]$$

Definição 1.1

Denomina-se vetor solução (ou simplesmente solução) de um sistema de equações lineares da forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, e denota-se por \mathbf{x} , ao vetor que contém as variáveis x_j , $j = 1, \dots, n$, que satisfazem, de forma simultânea, a todas as equações do sistema.

2 - Classificação de um sistema de equações com relação ao número de soluções

Com relação ao número de soluções, um sistema de equações lineares simultâneas pode ser classificado em:

- (a) Compatível e determinado: quando admitir uma única solução.
- (b) Compatível e indeterminado: quando admitir um número infinito de soluções.
- (c) Incompatível: quando não admitir solução.

Vale lembrar que, a condição para que um sistema de equações lineares tenha solução única é que o determinante da matriz dos coeficientes seja não nulo. Caso contrário será indeterminado ou incompatível.

Quando todos os termos independentes forem nulos, isto é, se $b_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, o sistema é dito *homogêneo*. Todo sistema homogêneo é compatível, pois admitirá pelo menos a solução trivial ($x_j = 0$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$).

De uma forma mais ampla, pode-se considerar que resolver um sistema de equações consiste em diagnosticar em qual das três situações ele se enquadra. Ou seja, é mais do que determinar um vetor \mathbf{x} , uma vez que ele pode não existir ou não ser único.

3 – Métodos numéricos para a resolução de sistemas de equações lineares

Os métodos numéricos destinados a resolver sistemas lineares são divididos em dois grupos: os métodos diretos e os métodos iterativos.

4 – Métodos Diretos

Os Métodos Diretos são aqueles que, exceto por erros de arredondamento, fornecem a solução exata de um sistema de equações lineares, caso ela exista, por meio de um número finito de operações aritméticas.

São métodos bastante utilizados na resolução de sistemas de equações densos de porte pequeno a médio. Entenda-se por sistema denso aquele na qual a matriz dos coeficientes tem um número pequeno de elementos nulos. São considerados sistemas de pequeno porte aqueles que possuem até trinta equações e de médio porte até cinquenta equações. A partir daí, em geral, são considerados sistemas de grande porte.

Pertencem à classe dos Métodos diretos todos os que são estudados nos cursos de 1^o e 2^o graus como, por exemplo, a Regra de Cramer. Entretanto, tais métodos não são usados em problemas práticos que exigem a resolução de sistemas de equações lineares com um número relativamente grande de equações porque apresentam problemas de desempenho e eficiência. Para ilustrar este fato considere-se a **Regra de Cramer**.

Seja um sistema de equações lineares $A \cdot x = b$ com o número de equações igual ao número de incógnitas (um sistema $n \times n$), sendo D o determinante da matriz A , e D_{x1} , D_{x2} , D_{x3} , ..., D_{xn} os determinantes das matrizes obtidas substituindo em A , respectivamente, a coluna dos coeficientes de x_1 , x_2 , x_3 , ..., x_n pela coluna dos termos independentes. Sabe-se que o sistema será compatível e terá solução única se, e somente se, $D \neq 0$ e, então, a única solução de $A \cdot x = b$ é dada por:

$$x_1 = \frac{D_{x1}}{D}, \quad x_2 = \frac{D_{x2}}{D}, \quad x_3 = \frac{D_{x3}}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_{xn}}{D}$$

Portanto, aplicação da Regra de Cramer exige o cálculo de $n + 1$ determinantes ($\det A$ e $\det A_i$, $1 \leq i \leq n$). Pode ser mostrado que o número máximo de operações aritméticas envolvidas na resolução de um sistema de equações lineares com n equações e n incógnitas para este método é $(n + 1)(n!)(n - 1)$, Para $n = 20$ o número total de operações efetuadas será $21 * 20! * 19$ multiplicações mais um número semelhante de adições. Assim, um computador que efetue cerca de 100 milhões de multiplicações por segundo levaria 3×10^5 anos para efetuar as operações necessárias.

Sendo assim, a regra de Cramer é inviável em função do tempo de computação para sistemas muito grandes e, portanto, o estudo de métodos mais eficientes torna-se necessário,

uma vez que, em geral, os casos práticos exigem a resolução de sistemas lineares de porte elevado. Antes, porém, faz-se necessário tratar da base teórica que fundamenta estes métodos.

Transformações elementares

As transformações elementares constituem um conjunto de operações que podem ser efetuadas sobre as linhas ou colunas de uma matriz. No que se refere à resolução de sistemas de equações lineares, estas transformações são, normalmente, aplicadas apenas sobre as linhas da matriz dos coeficientes ou da matriz aumentada dependendo do método utilizado.

1. Multiplicação de uma linha por uma constante não-nula.

$$L_i \leftarrow c \times L_i, c \in \mathfrak{R}, c \neq 0$$

2. Troca de posição entre duas linhas.

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

3. Adição de um múltiplo de uma linha a outra linha,

$$L_i \leftarrow L_i + c \times L_j, c \in \mathfrak{R}, c \neq 0$$

Matrizes equivalentes

Duas matrizes são ditas equivalentes quando é possível, a partir de uma delas, chegar à outra por meio de um número finito de transformações elementares.

Teorema

Seja $[A | b]$ a matriz aumentada de um sistema de equações $Ax = b$, com determinante de A não nulo, e $[T | c]$ uma matriz a ela equivalente. Sendo assim, os sistemas $A.x = b$ e $T.x = c$ possuem a mesma solução.

Sistemas equivalentes

Dois sistemas $Ax = b$ e $\tilde{A}.x = c$ se dizem equivalentes se possuem a mesma solução.

Matriz triangular

- (i) Superior: é uma matriz quadrada na qual todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.
- (ii) Inferior: é uma matriz quadrada na qual todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

Sistemas Triangulares

É um sistema de equações lineares no qual a matriz dos coeficientes é triangular.

4.1 – Método de Gauss

O Método de Gauss é um dos métodos mais conhecidos e mais utilizados para a resolução de sistemas de equações lineares densos de pequeno a médio porte.

Este método consiste em operar transformações elementares sobre as linhas da matriz aumentada de um sistema de equações $A.x = b$ até que, depois de $n - 1$ passos, se obtenha um sistema triangular superior, $U.x = c$, equivalente ao sistema dado.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right]}_{[A|b]} \xrightarrow{\text{Transf. Elemen.}} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{n-1} & b_n^{n-1} \end{array} \right]}_{[U|c]}$$

4.1.1 – Descrição do método

A resolução de um sistema de equações lineares pelo método de Gauss envolve duas fases distintas. A primeira, chamada de fase de eliminação, consiste em transformar o sistema dado em um sistema triangular superior. A segunda, chamada de fase de substituição, consiste em resolver o sistema triangular superior por meio de substituições retroativas. Para a descrição do método, seja o sistema de equações lineares a seguir.

$$\begin{aligned} 3.x_1 + 2.x_2 + x_4 &= 3 \\ 9.x_1 + 8.x_2 - 3.x_3 + 4.x_4 &= 6 \\ -6.x_1 + 4.x_2 - 8.x_3 &= -16 \\ 3.x_1 - 8.x_2 + 3.x_3 - 8.x_4 &= 22 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 8 & -3 & 4 \\ -6 & 4 & -8 & 0 \\ 3 & -8 & 3 & -8 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -16 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz aumentada deste sistema de equações é

$$[A | \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 9 & 8 & -3 & 4 & 6 \\ -6 & 4 & -8 & 0 & -16 \\ 3 & -8 & 3 & -8 & 22 \end{array} \right]$$

Denotando a primeira linha de $[A | \mathbf{b}]$ por L_1 , a segunda por L_2 , e assim sucessivamente, são obtidos os seguintes resultados na fase de eliminação.

Passo 1:

Neste passo $a_{11} = 3$ é o elemento pivô e o objetivo é a eliminação dos elementos que estão abaixo dele. Para isto é utilizado o procedimento a seguir.

(i) Calcular os multiplicadores $m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i = 2, 3, 4$. Sendo assim vem:

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{9}{3} = -3, \quad m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{-6}{3} = 2 \quad \text{e} \quad m_{41} = -\frac{a_{41}}{a_{11}} = -\frac{3}{3} = -1$$

(ii) Efetuar as transformações elementares.

$$L_2^1 \leftarrow L_2 + m_{21} \cdot L_1$$

$$L_3^1 \leftarrow L_3 + m_{31} \cdot L_1$$

$$L_4^1 \leftarrow L_4 + m_{41} \cdot L_1$$

Desta forma, obtém-se a matriz $[A^{(1)} | \mathbf{b}^{(1)}]$, a seguir, que é equivalente a $\{A | \mathbf{b}\}$.

$$[A^{(1)} | \mathbf{b}^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -10 \\ 0 & -10 & 3 & -9 & 19 \end{array} \right]$$

Passo 2:

Neste passo $a_{22}^1 = 2$ é o elemento pivô e o objetivo é a eliminação dos elementos que estão abaixo dele. Para isto é utilizado o procedimento a seguir.

(i) Calcular os multiplicadores $m_{i2} = -\frac{a_{i2}^1}{a_{22}^1}$, $i = 3, 4$. Sendo assim vem:

$$m_{32} = -\frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} = -\frac{8}{2} = -4 \quad \text{e} \quad m_{42} = -\frac{a_{42}^1}{a_{22}^1} = -\frac{(-10)}{2} = 5$$

(ii) Efetuar as transformações elementares.

$$L_3^2 \leftarrow L_3^1 + m_{32} \cdot L_2^1$$

$$L_4^2 \leftarrow L_4^1 + m_{42} \cdot L_2^1$$

É obtida, então, a matriz $[A^{(2)} | b^{(2)}]$, a seguir, que é equivalente a $[A | b]$.

$$[A^{(2)} | b^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -4 & 4 \end{array} \right]$$

Passo 3:

Neste passo $a_{33}^2 = 4$ é o elemento pivô e o objetivo é a eliminação do único elemento que está abaixo dele. Para isto é utilizado o procedimento a seguir.

(i) Calcular o multiplicador $m_{i3} = -\frac{a_{i3}^2}{a_{33}^2}$, $i = 4$. Sendo assim vem:

$$m_{43} = -\frac{a_{43}^2}{a_{33}^2} = -\frac{(-12)}{4} = 3$$

(ii) Efetuar a transformação elementar.

$$L_4^3 \leftarrow L_4^2 + m_{43} \cdot L_3^2$$

É obtida, então, a matriz $[A^{(3)} | b^{(3)}]$, a seguir, que é equivalente a $[A | b]$.

$$[A^{(3)} | b^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 10 \end{array} \right]$$

Portanto, ao final de 3 passos, o sistema $A \cdot x = b$, expresso por (4.1), foi transformado no seguinte sistema triangular superior $A^{(3)} \cdot x = b^{(3)}$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 &= 3 \\ 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 + x_4 &= -3 \\ 4 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 &= 2 \\ -10 \cdot x_4 &= 10 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Terminada a fase de eliminação, passa-se, agora, para a fase de substituição, na qual se resolve o sistema (3.2) por meio das seguintes substituições retroativas:

$$x_4 = \frac{6}{(-6)} = -1$$

$$x_3 = \frac{2 + 2 \cdot (-1)}{4} = 0$$

$$x_2 = \frac{-3 + 3 \cdot (0) - (-1)}{2} = -1$$

$$x_1 = \frac{3 - 2 \cdot (-1) - (-1)}{3} = 2$$

Portanto, a solução do sistema de equações é $x = [2 \ -1 \ 0 \ -1]^t$.

No método de Gauss, os multiplicadores do passo k da fase de eliminação são calculados, de forma geral, por meio da expressão:

$$m_{ik} = -\frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1; i = k+1, k+2, \dots, n \quad (4.3)$$

Para efetuar a eliminação são realizadas as transformações elementares:

$$L_i^k \leftarrow L_i^{k-1} + m_{ik} \cdot L_k^{k-1} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-1; i = k+1, k+2, \dots, n \quad (4.4)$$

Para avaliar o número máximo de operações aritméticas envolvidas na resolução de um sistema de equações lineares $n \times n$, quando se utiliza o método de Gauss, é apresentada no quadro 4.1 a complexidade de pior caso das fases de eliminação e substituição.

Fase	Divisões	Multiplicações	Adições	Total
1	$n-1$	$n(n-1)$	$n(n-1)$	
2	$n-2$	$(n-1)(n-2)$	$(n-1)(n-2)$	
⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	
$n-1$	1	2.1	2.1	
Eliminação	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}$	$\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}$	$\frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{6}$
	n	$1 + 2 + \dots + (n-1)$	$1 + 2 + \dots + (n-1)$	
Substituição	n	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	n^2
Total	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$	$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$	$\frac{2n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{7n}{6}$

Quadro 4.1: Complexidade do Método de Gauss.

Como se observa, o método de Gauss tem complexidade polinomial $O(n^3)$. Um computador que faz uma operação aritmética em 10^{-8} segundos gastaria 0,0000257 segundos para resolver um sistema 15×15 (um tempo infinitamente inferior àquele gasto pela Regra de Cramer).

O sistema 4.1 foi preparado com foco no método, ou seja, no processo de transformação de um sistema de equações lineares qualquer em um que seja triangular superior. Na seqüência, serão tratados alguns exemplos com o objetivo de abordar algumas questões de ordem numérica.

Exemplo – 4.1

Seja resolver o sistema de equações 4.5, a seguir, retendo nos cálculos três casas decimais.

$$\begin{aligned} 4,5 \cdot x_1 + 1,8 \cdot x_2 + 2,4 \cdot x_3 &= 19,62 \\ 3,0 \cdot x_1 + 5,2 \cdot x_2 + 1,2 \cdot x_3 &= 12,36 \\ 0,8 \cdot x_1 + 2,4 \cdot x_2 + 3,6 \cdot x_3 &= 9,20 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Os cálculos realizados estão sumarizados no quadro 4.2.

Linha	Multiplicador	Coeficientes			T. ind.	Transformações
L_1		4,5	1,8	2,4	19,62	
L_2	$m_{21} = -0,667$	3,0	5,2	1,2	12,36	
L_3	$m_{31} = -0,178$	0,8	2,4	3,6	9,20	
L_2^1		0	3,999	-0,401	-0,727	$L_2 + m_{21}L_1$
L_3^1	$m_{32} = -0,520$	0	2,080	3,173	5,708	$L_3 + m_{31}L_1$
L_3^2		0	0	3,382	6,086	$L_3^1 + m_{32} \cdot L_2^1$

Quadro 4.2: Sumarização dos cálculos.

Observe-se que, quando é realizada a transformação elementar para a eliminação na posição linha dois coluna um, o cálculo realizado é $3,0 + (-0,667) \times 4,5$ que produz o resultado $(-0,0015)$ que, considerando três casas decimais, vai a $(-0,002)$. O problema está no erro de arredondamento no cálculo do multiplicador, que causou reflexo na eliminação.

Como, no final terá utilidade apenas a parte triangular superior da matriz dos coeficientes, então, nas posições nas quais deve ocorrer a eliminação, os cálculos podem deixar de ser feitos. Este procedimento é interessante porque diminui o esforço computacional. É obtido, então, o sistema triangular superior dado por 4.6.

$$\begin{aligned} 4,500.x_1 + 1,800.x_2 + 2,400.x_3 &= 19,620 \\ 3,999.x_2 - 0,401.x_3 &= -0,727 \\ 3,382.x_3 &= 6,086 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Resolvendo 3.6 obtém-se o vetor $x = [3,400 \ -0,001 \ 1,800]^t$.

4.1.2 - Avaliação do Resíduo/Erro

O erro ε produzido por uma solução do sistema $A.x = b$ pode ser avaliado pela expressão:

$$\varepsilon = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i| \quad (4.7)$$

Onde r_i , $i = 1, 2, \dots, n$; é a i -ésima componente do vetor resíduo R , o qual é dado por:

$$R = b - A.x \quad (4.8)$$

Para o exemplo 4.1, o vetor resíduo é:

$$R = \begin{bmatrix} 19,62 \\ 12,36 \\ 9,20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4,5 & 1,8 & 2,4 \\ 3,0 & 5,2 & 1,2 \\ 0,8 & 2,4 & 3,6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3,400 \\ -0,001 \\ 1,800 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Assim, o vetor resíduo é $R = [0,0018 \ 0,0052 \ 0,0024]^t$ e o erro cometido é:

$$\varepsilon = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i| = \max_{1 \leq i \leq 3} \{|0,0018|, |0,0052|, |0,0024|\} = 0,0052 \quad (4.10)$$

Exemplo - 4.2

Seja, agora, a resolução do sistema de equações dado por 4.11 considerando, quando for o caso, três casas decimais.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2.x_3 + 4.x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 5.x_3 + 6.x_4 &= -7 \\ 2.x_1 + 5.x_2 + x_3 + 2.x_4 &= 10 \\ 4.x_1 + 6.x_2 + 2.x_3 + x_4 &= 12 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Os cálculos estão sumarizados no quadro 4.3.

Linha	Multiplicador	Coeficientes				T. Indep.	Transformações
L ₁		<u>1</u>	1	2	4	- 1	
L ₂	m ₂₁ = - 1	1	1	5	6	- 7	
L ₃	m ₃₁ = - 2	2	5	1	2	10	
L ₄	m ₄₁ = - 4	4	6	2	1	12	
L ₂ ¹		0	0	3	2	- 6	L ₂ + m ₂₁ L ₁
L ₃ ¹		0	3	- 3	- 6	12	L ₃ + m ₃₁ L ₁
L ₄ ¹		0	2	- 6	- 15	16	L ₄ + m ₄₁ L ₁
L ₂ ²		0	<u>3</u>	- 3	- 6	12	L ₃ ¹
L ₃ ²	m ₃₂ = 0	0	0	3	2	- 6	L ₂ ¹
L ₄ ²	m ₄₂ = - 0,667	0	2	- 6	- 15	16	L ₄ ¹
L ₃ ³		0	0	<u>3</u>	2	- 6	L ₃ ²
L ₄ ³	m ₄₃ = 1,333	0	0	- 3,999	- 10,998	7,996	L ₄ ² + m ₄₂ .L ₂ ²
L ₄ ⁴		0	0	0	<u>- 8,332</u>	- 0,002	L ₄ ³ + m ₄₃ .L ₃ ³

Quadro 4.3: Sumarização dos cálculos.

É obtido, então, o sistema triangular superior dado por 4.12.

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + 2.x_3 + 4.x_4 &= - 1 \\
 3.x_2 - 3.x_3 - 6.x_4 &= 12 \\
 3.x_3 + 2.x_4 &= - 6 \\
 - 8,332.x_4 &= - 0,002
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Resolvendo 4.12 obtém-se o vetor $x = [1 \ 2 \ -2 \ 0]^t$. É simples verificar que o vetor resíduo é nulo e, portanto, foi obtida a solução exata do sistema de equações 4.11.

Observe-se que foi necessário efetuar a troca de posição entre as linhas L₂¹ e L₃¹ em virtude de pivô nulo. Quando não é possível efetuar a troca de posição entre linhas, situação que ocorre quando, além de o pivô ser nulo, todos os elementos da coluna, que estão abaixo dele, também o são, então a matriz dos coeficientes é singular e o sistema de equações não admite solução única. Esta situação é tratada no exemplo 4.3 a seguir.

Exemplo – 4.3

Seja a resolução dos sistemas de equações $A.x = b^1$ e $A.x = b^2$ onde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 8 & -3 & 4 \\ 6 & -6 & 3 & -7 \\ 3 & -8 & 3 & -8 \end{bmatrix}, \quad b^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -16 \\ 22 \end{bmatrix} \quad e \quad b^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 25 \\ 22 \end{bmatrix}
 \tag{4.13}$$

Os cálculos estão sumarizados no quadro 4.4.

Linha	Multiplicador	Coeficientes			b^1	b^2	Transformações	
L_1		<u>3</u>	2	0	1	3	3	
L_2	$m_{21} = -3$	9	8	-3	4	6	6	
L_3	$m_{31} = -2$	6	-6	3	-7	-16	25	
L_4	$m_{41} = -1$	3	-8	3	-8	22	22	
L_2^1		0	<u>2</u>	-3	1	-3	-3	$L_2 + m_{21}L_1$
L_3^1	$m_{32} = 5$	0	-10	3	-9	-22	19	$L_3 + m_{31}L_1$
L_4^1	$m_{42} = 5$	0	-10	3	-9	19	19	$L_4 + m_{41}L_1$
L_3^2		0	0	<u>-12</u>	-4	-37	4	$L_3^1 + m_{32}.L_2^1$
L_4^2	$m_{43} = -1$	0	0	-12	-4	4	4	$L_4^1 + m_{42}.L_2^1$
L_4^3		0	0	0	<u>0</u>	41	0	$L_4^2 + m_{43}.L_3^2$

Quadro 4.4: Sumarização dos cálculos.

De $A.x = b^1$ é produzido o sistema triangular superior dado por 4.14.

$$\begin{aligned}
 3.x_1 + 2.x_2 + x_4 &= 3 \\
 2.x_2 - 3.x_3 + x_4 &= -3 \\
 -12.x_3 - 4.x_4 &= -37 \\
 0.x_4 &= 41
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Portanto, trata-se de um sistema de equações lineares **incompatível**.

De $A.x = b^2$ é produzido o sistema triangular superior dado por 4.15.

$$\begin{aligned}
 3.x_1 + 2.x_2 + x_4 &= 3 \\
 2.x_2 - 3.x_3 + x_4 &= -3 \\
 -12.x_3 - 4.x_4 &= 4 \\
 0.x_4 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Trata-se, assim, de um sistema de equações lineares **indeterminado**.

4.1.3 - O Método de Gauss com pivotação parcial

Conforme exposto anteriormente, o Método de Gauss requer o cálculo dos multiplicadores. Entretanto este fato pode ocasionar problemas se o pivô estiver próximo de zero ou for nulo. Isto porque trabalhar com pivô nulo é impossível e o pivô próximo de zero pode conduzir a resultados imprecisos, visto que dá origem a multiplicadores bem maiores do que a unidade o que, por sua vez provoca uma ampliação dos erros de arredondamento.

A ampliação de erros de arredondamento ocorre quando se multiplica um número muito grande por outro que já contém erro de arredondamento. Por exemplo, admita-se que um número n tenha erro de arredondamento ξ . Este número pode, então, ser escrito na forma:

$$\tilde{n} = n + \xi$$

Se \tilde{n} é multiplicado por m , tem-se que

$$m.\tilde{n} = m.n + m.\xi$$

Portanto o erro no resultado é $m.\xi$. Se m for grande este erro pode ser muito maior que o original. Diz-se, então, que o erro ξ foi amplificado.

Para contornar este problema, ou seja, para minimizar o efeito dos erros de arredondamento é adotada, no Método de Gauss, uma estratégia de *pivotação*, que é um processo de escolha do pivô. Neste texto é considerada a estratégia de pivotação parcial, que consiste em:

- (i) no passo k , da fase de eliminação, tomar como pivô o elemento de maior módulo dentre os coeficientes $a_{i,k}^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$; $i = k, k + 1, \dots, n$;
- (ii) se necessário, efetuar a troca de posição entre as linhas i e k .

Utilizando esta estratégia todos os multiplicadores serão, em módulo, menores que a unidade. Análises de propagação de erros de arredondamento para o algoritmo de Gauss indicam que é conveniente que isto ocorra, sendo assim, é necessário que o pivô seja o elemento de maior valor absoluto da coluna, considerando da posição diagonal (inclusive) para baixo.

Exemplo – 4.4

Seja resolver o sistema de equações dado por 4.16 utilizando o Método de Gauss com pivotação parcial e considerando, quando for o caso, três casas decimais.

$$\begin{aligned} 2.x_1 - 5.x_2 + 3.x_3 + x_4 &= 5 \\ 3.x_1 - 7.x_2 + 3.x_3 - x_4 &= -1 \\ 5.x_1 - 9.x_2 + 6.x_3 + 2.x_4 &= 7 \\ 4.x_1 - 6.x_2 + 3.x_3 + x_4 &= 8 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Os cálculos estão sumarizados no quadro 3.5. Observe-se que é feita, de imediato, a troca de posição entre as linhas um e três.

Linha	Multiplicador	Coeficientes				T. Indep.	Transformações
L_1^1		<u>5</u>	-9	6	2	7	L_3
L_2^1	$m_{21} = -0,6$	3	-7	3	-1	-1	L_2
L_3^1	$m_{31} = -0,4$	2	-5	3	1	5	L_1
L_4^1	$m_{41} = -0,8$	4	-6	3	1	8	L_4
L_2^2		0	<u>-1,6</u>	-0,6	-2,2	-5,2	$L_2^1 + m_{21}L_1^1$
L_3^2	$m_{32} = -0,875$	0	-1,4	0,6	0,2	2,2	$L_3^1 + m_{31}L_1^1$
L_4^2	$m_{42} = 0,75$	0	1,2	-1,8	-0,6	2,4	$L_4^1 + m_{41}L_1^1$
L_3^3		0	0	1,125	2,125	6,75	$L_3^2 + m_{32}L_2^2$
L_4^3		0	0	-2,25	-2,25	-1,5	$L_4^2 + m_{42}L_2^2$
L_3^4		0	0	<u>-2,25</u>	-2,25	-1,5	L_4^3
L_4^4	$m_{43} = 0,5$	0	0	1,125	2,125	6,75	L_3^3
L_4^5		0	0	0	<u>1</u>	6	$L_4^4 + m_{43}L_3^4$

Quadro 4.5: Sumarização dos cálculos.

É obtido, então, o sistema triangular superior dado por 4.17.

$$\begin{aligned}
 5.x_1 - 9.x_2 + 6.x_3 + 2.x_4 &= 7 \\
 -1,6.x_2 - 0,6.x_3 - 2,2.x_4 &= -5,2 \\
 -2,25.x_3 - 2,25.x_4 &= -1,5 \\
 x_4 &= 6
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Resolvendo 4.17 obtém-se o vetor $x = [0 \ -3 \ -5,333 \ 6]^t$. O vetor residual produzido é dado por $r = [-0,001 \ -0,001 \ -0,002 \ -0,001]^t$.

Assim, o erro cometido é:

$$\varepsilon = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i| = \max_{1 \leq i \leq 3} \{|-0,001|, |-0,001|, |-0,002|, |-0,001|\} = 0,002$$

Portanto não foi obtida a solução exata do sistema dado por 4.16.

4.2 - O Método da Decomposição LU

4.2.1 – Introdução

Em muitas situações, é desejável resolver vários sistemas de equações lineares que possuam em comum a matriz dos coeficientes e têm termos independentes diferentes, ou seja, quando se tem:

$$A.x = b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

Nestes casos, é indicado resolvê-los por meio uma técnica de fatoração da matriz A. Esta técnica consiste em decompor a matriz dos coeficientes em um produto de dois ou mais fatores e, em seguida, resolver uma seqüência de sistemas de equações lineares que conduzirá à solução do sistema original. A vantagem da utilização de uma técnica de fatoração é que se pode resolver qualquer sistema de equações lineares que tenha A como matriz dos coeficientes. Se b for alterado, a resolução do novo sistema é quase que imediata.

Dentre as técnicas de fatoração mais utilizadas, destaca-se a da decomposição LU. Por esta técnica, a matriz A dos coeficientes é decomposta como o produto de duas matrizes L e U, onde L é uma matriz triangular inferior e U, uma matriz triangular superior, isto é:

$$A = L.U$$

Antes de tratar do método da decomposição LU, serão apresentados alguns conceitos necessários à sua fundamentação.

Matriz identidade

É uma matriz quadrada na qual os elementos situados na diagonal principal são iguais a um e, os demais, são nulos. É denotada por **I**. Sendo A uma matriz, tem-se que $A.I = I.A = A$.

Definição 4.1

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, não-singular, isto é, $\det(A) \neq 0$. Diz-se que A^{-1} é a inversa de A se $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$.

Teorema 4.1

Se A e B são matrizes de ordem n, inversíveis, então $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

Demonstração

Seja:

$$B^{-1}.A^{-1} = R \Rightarrow B^{-1}.A^{-1}.A = R.A \Rightarrow B^{-1} = R.A$$

$$B^{-1}.B = R.A.B \Rightarrow I = R.A.B$$

$$I.(A.B)^{-1} = R.(A.B).(A.B)^{-1} \Rightarrow (A.B)^{-1} = R$$

$$\text{Logo } (A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

c.q.d.

4.2,2 – A Fatoração LU de uma matriz

Teorema 4.2

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, seja A_k a matriz constituída das primeiras k linhas e colunas de A. Suponha que $\det(A_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, \dots, (n - 1)$. Então, existe uma única matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$, com $l_{11} = l_{22} = \dots = l_{nn} = 1$, e uma única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$, tal que $L.U = A$. Além disto $\det(A) = u_{11}.u_{22} \dots u_{nn}$.

Os fatores L e U podem ser obtidos por meio de fórmulas que permitem calcular os elementos l_{ij} , $i = 2, 3, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, n$ e u_{ij} ; $i, j = 1, 2, \dots, n$ ou utilizando a idéia básica do Método de Gauss.

Neste texto, será tratada a obtenção das matrizes L e U utilizando a idéia básica do método de Gauss, uma vez que o uso de fórmulas dificulta a aplicação da estratégia de pivotação parcial. Considere-se uma matriz genérica de ordem três.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

No primeiro passo do processo de eliminação são obtidos os multiplicadores

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} \text{ e } m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}$$

e são efetuadas as transformações elementares.

$$L_2^1 \leftarrow L_2 + m_{21}.L_1 \quad (4.19)$$

$$L_3^1 \leftarrow L_3 + m_{31}.L_1 \quad (4.20)$$

Sendo obtida a matriz

$$A^1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ 0 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Toda transformação elementar pode ser expressa como um produto de duas matrizes. Sendo assim, efetuar as transformações elementares 4.19 e 4.20 equivale a pré-multiplicar 4.18 pela matriz 4.22.

$$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Com efeito, note-se que

$$M^0 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ m_{21} \cdot a_{11} + a_{21} & m_{21} \cdot a_{12} + a_{22} & m_{21} \cdot a_{13} + a_{23} \\ m_{31} \cdot a_{11} + a_{31} & m_{31} \cdot a_{12} + a_{32} & m_{31} \cdot a_{13} + a_{33} \end{bmatrix}$$

Logo

$$M^0 \cdot A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ 0 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{bmatrix} = A^1 \quad (4.23)$$

No segundo passo do processo de eliminação é calculado o multiplicador

$$m_{32} = -\frac{a_{32}^1}{a_{22}^1}$$

e é efetuada a transformação elementar.

$$L_3^2 \leftarrow L_3^1 + m_{32} \cdot L_2^1 \quad (4.24)$$

Obtém-se a matriz

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Pode ser demonstrado que realizar a transformação elementar 4.24 é equivalente a pré-multiplicar a matriz 4.23 pela matriz

$$M^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Portanto,

$$A^2 = M^1 \cdot A^1 \quad (4.27)$$

Resumindo, tem-se que:

$$A^1 = M^0.A$$

$$A^2 = M^1.A^1$$

Portanto

$$A^2 = M^1.M^0.A \quad (4.28)$$

Pré-multiplicando os dois membros de 4.28 pela inversa da matriz $(M^1.M^0)$

$$(M^1.M^0)^{-1}.A^2 = (M^1.M^0)^{-1}.(M^1.M^0).A = I.A = A$$

Portanto

$$A = (M^1.M^0)^{-1}.A^2 = (M^0)^{-1}.(M^1)^{-1}.A^2 \quad (4.29)$$

Pode ser demonstrado que

$$(M^0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$(M^1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Tendo em vista 4.30 e 4.31, tem-se que

$$(M^0)^{-1}.(M^1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Substituindo 4.25 e 4.32 em 4.29 tem-se que

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{bmatrix}}_U \quad (4.33)$$

Assim, pode-se concluir que $A = LU$, onde:

- (i) U é a matriz triangular superior obtida ao final da fase de eliminação do método de Gauss;
- (ii) L é uma matriz triangular inferior, na qual os elementos da diagonal principal são unitários e, abaixo, se encontram os multiplicadores da etapa k da fase de eliminação com o **sinal trocado**.

4.2.3 – A resolução de um sistema de equações lineares utilizando Decomposição LU

Seja um sistema de equações $A.x = b$. Para resolvê-lo, utilizando decomposição LU, basta executar a seguinte seqüência de passos:

- (i) Obtém-se a fatoraçoão L.U da matriz A. Sendo $A = L.U$, então $L.U.x = b$;
- (ii) Faz-se $Ux = y$, logo $L.Y = B$;
- (iii) Resolve-se o sistema triangular inferior $Ly = b$;
- (iv) Resolve-se o sistema triangular superior $Ux = y$ obtendo, então, a solução do sistema de equações $A.x = b$.

Exemplo – 4.5

Seja resolver o sistema de equações a seguir.

$$\begin{aligned} x_1 - 3.x_2 + 2.x_3 &= 11 \\ -2.x_1 + 8.x_2 - x_3 &= -15 \\ 4.x_1 - 6.x_2 + 5.x_3 &= 29 \end{aligned}$$

Os cálculos realizados estão sumarizados no quadro 4.6.

Linha	Multiplicador	Coeficientes			Transformações
L_1	$m_{21} = 2$ $m_{31} = -4$	<u>1</u>	-3	2	
L_2		-2	8	-1	
L_3		4	-6	5	
L_2^1	$m_{32} = -3$	0	<u>2</u>	3	$L_2 + m_{21}L_1$
L_3^1		0	6	-3	$L_3 + m_{31}L_1$
L_3^2		0	0	<u>-12</u>	$L_3^1 + m_{32}.L_2^1$

Quadro 4.6: Sumarização dos cálculos.

Tem-se, então que:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Resolução do sistema $L.Y = b$

$$\begin{aligned} y_1 &= 11 \\ -2.y_1 + y_2 &= -15 \Rightarrow Y = [11 \ 7 \ -36]^t \\ 4.y_1 + 3.y_2 + y_3 &= 29 \end{aligned}$$

Resolução do sistema $U.x = Y$

$$x_1 - 3.x_2 + 2.x_3 = 11$$

$$2.x_2 + 3.x_3 = 7$$

$$- 12.x_3 = 36$$

O vetor $x = [2 \ -1 \ 3]^t$ é a solução do sistema de equações dado.

4.2.4 – O Método da Decomposição LU com Pivotação Parcial

Para aplicar a estratégia de pivotação parcial ao Método da Decomposição LU faz-se necessário utilizar um vetor de permutação P, que é gerado atribuindo-se um número de ordem a cada equação que compõe o sistema. Para efeito da apresentação do processo, seja o exemplo a seguir.

Exemplo – 4.6

Seja resolver o sistema de equações dado a seguir utilizando o Método da Decomposição LU com pivotação parcial e considerando, quando for o caso, duas casas decimais.

$$4.x_1 - x_2 \quad \quad \quad - x_4 = 6 \rightarrow 1$$

$$x_1 - 2.x_2 + x_3 \quad \quad \quad = 8 \rightarrow 2$$

$$4.x_2 - 4.x_3 \quad + x_4 = -7 \rightarrow 3$$

$$5.x_1 \quad \quad + 5.x_3 - 10.x_4 = -40 \rightarrow 4$$

O vetor de permutação é $P = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^t$. Os cálculos estão sumarizados no quadro 4.7.

Linha	Multiplicador	Coeficientes				P	Transformações
L_1^1		<u>5</u>	0	5	-10	<u>4</u>	L_4
L_2^1	$m_{21} = -0,2$	1	-2	1	0	2	L_2
L_3^1	$m_{31} = 0$	0	4	-4	1	3	L_3
L_4^1	$m_{41} = -0,8$	4	-1	0	-1	1	L_1
L_2^2		0,2	-2	0	2	2	$L_2^1 + m_{21}L_1^1$
L_3^2		0	4	-4	1	3	L_3^1
L_4^2		0,8	-1	-4	7	1	$L_4^1 + m_{41}L_1^1$
L_2^3		0	<u>4</u>	-4	1	<u>3</u>	L_3^2
L_3^3	$m_{32} = 0,5$	0,2	-2	0	2	2	L_2^2
L_4^3	$m_{42} = 0,25$	0,8	-1	-4	7	1	L_4^2
L_3^4		0,2	-0,5	-2	2,5	2	$L_3^3 + m_{32}L_2^3$
L_4^4		0,8	-0,25	-5	7,25	1	$L_4^3 + m_{41}L_2^3$
L_3^5		0,8	-0,25	<u>-5</u>	7,25	<u>1</u>	L_4^4
L_4^5	$m_{43} = -0,4$	0,2	-0,5	-2	2,5	2	L_3^4
L_4^6		0,2	-0,5	0,4	<u>-0,4</u>	<u>2</u>	$L_4^5 + m_{43}L_3^5$

Quadro 4.7: Sumarização dos cálculos.

Observe-se que é feita, de imediato, a troca de posição entre as linhas um e quatro. A mesma troca deve ser feita no vetor de permutação. Obtém-se, então, $P^{(1)} = [4\ 2\ 3\ 1]^t$ e é realizada a eliminação dos elementos da primeira coluna.

No passo dois, que consiste na eliminação dos elementos da segunda coluna, verifica-se que o pivô está na terceira linha. Logo, é necessário fazer a troca de posição entre as linhas dois e três. Esta mesma transformação deve ser realizada no vetor de permutação, obtém-se, então, $P^{(2)} = [4\ 3\ 2\ 1]$.

Verifica-se, no passo três, que o pivô está na quarta linha. Logo, é necessário fazer a troca de posição entre as linhas três e quatro. Efetuando a mesma transformação no vetor de permutação, obtém-se $P^{(3)} = [4\ 3\ 1\ 2]$. Têm-se, a seguir, as matrizes L e U.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,8 & -0,25 & 1 & 0 \\ 0,2 & -0,5 & 0,4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 7,25 \\ 0 & 0 & 0 & -0,4 \end{bmatrix}$$

Resolução do sistema $L.Y = b$

Aplicando $P^{(3)} = [4 \ 3 \ 1 \ 2]$ ao vetor $b = [6 \ 8 \ -7 \ -40]^t$, -e obtido $b' = [-40 \ -7 \ 6 \ 8]^t$.

$$\begin{aligned} y_1 &= -40 \\ y_2 &= -7 \\ 0,8.y_1 - 0,25.y_2 + y_3 &= 6 \Rightarrow y_3 = 36,25 \\ 0,2.y_1 - 0,5.y_2 + 0,4.y_3 + y_4 &= 8 \Rightarrow y_4 = -2 \end{aligned}$$

Resolução do sistema $U.x = Y$

$$\begin{aligned} 5.x_1 + 5.x_3 - 10.x_4 &= -40 \\ 4.x_2 - 4.x_3 + x_4 &= -7 \\ -5.x_3 + 7,25.x_4 &= 36,25 \\ -0,4.x_4 &= -2 \end{aligned}$$

A solução do sistema de equações é, portanto, $x = [2 \ -3 \ 0 \ 5]^t$.

Exemplo – 4.7

A análise dos alimentos, I , II e III revelou que os mesmos possuem as seguintes unidades de vitaminas A, B e C por grama:

	Vitamina		
	A	B	C
I	20,5	38,0	27,0
II	30,4	18,2	19,0
III	25,0	12,8	17,6

A tabela informa que, por exemplo, uma dieta com 30g do alimento I fornece 615 unidades de vitamina A, 1140 de vitamina B e 810 de vitamina C.

Se uma pessoa precisa ingerir 2684, 2793,22 e 2402,74 unidades de vitamina A, B e C , respectivamente, quais as quantidades dos alimentos I , II e III que suprirão estas necessidades ?

Solução

Basta resolver o seguinte sistema de equações:

$$20,5x_1 + 30,4x_2 + 25,0x_3 = 2684 \quad (1)$$

$$38,0x_1 + 18,2x_2 + 12,8x_3 = 2793,22 \quad (2)$$

$$27,0x_1 + 19,0x_2 + 17,6x_3 = 2402,74 \quad (3)$$

Utilizando-se o método da decomposição LU com pivotação parcial e efetuando os cálculos com 3 casas decimais, são obtidos os resultados a seguir.

Linha	Multiplicador	Coeficientes			P	Transformações
L ₁₁	m ₂₁ = - 0,539	38,0	18,2	12,8	2	L ₂
L ₂₁	m ₃₁ = - 0,711	20,5	30,4	25,0	1	L ₁
L ₃₁		27,0	19,0	17,6	3	L ₃
L ₂₂	m ₃₂ = - 0,294	0,539	20,590	18,101	1	L ₂₁ + m ₂₁ L ₁₁
L ₃₂		0,711	6,060	8,499	3	L ₃₁ + m ₃₁ L ₁₁
L ₃₃		0,711	0,294	3,177	3	L ₃₂ + m ₃₂ L ₂₂

Resolvendo LY = B

Aplicando P = [2 1 3]^t em B, obtém-se B = [2793,22 2684 2402,74]^t

$$\begin{aligned} y_1 &= 2793,22 \\ 0,539 y_1 + y_2 &= 2684 \rightarrow y_2 = 1178,465 \\ 0,711 y_1 + 0,294 y_2 + y_3 &= 2402,74 \rightarrow y_3 = 70,292 \end{aligned}$$

Resolvendo UX = Y

$$\begin{aligned} 38,0x_1 + 18,2x_2 + 12,8x_3 &= 2793,22 \\ 20,59x_2 + 18,101x_3 &= 1178,465 \\ 3,177x_3 &= 70,292 \end{aligned}$$

Obtém-se, como solução, o vetor $X = [47,957 \ 37,784 \ 22,125]^t$, em gramas.

O vetor residual produzido é $R = [-0,8771 \ -0,0148 \ 0,605]^t$, portanto foi obtida uma solução aproximada.

Obs: A solução exata é $X = [48 \ 37,5 \ 22,4]^t$.

4.2.5 Cálculo de Determinantes

Um subproduto da resolução de sistemas lineares por meio de métodos diretos é o cálculo de determinantes. É mostrado a seguir como calcular o determinante de uma matriz utilizando o Método da Decomposição LU.

Como foi visto, a matriz A pode ser decomposta como produto de dois fatores L e U, onde L é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais unitários e U uma matriz triangular superior, isto é: $A = LU$. Assim, pode-se escrever:

$$\det(A) = \det(L.U) = \det(L) \times \det(U)$$

Como se sabe, o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, então $\det(L) = 1$ e

$$\det(A) = \det(U) = \text{produto dos pivôs}$$

No caso de ser utilizado o procedimento de pivotação parcial, tem-se que

$$\det(A) = (-1)^k \times \det(U) = (-1)^k \times \text{produto dos pivôs}$$

Sendo k o número de trocas de posição entre linhas durante a fase de eliminação.

Exemplo – 4.8

Na decomposição LU, com pivotação parcial, da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

foram obtidos os fatores L e U

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,75 & 1 & 0 \\ 0,25 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 3,25 \\ 0 & 0 & 4,375 \end{bmatrix}$$

Com duas trocas de posição entre linhas na fase de eliminação. Sendo assim:

$$\det(A) = \det(U) = (-1)^2 \times (4) \times (-4) \times (4,375) = -70$$

Os itens 4.2.6 e 4.2.7, a seguir, tratam de duas aplicações do Método da Decomposição LU que consideram a situação na qual se deseja resolver vários sistemas de equações lineares que possuem em comum a matriz dos coeficientes e têm termos independentes diferentes.

4.2.6 – Refinamento da solução de um sistema de equações lineares simultâneas

Quer utilize-se a técnica de pivotação ou não, os erros de arredondamento têm algum efeito nos resultados. Por este motivo, tão logo tenha sido obtida uma solução, faz-se necessária a utilização de uma técnica de refinamento que, normalmente, reduzirá os erros de arredondamento.

Sendo assim, admita-se que:

- (i) Um sistema de equações, $A \cdot x = b$ foi resolvido, utilizando-se o método da decomposição LU e foi obtida uma solução aproximada, dada por um vetor x^0 .
- (ii) A solução exata, que se deseja determinar, é um vetor x^1 .
- (iii) Δ^0 é um vetor de correção a ser feita em x^0 de modo a obter x^1 .

Portanto, tem-se que

$$x^1 = x^0 + \Delta^0 \text{ e } A \cdot x^1 = b \Leftrightarrow A \cdot (x^0 + \Delta^0) = b \Leftrightarrow A \cdot \Delta^0 = b - A \cdot x^0$$

De acordo com 4.8, $R^0 = b - A.x^0$ é o vetor resíduo produzido pela solução aproximada x^0 . Sendo assim

$$A \Delta^0 = R^0$$

Tem-se, então, um sistema de equações lineares simultâneas com a matriz dos coeficientes idêntica à de $A.x = b$. Como $A = LU$ então

$$L.U.\Delta^0 = R^0$$

Fazendo $U.\Delta^0 = Y$ tem-se $L.Y = R^0$. Para determinar Δ^0 basta resolver, pela ordem,

$$L.Y = R^0 \quad (4.34)$$

que é um sistema de equações lineares simultâneas triangular inferior) e

$$U.\Delta^0 = Y \quad (4.35)$$

que é um sistema de equações lineares simultâneas triangular superior.

Resolvendo 4.35 e, a seguir, 4.34 fica determinado o vetor Δ^0 . Feita a correção em x^0 é obtido o vetor x^1 e calculado o vetor resíduo R^1 .

Este processo pode, naturalmente, ser repetido até que se obtenha um erro que, por algum critério, possa ser considerado suficientemente pequeno.

Exemplo – 4.9

O sistema de equações

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 19 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 11 \end{aligned}$$

foi resolvido utilizando-se o método da decomposição LU com pivotação parcial. Foram obtidas as matrizes:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,67 & 1 & 0 \\ -0,33 & 0,42 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 0 & 6,33 & 3 \\ 0 & 0 & 2,74 \end{bmatrix}$$

e o vetor de pivotação $P^{(1)} = [2 \ 1 \ 3]^t$.

Como uma solução foi obtido o vetor $x^0 = [1,9731 \ -0,9738 \ 4,9647]^t$, que produziu o vetor residual $R^0 = [-0,0601 \ 0,0001 \ 0,0713]^t$. Faça um refinamento da solução obtida.

Solução

→ Resolução de $LY = R^0$

Aplicando $P = [2 \ 1 \ 3]^t$ em R^0 obtém-se $R^0 = [0,0001 \ -0,0601 \ 0,0713]^t$. Sendo assim $Y = [0,0001 \ -0,0601 \ 0,0964]^t$.

→ Resolução de $U\Delta^0 = Y$

É obtido $\Delta^0 = [0,0268 \ -0,0262 \ 0,0352]^t$

Como

$$x^1 = x^0 + \Delta^0 \Rightarrow x^1 = [1,9999 \ -1,0000 \ 4,9999]^t$$

Esta solução produz o vetor resíduo $R^1 = [-0,0001 \ 0,0003 \ 0,0003]^t$.

Considerando-se R^1 , verifica-se que x^1 é uma solução que apresenta uma precisão maior que x^0 . De fato, tem-se para x^0 que:

$$\varepsilon^0 = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i| = \max_{1 \leq i \leq 3} \{ |-0,0601|, |0,0001|, |0,0713| \} = 0,0713$$

e, para x^1

$$\varepsilon^1 = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i| = \max_{1 \leq i \leq 3} \{ |-0,0001|, |0,0003|, |0,0003| \} = 0,0003$$

A solução x^1 produz um resíduo menor.

4.2.7 - Determinação da inversa de uma matriz

Seja A uma matriz quadrada não singular, isto é, $\det(A) \neq 0$, e $x = A^{-1}$ a sua matriz inversa. Sendo assim, tem-se que $A \cdot x = I$. O objetivo deste texto é mostrar como obter x utilizando o Método da Decomposição LU. Para efeito de desenvolvimento, seja A uma matriz de ordem 3. Portanto, tem-se que:

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} & \mathbf{x} & & \mathbf{I} \end{matrix}$$

Fazendo o produto, são obtidos os três sistemas de equações a seguir.

$$\begin{matrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 1 & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} = 0 & a_{11}x_{13} + a_{12}x_{23} + a_{13}x_{33} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0 & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} = 1 & a_{21}x_{13} + a_{22}x_{23} + a_{23}x_{33} = 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = 0 & a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} = 0 & a_{31}x_{13} + a_{32}x_{23} + a_{33}x_{33} = 1 \end{matrix}$$

Observe-se que são três sistemas de equações que têm em comum a matriz dos coeficientes diferindo, apenas, na matriz dos coeficientes.

São sistemas de equações da forma $A \cdot x^i = B^i$, $i = 1, 2, 3$, onde x^i é a i -ésima coluna de x e B^i é a i -ésima coluna de I . Como $A = L \cdot U$, então $L \cdot U \cdot x^i = B^i$. Resolvem-se, então, os sistemas de equações $L \cdot Y^i = B^i$ e $U \cdot x^i = Y^i$, $i = 1, 2, 3$. A resolução de cada um destes sistemas de equações produz uma coluna da matriz x .

Exemplo – 4.10

Utilizando o Método da Decomposição LU determine a inversa da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -0,2 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 3,6 \end{bmatrix}$$

Retenha nos cálculos três casas decimais.

Solução

Determinação da **primeira coluna** de X :

$$LY^1 = B^1, \text{ onde } B^1 = [1 \ 0 \ 0]^t \rightarrow Y^1 = [1 \ -2 \ -1,4]^t$$

$$UX^1 = Y^1 \rightarrow X^1 = [0,277 \ 0,167 \ -0,389]^t.$$

Determinação da **segunda coluna** de X :

$$LY^2 = B^2, \text{ onde } B^2 = [0 \ 1 \ 0]^t \rightarrow Y^2 = [0 \ 1 \ 0,2]^t$$

$$UX^2 = Y^2 \rightarrow X^2 = [0,388 \ -0,166 \ 0,056]^t$$

Determinação da **terceira coluna** de X :

$$LY^3 = B^3, \text{ onde } B^3 = [0 \ 0 \ 1]^t \rightarrow Y^3 = [0 \ 0 \ 1]^t$$

$$UX^3 = Y^3 \rightarrow X^3 = [-0,056 \ 0,167 \ 0,278]^t$$

Logo, a matriz inversa de A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,277 & 0,388 & -0,056 \\ 0,167 & -0,166 & 0,167 \\ -0,389 & 0,056 & 0,278 \end{bmatrix}$$

Observe-se que, para determinar a inversa de uma matriz de terceira ordem, foi necessário resolver três sistemas de equações lineares simultâneas de ordem três. Sendo assim, con-

clui-se que, para determinar a inversa de uma matriz de ordem n , é necessária a resolução de n sistemas de equações lineares simultâneas de ordem n .

5 - Métodos iterativos

5.1 - Teoria Geral dos Métodos Iterativos

Uma das idéias fundamentais em Cálculo Numérico é a da iteração ou aproximação sucessiva. Existe um grande número de métodos numéricos, para resolver os mais variados tipos de problemas, que são processos iterativos. Como o próprio nome já diz, esses métodos se caracterizam pela **aplicação de um procedimento de forma repetida**, ou seja, repetir um determinado cálculo várias vezes, obtendo-se a cada repetição, ou iteração, um resultado mais preciso que aquele obtido na iteração anterior.

Uma importante classe é a dos métodos iterativos estacionários de grau um, nos quais o resultado obtido em cada iteração é uma função, somente, do resultado da iteração anterior. Se um problema, P , tem uma solução S , então é gerada uma seqüência de aproximações, ou de estimativas, $\{S^k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$; tal que:

$$S^k = \varphi(P, S^{k-1}), k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.1)$$

Sendo que a expressão 5.1 é a função de iteração do método iterativo.

Definição 5.1

Um método iterativo é dito estacionário se a função de iteração é, sempre, a mesma em todas as iterações. Caso ela se modifique é dito não estacionário.

Definição 5.2

Um método iterativo é dito de grau g se, para obter uma estimativa, são necessárias g estimativas anteriores da solução do problema, ou seja, a função de iteração é da forma:

$$S^k = \varphi(P, S^{k-1}, S^{k-2}, \dots, S^{k-g}); k = g, g + 1, g + 2, \dots \quad (5.2)$$

Por exemplo:

$$p = 1 \Rightarrow S^0 = \varphi(P) \text{ e } S^k = \varphi(P, S^{k-1}), k = 1, 2, \dots$$

$$p = 2 \Rightarrow S^0 = \varphi(P), S^1 = \varphi(P, S^0) \text{ e } S^k = \varphi(P, S^{k-1}, S^{k-2}), k = 2, 3, \dots$$

Os aspectos tratados a seguir estão, sempre, presentes nos processos iterativos estacionários de grau um independentemente do problema a ser resolvido.

Estimativa inicial

Como, em cada iteração, é necessário utilizar o resultado da iteração anterior, então, a fim de se iniciar um processo iterativo, é preciso ter uma estimativa inicial para a solução do problema. Essa estimativa pode ser conseguida de diferentes formas, conforme o problema que se deseja resolver.

Função de iteração

Uma função de iteração, da forma 5.1, por meio da qual se constrói uma seqüência de estimativas para a solução do problema.

Convergência

É preciso que o método iterativo gere uma seqüência que convirja para a solução do problema. Isto significa que o resultado obtido em uma iteração deve estar mais próximo da solução do que o anterior. Essa convergência nem sempre é garantida em um processo numérico.

Critério de Parada

Obviamente não se pode repetir um processo numérico de forma indefinida. É preciso pará-lo em um determinado instante. Para isto, deve ser utilizado um certo critério, que vai depender do problema a ser resolvido, por meio do qual é tomada a decisão quanto à finalização do processo. Este critério de parada envolve a precisão desejada na solução do problema, e um número máximo de iterações.

5.2 - Métodos Iterativos para a resolução de sistemas de equações lineares simultâneas

Para determinar a solução de um sistema de equações lineares por meio de um método iterativo é preciso transformá-lo em um outro sistema linear que possibilite a definição de um processo iterativo. Além disto, o sistema linear obtido após a transformação deve ser equivalente ao sistema original, ou seja, ambos devem ter a mesma solução.

Sendo assim, dado um sistema linear $A.x = b$, ele é transformado em um sistema linear equivalente da forma

$$x = M.x + c = \varphi(x) \quad (5.3)$$

Onde:

M é uma matriz com dimensões $n \times n$

c é um vetor com dimensões $n \times 1$

A função $\varphi(x)$ é a função de iteração que, no caso, é dada na forma matricial.

A seguir, tomando-se uma aproximação inicial, $x^{(0)}$, para x , constrói-se uma seqüência iterativa de vetores:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= M.x^{(0)} + c = \varphi(x^{(0)}) \\ x^{(2)} &= M.x^{(1)} + c = \varphi(x^{(1)}) \\ &\vdots \\ x^{(k)} &= M.x^{(k-1)} + c = \varphi(x^{(k-1)}), k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

A expressão 5.4 é a forma geral dos métodos iterativos, do tipo estacionário de grau um, que serão tratados nesta seção, sendo que M é a **matriz de iteração**.

Definição 5.3

Se para qualquer estimativa inicial $x^{(0)}$, a sucessão $\{x^k\}$, obtida de 5.4, convergir para um limite independente de $x^{(0)}$, então o **método iterativo** diz-se **convergente**.

Definição 5.4

Se os sistemas de equações $A.x = b$ e $(I - M).x = c$ possuírem a mesma solução, então o **método iterativo** consubstanciado por 5.4 é dito **consistente**.

Proposição 5.1

Seja $\det(A) \neq 0$. O método iterativo proposto em 5.4 é consistente se, e somente se,

$$(I - M).A^{-1}.b = c$$

Prova

$$\text{Sendo } x = M.x + c \Rightarrow x - M.x = c \Rightarrow (I - M).x = c \dots (1)$$

$$A.x = b \Rightarrow x = A^{-1}.b \dots (2)$$

Substituindo (2) em (1) vem que $(I - M).A^{-1}.b = c$

c.q.d.

Sendo assim, é interessante que os métodos iterativos sejam, simultaneamente, convergentes e consistentes.

Crítério de parada

O processo iterativo é finalizado quando se obtém $x^{(k)}$ tal que $\max |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$, $i = 1, 2, \dots, n$; seja menor ou igual a uma precisão estabelecida e, então, $x^{(k)}$ é tomado como uma aproximação para a solução do sistema de equações; ou quando for atingido um número máximo de iterações estabelecido.

5.3 - Método de Jacobi

5.3.1 – Formulação algébrica

Seja um sistema de equações lineares da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (5.5)$$

Se $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, explicita-se uma incógnita em cada equação (ou seja, faz-se a separação pela diagonal da matriz de coeficientes) e estabelece-se o esquema iterativo a seguir.

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\ &\vdots \\ x_n^{(k)} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Se assim, dada uma aproximação inicial $x^{(0)}$, o Método de Jacobi consiste em obter uma seqüência $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(k)}$, por meio da relação recursiva:

$$x^{(k)} = M \cdot x^{(k-1)} + c \quad (5.7)$$

Onde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$c = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 5.1

Resolva o sistema de equações a seguir utilizando o Método de Jacobi com precisão 0,050, um máximo de 5 iterações e $x^0 = [0 \ 0 \ 0]^t$.

$$\begin{aligned} 8.x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 - 7.x_2 + 2.x_3 &= -4 \\ 2.x_1 + x_2 + 9.x_3 &= 12 \end{aligned}$$

Solução

A função de iteração é:

$$\begin{cases} x_1^k = 0,125.(8 - x_2^{k-1} + x_3^{k-1}) \\ x_2^k = -0,143.(-4 - x_1^{k-1} - 2.x_3^{k-1}) \\ x_3^k = 0,111.(12 - 2.x_1^{k-1} - x_2^{k-1}) \end{cases} \quad (5.8)$$

Fazendo os cálculos utilizando 5.8, são obtidos os resultados apresentados no quadro 5.1.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\max_{1 \leq i \leq 3} x_i^k - x_i^{k-1} $
0	0	0	0	-----
1	1,000	0,571	1,333	1,333
2	1,095	1,095	1,048	0,524
3	0,995	1,026	0,969	0,100
4	0,993	0,990	1,000	0,036

Quadro 5.1: Resultados obtidos

Considerando a precisão estabelecida, o vetor $x = [0,993 \ 0,990 \ 1,000]^t$ é uma solução do sistema de equações.

5.3.2 – Formulação matricial

O esquema iterativo de Jacobi pode ser formulado matricialmente. Para obter esta formulação, considere-se, inicialmente, que 5.6 pode ser escrito da forma dada por 5.9.

$$\begin{aligned} a_{11}.x_1^{(k)} &= b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \\ a_{22}.x_2^{(k)} &= b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)} \\ \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{nn}.x_n^{(k)} &= b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Sejam, então, as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^k = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^{k-1} = \begin{bmatrix} x_1^{k-1} \\ x_2^{k-1} \\ \vdots \\ x_n^{k-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Sendo que \mathbf{A} é a matriz dos coeficientes, \mathbf{L} é uma matriz que contém a parte estritamente triangular inferior de \mathbf{A} , \mathbf{U} é uma matriz que contém a parte estritamente triangular superior de \mathbf{A} e \mathbf{D} é uma matriz que contém a diagonal de \mathbf{A} .

Uma matriz é estritamente triangular, inferior ou superior, quando os elementos da diagonal principal também são nulos.

Podemos verificar, facilmente, que:

$$(i) \quad \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U} = \mathbf{A} \quad (5.12)$$

$$(ii) \quad \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x_1^k \\ a_{22} \cdot x_2^k \\ \vdots \\ a_{nn} \cdot x_n^k \end{bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}^k \quad (5.13)$$

$$(iii) \quad \begin{bmatrix} b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \\ b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)} \\ \vdots \\ b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)} \end{bmatrix} = \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x}^{k-1} \quad (5.14)$$

Considerando 5.13 e 5.14, tem-se que 5.9 pode ser reescrito na forma:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}^k = \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x}^{k-1} \quad (5.15)$$

Multiplicando ambos os termos de 5.15 pela inversa da matriz diagonal vem:

$$\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}^k = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{x}^{k-1}$$

Portanto, a formulação matricial do esquema iterativo de Jacobi é:

$$x^k = -D^{-1} \cdot (L + U) \cdot x^{k-1} + D^{-1} \cdot b \quad (5.16)$$

Ou, então

$$x^k = M \cdot x^{k-1} + c \quad (5.17)$$

Onde

$$M = -D^{-1} \cdot (L + U) \quad (5.18)$$

$$c = D^{-1} \cdot b \quad (5.19)$$

Exemplo 5.2

Resolva o sistema de equações a seguir utilizando o método de Jacobi na sua formulação matricial com precisão 0,050; um máximo de 10 iterações e $x^0 = [0 \ 0 \ 0]^t$.

$$4 \cdot x_1 - x_2 + x_3 = 19$$

$$x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 14$$

$$x_1 + x_2 - 5 \cdot x_3 = -6$$

Solução

Tem-se que:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 19 \\ 14 \\ -6 \end{bmatrix}$$

É trivial verificar que

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,333 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2 \end{bmatrix}$$

Então

$$M = -D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} -0,25 & 0 & 0 \\ 0 & -0,333 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & -0,25 \\ -0,333 & 0 & 0,333 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c = D^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,333 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19 \\ 14 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,75 \\ 4,667 \\ 1,2 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, o esquema iterativo é:

$$x^k = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & -0,25 \\ -0,333 & 0 & 0,333 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \cdot x^{k-1} + \begin{bmatrix} 4,75 \\ 4,667 \\ 1,2 \end{bmatrix}$$

As iterações produzem os resultados a seguir.

$$x^1 = \begin{bmatrix} 4,750 \\ 4,667 \\ 1,200 \end{bmatrix} \therefore x^2 = \begin{bmatrix} 5,617 \\ 3,484 \\ 3,083 \end{bmatrix} \therefore x^3 = \begin{bmatrix} 4,850 \\ 3,823 \\ 3,020 \end{bmatrix} \therefore x^4 = \begin{bmatrix} 4,951 \\ 4,058 \\ 2,935 \end{bmatrix} \therefore x^5 = \begin{bmatrix} 5,031 \\ 3,996 \\ 3,002 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x^6 = \begin{bmatrix} 4,998 \\ 3,991 \\ 3,005 \end{bmatrix}$$

As diferenças entre as iterações consecutivas são dadas pelos vetores:

$$|x^2 - x^1| = \begin{bmatrix} 0,867 \\ 1,183 \\ 1,883 \end{bmatrix} \quad |x^3 - x^2| = \begin{bmatrix} 0,767 \\ 0,339 \\ 0,063 \end{bmatrix} \quad |x^4 - x^3| = \begin{bmatrix} 0,101 \\ 0,005 \\ 0,003 \end{bmatrix} \quad |x^5 - x^4| = \begin{bmatrix} 0,080 \\ 0,062 \\ 0,067 \end{bmatrix}$$

$$|x^6 - x^5| = \begin{bmatrix} 0,032 \\ 0,005 \\ 0,003 \end{bmatrix} < 0,050$$

Portanto, para a precisão estabelecida, o vetor $x^6 = [4,998; 3,991; 3,005]^t$ é uma solução.

Proposição 5.2

O Método de Jacobi, dado por 5.14 é consistente.

Prova

Considerando a proposição 5.1, deve ser demonstrado que $(I - M) \cdot A^{-1} \cdot b = c$. Com efeito.

$$\begin{aligned} (I - M) \cdot A^{-1} \cdot b &= [I + D^{-1} \cdot (L + U)] \cdot A^{-1} \cdot b \\ &= [D^{-1} \cdot D + D^{-1} \cdot (L + U)] \cdot A^{-1} \cdot b \\ &= D^{-1} \cdot (D + L + U) \cdot A^{-1} \cdot b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= D^{-1}.A.A^{-1}.b \\
 &= D^{-1}.b \\
 &= c
 \end{aligned}$$

c.q.d.

5.4 - Método de Gauss-Seidel

5.4.1 – Formulação algébrica

Assim como no Método de Jacobi o sistema de equações lineares $A.x = b$ é escrito na forma equivalente:

$$x = M.x + c$$

por meio da separação diagonal da matriz dos coeficientes e o processo iterativo de atualização é seqüencial, componente por componente. A diferença é que, no momento de realizar-se a atualização de uma das componentes do vetor numa determinada iteração, são utilizadas as componentes já atualizadas na iteração atual, com as restantes não atualizadas da iteração anterior. Por exemplo, ao se calcular a componente $x_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \dots, n$; da iteração (k), utilizam-se as componentes já atualizadas $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{j-1}^{(k)}$ com as componentes ainda não atualizadas da iteração anterior $x_{j+1}^{(k-1)}, x_{j+2}^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}$. Portanto, tem-se o esquema iterativo a seguir.

$$\begin{aligned}
 x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - a_{14}x_4^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\
 x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - a_{24}x_4^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\
 x_3^{(k)} &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k-1)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k-1)}) \\
 &\vdots \\
 x_n^{(k)} &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - a_{n3}x_3^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)})
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Exemplo 5.3

Resolva o sistema de equações a seguir utilizando o Método de Gauss-Seidel com precisão 0,050, um máximo de 5 iterações e $x^0 = [0 \ 0 \ 0]^t$.

$$\begin{aligned} 8.x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 - 7.x_2 + 2.x_3 &= -4 \\ 2.x_1 + x_2 + 9.x_3 &= 12 \end{aligned}$$

Solução

A função de iteração é dada por:

$$\begin{cases} x_1^k = 0,125.(8 - x_2^{k-1} + x_3^{k-1}) \\ x_2^k = -0,143.(-4 - x_1^k - 2.x_3^{k-1}) \\ x_3^k = 0,111.(12 - 2.x_1^k - x_2^k) \end{cases}$$

fazendo os cálculos utilizando 5.9, são obtidos os resultados apresentados no quadro 5.2.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\max_{1 \leq i \leq 3} x_i^k - x_i^{k-1} $
0	0	0	0	-----
1	1,000	0,714	1,032	1,032
2	1,041	1,014	0,990	0,300
3	0,997	0,996	1,002	0,044

Quadro 5.2: Resultados obtidos

Considerando a precisão estabelecida, o vetor $x = [0,997 \ 0,996 \ 1,002]^t$ é uma solução do sistema de equações.

É de se esperar que o Método de Gauss-Seidel gere uma seqüência que converge mais rápido para a solução do sistema de equações do que aquela gerada pelo Método de Jacobi, uma vez que faz a atualização imediata dos dados. Embora isto ocorra com freqüência, o fato não pode ser generalizado. Há casos em que há convergência quando se utiliza um método e quando se utiliza o outro não.

5.4.2 – Formulação matricial

Para obter esta formulação, considere-se, inicialmente, que 5.20 pode ser escrito da forma dada por 5.21.

$$\begin{aligned}
 a_{11}.x_1^{(k)} &= b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \\
 a_{22}.x_2^{(k)} &= b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)} \\
 \vdots & \\
 a_{nn}.x_n^{(k)} &= b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Considerando as matrizes 5.10 e 5.11 tem-se:

$$\begin{bmatrix}
 b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \\
 b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)} \\
 \vdots \\
 b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}
 \end{bmatrix} = \mathbf{b} - \mathbf{L}.\mathbf{x}^k - \mathbf{U}.\mathbf{x}^{k-1} \tag{5.22}$$

Tendo em vista 5.13 e 5.22 pode-se escrever 5.21 na forma:

$$\mathbf{D}.\mathbf{x}^k = \mathbf{b} - \mathbf{L}.\mathbf{x}^k - \mathbf{U}.\mathbf{x}^{k-1} \tag{5.23}$$

De onde vem que

$$\mathbf{D}.\mathbf{x}^k + \mathbf{L}.\mathbf{x}^k = \mathbf{b} - \mathbf{U}.\mathbf{x}^{k-1} \Rightarrow (\mathbf{D} + \mathbf{L}).\mathbf{x}^k = \mathbf{b} - \mathbf{U}.\mathbf{x}^{k-1} \tag{5.24}$$

Multiplicando ambos os termos de 5.24 pela inversa da matriz $(\mathbf{D} + \mathbf{L})$ vem:

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}.(\mathbf{D} + \mathbf{L}).\mathbf{x}^k = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}.[\mathbf{b} - \mathbf{U}.\mathbf{x}^{k-1}]$$

Sendo assim

$$\mathbf{x}^k = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}.\mathbf{b} - (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}.\mathbf{U}.\mathbf{x}^{k-1}$$

Portanto, a formulação matricial do esquema iterativo de Gauss-Seidel é:

$$\mathbf{x}^k = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}.\mathbf{U}.\mathbf{x}^{k-1} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}.\mathbf{b} \tag{5.25}$$

Ou, então

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{M}.\mathbf{x}^{k-1} + \mathbf{c} \tag{5.26}$$

Onde

$$\mathbf{M} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}.\mathbf{U} \tag{5.27}$$

$$\mathbf{c} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}.\mathbf{b} \tag{5.28}$$

Na prática, a formulação 5.25 não é utilizada, uma vez que exige a determinação da inversa da matriz $(D + L)$. Ao invés, é utilizada uma formulação obtida considerando 5.23 e multiplicando os seus dois membros pela inversa da matriz D . Tem-se, então, que:

$$D^{-1}.D.x^k = D^{-1}.b - D^{-1}.L.x^k - D^{-1}.U.x^{k-1} \quad (5.29)$$

$$x^k = -D^{-1}.L.x^k - D^{-1}.U.x^{k-1} + D^{-1}.b \quad (5.29)$$

O resultado apresentado por 5.29 é mais simples de utilizar do que 5.25, uma vez que requer a inversa da matriz D , que é uma matriz diagonal. É simples verificar que, para obter a inversa de uma matriz diagonal, basta inverter os seus elementos diagonais.

Observe-se, ainda, que a formulação matricial dada por 5.29 leva à formulação algébrica apresentada em 5.20.

Exemplo 5.4

Resolva o sistema de equações a seguir utilizando o método de Gauss-Seidel na formulação matricial dada por 5.25 com precisão 0,050; um máximo de 5 iterações e $x^0 = [0 \ 0 \ 0]^t$.

$$4.x_1 - x_2 + x_3 = 19$$

$$x_1 + 3.x_2 - x_3 = 14$$

$$x_1 + x_2 - 5.x_3 = -6$$

Solução

Tem-se que:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 19 \\ 14 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Pode ser mostrado que:

$$(D + L)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ -0,083 & 0,333 & 0 \\ 0,033 & 0,067 & -0,2 \end{bmatrix}$$

Então

$$M = -(D + L)^{-1} \cdot U = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & -0,25 \\ 0 & -0,083 & 0,416 \\ 0 & 0,033 & 0,034 \end{bmatrix} \quad c = (D + L)^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 4,75 \\ 3,085 \\ 2,765 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, o esquema iterativo é:

$$x^k = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 & -0,25 \\ 0 & -0,083 & 0,416 \\ 0 & 0,033 & 0,034 \end{bmatrix} \cdot x^{k-1} + \begin{bmatrix} 4,75 \\ 3,085 \\ 2,765 \end{bmatrix}$$

As iterações produzem os resultados a seguir.

$$x^1 = \begin{bmatrix} 4,750 \\ 3,085 \\ 2,765 \end{bmatrix} \therefore x^2 = \begin{bmatrix} 4,830 \\ 3,979 \\ 2,961 \end{bmatrix} \therefore x^3 = \begin{bmatrix} 5,004 \\ 3,986 \\ 2,997 \end{bmatrix} \therefore x^4 = \begin{bmatrix} 4,997 \\ 4,001 \\ 2,998 \end{bmatrix}$$

As diferenças entre as iterações consecutivas são dadas pelos vetores:

$$|x^2 - x^1| = \begin{bmatrix} 0,080 \\ 0,894 \\ 0,196 \end{bmatrix} \quad |x^3 - x^2| = \begin{bmatrix} 0,174 \\ 0,007 \\ 0,036 \end{bmatrix} \quad |x^4 - x^3| = \begin{bmatrix} -0,007 \\ 0,014 \\ 0,001 \end{bmatrix}$$

Portanto, para a precisão estabelecida, o vetor $x^4 = [4,997; 4,001; 2,998]^t$ é uma solução.

Proposição 5.3

O Método de Gauss-Seidel, dado por 5.25 é consistente.

Prova

Considerando a proposição 5.1, deve ser demonstrado que $(I - M) \cdot A^{-1} \cdot b = c$. Com efeito.

$$\begin{aligned} (I - M) \cdot A^{-1} \cdot b &= [I + (D + L)^{-1} \cdot U] \cdot A^{-1} \cdot b \\ &= [(D + L)^{-1} \cdot (D + L) + (D + L)^{-1} \cdot U] \cdot A^{-1} \cdot b \\ &= (D + L)^{-1} \cdot (D + L + U) \cdot A^{-1} \cdot b \\ &= (D + L)^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} \cdot b \\ &= (D + L)^{-1} \cdot b \\ &= c \end{aligned}$$

c.q.d.

5.5 - Convergência dos métodos iterativos

Embora a ordem das equações em um sistema linear não exerça qualquer influência com relação à existência de solução, quando se trata da utilização de um método iterativo ela é relevante uma vez que define a função de iteração.

Para mostrar este fato considera-se no exemplo 5.5 o sistema de equações utilizado nos exemplos 5.1 e 5.3, porém trocando a ordem das equações um e dois.

Exemplo 5.5

Resolva o sistema de equações a seguir utilizando o Método de Gauss-Seidel. Faça os cálculos com duas casas decimais e tome $x^0 = [0 \ 0 \ 0]^t$.

$$\begin{aligned} x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 8x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 &= 12 \end{aligned}$$

Solução

A função de iteração é:

$$\begin{cases} x_1^k = -4 + 7x_2^{k-1} - 2x_3^{k-1} \\ x_2^k = 8 - 8x_1^k + x_3^{k-1} \\ x_3^k = 0,111 \cdot (12 - 2x_1^k - x_2^k) \end{cases} \quad (5.30)$$

Fazendo os cálculos utilizando 5.9, são obtidos os resultados apresentados no quadro 5.3.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\max_{1 \leq i \leq 3} x_i^k - x_i^{k-1} $
0	0	0	0	-----
1	-4	40	-2,22	40
2	280,44	-2.237,74	187,46	2.277,74
3	-16.043,11	128.540,32	-10.705,07	130.778,06

Quadro 5.3: Resultados obtidos

Observa-se, claramente, que não está ocorrendo convergência. Ocorre que, com a troca de posição entre as equações um e dois, a função de iteração se modificou, basta comparar 5.9 e 5.10. A função de iteração 5.10 gera uma seqüência que não é convergente.

5.6 - Critério de convergência

Para os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel são válidos os critérios de convergência a seguir.

5.6.1 - Critério das linhas

É condição suficiente para que os métodos iterativos gerem uma seqüência que converge para a solução de um sistema de equações, qualquer que seja a aproximação inicial x^0 , que

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Além do mais, quanto mais próxima de zero estiver a relação $\frac{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$ mais rápida será a convergência.

5.6.2 - Critério das colunas

É condição suficiente para que os métodos iterativos gerem uma seqüência que converge para a solução de um sistema de equações, qualquer que seja a aproximação inicial x^0 , que

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Além do mais, quanto mais próxima de zero estiver a relação $\frac{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|}{|a_{jj}|}$ mais rápida será a convergência.

Observe-se que estes dois critérios envolvem **condições que são apenas suficientes**, se pelo menos uma delas for satisfeita, então está assegurada a convergência, entretanto se nenhuma das duas for satisfeita nada se pode afirmar.

Os exemplos a seguir apresentam sistemas de equações que podem ser resolvidos, somente, por meio de um dos dois métodos iterativos abordados.

Exemplo 5.4

Este exemplo trata de um sistema de equações lineares que pode ser resolvido, somente, por meio do Método de Jacobi. Seja o sistema de equações a seguir e $x^0 = [0 \ 0 \ 0]^t$.

$$\begin{aligned} x_1 + 2.x_2 - 2.x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2.x_1 + 2.x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Solução

(a) Aplicando o Método de Jacobi, tem-se que a função de iteração é:

$$\begin{cases} x_1^k = 1 - 2.x_2^{k-1} + 2.x_3^{k-1} \\ x_2^k = 1 - x_1^{k-1} - x_3^{k-1} \\ x_3^k = 1 - 2.x_1^{k-1} - 2.x_2^{k-1} \end{cases} \quad (5.31)$$

Fazendo os cálculos utilizando 5.31, são obtidos os resultados apresentados no quadro 5.4.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\max_{1 \leq i \leq 3} x_i^k - x_i^{k-1} $
0	0	0	0	-----
1	1	1	1	1
2	1	- 1	- 3	4
3	- 3	3	1	4
4	- 3	3	1	0

Quadro 5.4: Resultados obtidos

Observe-se que foi obtida a solução exata.

(b) Aplicando, agora, o Método de Gauss-Seidel.

$$\begin{cases} x_1^k = 1 - 2.x_2^{k-1} + 2.x_3^{k-1} \\ x_2^k = 1 - x_1^k - x_3^{k-1} \\ x_3^k = 1 - 2.x_1^k - 2.x_2^k \end{cases} \quad (5.32)$$

Fazendo os cálculos utilizando 5.32, são obtidos os resultados apresentados no quadro 5.5.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\max_{1 \leq i \leq 3} x_i^k - x_i^{k-1} $
0	0	0	0	-----
1	1	0	- 1	1
2	- 1	3	- 3	3
3	- 11	15	- 7	12
4	- 43	51	- 15	36
5	- 131	147	- 31	96

Quadro 5.5: Resultados obtidos

Neste caso, verifica-se que o Método de Gauss-Seidel gera uma seqüência que não converge para a solução do sistema de equações.

Exemplo 5.5

Este exemplo trata de um sistema de equações lineares que pode ser resolvido, somente, por meio do Método de Gauss-Seidel. Seja $x^0 = [0 \ 0 \ 0]^t$.

$$0,5x_1 + 0,6x_2 + 0,3x_3 = 0,2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$0,4x_1 - 0,4x_2 + x_3 = -0,6$$

Solução

(a) Aplicando o Método de Jacobi, tem-se que a função de iteração é:

$$\begin{cases} x_1^k = 2 \cdot (0,2 - 0,6x_2^{k-1} - 0,3x_3^{k-1}) \\ x_2^k = -x_1^{k-1} - x_3^{k-1} \\ x_3^k = -0,6 - 0,4x_1^{k-1} + 0,4x_2^{k-1} \end{cases} \quad (5.33)$$

Fazendo os cálculos utilizando 5.33, são obtidos os resultados apresentados no quadro 5.6.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\max_{1 \leq i \leq 3} x_i^k - x_i^{k-1} $
0	0	0	0	-----
1	0,400	0,000	- 0,600	0,600
2	0,760	0,200	- 0,760	0,360
3	0,616	0,000	- 0,824	0,200
4	0,894	0,208	- 0,846	0,278
5	0,658	- 0,048	- 0,875	0,256
6	0,982	0,216	- 0,883	0,324
7	0,670	- 0,100	- 0,906	0,316
8	1,064	0,236	- 0,908	0,394
9	0,661	- 0,156	- 0,931	0,403
10	1,146	0,2700	- 0,927	0,485

Quadro 5.6: Resultados obtidos

Observe-se que não há convergência.

(b) Aplicando, agora, o Método de Gauss-Seidel.

$$\begin{cases} x_1^k = 2 \cdot (0,2 - 0,6x_2^{k-1} - 0,3x_3^{k-1}) \\ x_2^k = -x_1^k - x_3^{k-1} \\ x_3^k = -0,6 - 0,4x_1^k + 0,4x_2^k \end{cases} \quad (5.34)$$

Fazendo os cálculos utilizando 5.34, são obtidos os resultados apresentados no quadro 5.7.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	$\max_{1 \leq i \leq 3} x_i^k - x_i^{k-1} $
0	0	0	0	-----
1	0,400	- 0,400	- 0,920	0,920
2	1,432	- 0,512	- 1,378	1,032
3	1,841	- 0,463	- 1,522	0,409
4	1,869	- 0,347	- 1,487	0,116
5	1,709	- 0,222	- 1,372	0,160
6	1,490	- 0,118	- 1,243	0,219
7	1,287	- 0,044	- 1,132	0,203
8	1,132	0,000	- 1,053	0,155
9	1,031	0,021	- 1,004	0,101
10	0,977	0,027	- 1,980	0,054

Quadro 5.7: Resultados obtidos

Neste caso, verifica-se que o Método de Gauss-Seidel gera uma seqüência que, embora muito lentamente, converge para a solução do sistema de equações.

5.7 - Complexidade dos métodos iterativos

A análise da complexidade (quantidade de operações) requeridas em um método iterativo, em cada iteração, é bastante simples. O que não é trivial é determinar o número exato de operações realizadas por um programa de resolução de sistemas de equações lineares por meio de um método iterativo, pois este depende do critério de parada adotado. Para evitar que se entre em *loop*, realizando operações quando não ocorre convergência, ou quando não se alcança a precisão estabelecida, sempre deve ser adotado como critério de parada, além da precisão desejada, um número máximo de iterações permitido. No pior caso, este será o número de vezes que as iterações serão executadas.

Os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel realizam, por iteração, $(2n^2 - n)$ operações aritméticas: $(n - 1)$ multiplicações de variáveis por coeficientes, $(n - 1)$ somas e uma divisão para cada variável do sistema, totalizando, para cada variável, $(2n - 1)$ operações para cada uma das n variáveis. Para valores de n grandes, o termo de menor grau é dominado pelo termo de maior grau, e o custo dos métodos se torna $2n^2$.

Devido a necessidade de verificar a possível convergência para a solução do sistema, sob pena de não se chegar a um resultado válido em sua resolução, os testes de convergência tornam-se praticamente obrigatórios na resolução iterativa de sistemas de equações lineares e, portanto, devem ser consideradas no custo destes métodos.

O critério das linhas tem um custo de $(n^2 - 2n)$ operações aritméticas, uma vez que são realizadas $(n - 2)$ somas, além disto, são realizadas n comparações para verificar se a ma-

triz dos coeficientes é estritamente diagonal dominante. Para grandes valores de n predominam as n^2 operações aritméticas do critério.

5.8 - Comentários finais

Os Métodos Diretos possuem a vantagem de serem mais gerais e robustos do que os Métodos Iterativos, podendo ser utilizados na resolução de qualquer tipo de sistemas de equações. São processos finitos e, portanto, teoricamente, obtêm a solução de qualquer sistema de equações não singular de equações. Já os métodos iterativos convergem apenas sob determinadas condições.

Os métodos diretos apresentam problemas com erros de arredondamento. Uma forma de minimizar este fato é a utilização de técnicas de pivotamento. Os métodos iterativos envolvem menos erros de arredondamento, visto que a convergência, uma vez garantida, independe da aproximação inicial. Com isso, somente os erros cometidos na última iteração afetam a solução, pois os erros anteriores não levarão à divergência do processo nem à convergência para outro vetor que não a solução.

Os métodos diretos são aplicados na resolução de sistemas de equações densos de porte pequeno a médio. Por sistemas de pequeno porte entende-se uma ordem de até 30, para médio porte, sistemas de ordem até 50. A partir daí tem-se, em geral, sistemas de grande porte. Os métodos iterativos raramente são utilizados para resolver sistemas lineares de pequeno a médio porte, já que o tempo requerido para obter um mínimo de precisão ultrapassa o requerido pelos métodos diretos como, por exemplo, o Método de Gauss. O Método de Gauss requer $(4.n^3 + 9.n^2 - 7.n)/6$ operações aritméticas. Os Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel requerem $(2.n^2 - n)$ operações aritméticas por iteração. Para valores grandes de n , os números de operações aritméticas são aproximadamente

Método de Gauss: $2.n^3/3$

Jacobi e Gauss-Seidel: $2.n^2$ por iteração

Assim, se o número de iterações é menor ou igual a $(n/3)$, então o método iterativo requer menos operações aritméticas.

Como exemplo específico, seja um sistema linear de 100 equações. A eliminação requer 681.550 operações enquanto que, por iteração, são requeridas 900 operações. Para 34, ou menos, iterações a quantidade de operações aritméticas é menor do que no Método de Gauss.. Para 35, ou mais, vale o contrário.

Uma vantagem dos métodos iterativos sobre os diretos é o fato de preservarem os zeros da matriz original Este fato é bastante significativo quando se trata de resolver um sistema de

equações no qual a matriz dos coeficientes é esparsa, ou seja, possui um número grande de elementos nulos. Os métodos iterativos preservam a esparsidade, uma vez que não criam novos elementos não nulos. Os Métodos Diretos baseiam-se em transformações elementares sobre as linhas da matriz dos coeficientes, destruindo a esparsidade da mesma. Isto aumenta tanto o espaço necessário para o armazenamento da matriz dos coeficientes quanto o esforço computacional para a resolução numérica do sistema.

Enfim, é preciso conhecer a natureza do problema para poder escolher qual classe de algoritmo (métodos diretos/iterativos) deve ser utilizada, pois somente assim será possível obter resultados mais precisos e, conseqüentemente, confiáveis.

Para concluir, é apresentada no quadro (5.8) uma comparação entre os Métodos Diretos e Iterativos levando em consideração um conjunto de cinco indicadores.

Item	Método Direto	Método Iterativo
Aplicação	Para a resolução de sistemas de equações densos de porte pequeno a médio.	Para a resolução de sistemas de equações de grande porte, notadamente os esparsos.
Convergência	Se a matriz dos coeficientes não é singular, então a solução é sempre obtida	Há garantia de se obter a solução somente sob certas condições
Número de operações	É possível determinar a priori o número de operações necessárias.	Não é possível determinar a priori a complexidade.
Esparsidade	Destroi a esparsidade da matriz dos coeficientes durante a fase de eliminação.	Preserva a esparsidade da matriz da matriz dos coeficientes.
Erro de arredondamento	Amplia os erros durante os cálculos. A ampliação pode ser minimizada usando técnicas de pivotação.	Os erros de arredondamento não afetam as soluções obtidas em cada iteração. Apenas a solução final pode conter erro.

Quadro 5.8: Comparação entre os Métodos Diretos e Iterativos