UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas

Departamento de Computação

José Álvaro Tadeu Ferreira

Cálculo Numérico

Notas de aulas

Interpolação Polinomial

Ouro Preto

2013

(Última revisão em novembro de 2013)

Sumário

Interpolação polinomial

1 - Introdução

Em geral, dispõe-se de dados que são fornecidos em um conjunto discreto de valores, dentro de um contínuo de possibilidades. Entretanto, pode ser necessário fazer estimativas em pontos que estão entre os valores discretos, ou seja, não constam do conjunto. Ocorre, também, a situação na qual se faz necessária uma versão simplificada de uma função complicada. Ambas as aplicações são conhecidas como *ajuste de curvas*. Há duas abordagens gerais para o ajuste de curvas, as quais se distinguem com base na quantidade de erro associada com os dados.

Primeiro, quando os dados exibirem um grau significativo de erro, a estratégia será determinar uma única curva que represente a tendência geral dos dados. Como cada ponto individual poderá estar incorreto, não será feito qualquer esforço para passar a curva por todos os pontos. Em vez disto, a curva é escolhida para seguir o padrão dos pontos considerados como um grupo. Uma abordagem desta natureza é chamada de *regressão por mínimos quadrados*.

Segundo, quando se souber que os dados são muito precisos, a abordagem básica é ajustar uma curva ou uma série de curvas que passam diretamente por cada um dos pontos. Este tipo de abordagem, que é o objeto deste texto, é chamada de *interpolação*.

Interpolar uma função, y = f(x), em um intervalo finito (a, b), consiste em substituí-la, ou aproximá-la, por outra função, y = g(x). A necessidade de se utilizar este procedimento ocorre, basicamente, quando a função:

a) não é conhecida na sua forma analítica, mas, apenas por meio de um conjunto de pontos (x_i, y_i), i = 0, 1, ..., n; esta situação ocorre com muita freqüência, na prática, quando se trabalha com dados obtidos de forma experimental;

b) é conhecida analiticamente, mas operações como a diferenciação e a integração são difíceis (ou mesmo impossíveis) de realizar, ou seja, a função é de difícil tratamento.

Teoricamente, a função y = g(x) pode ser qualquer, mas o caso mais comumente considerado é aquele em que pertence à classe das funções polinomiais.

A aproximação de funções por polinômios é uma das idéias mais antigas da análise numérica, e ainda das mais utilizadas. É fácil entender a razão. Os polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são, novamente, polinômios, seus zeros podem ser determinados com facilidade, etc. O uso de polinômios interpoladores é importante, por exemplo, para a obtenção de valores intermediários em tabelas, na integração numérica, no cálculo de raízes de equações e na resolução de equações diferenciais ordinárias.

As funções interpolantes polinomiais são as mais populares não só por suas propriedades algébricas, mas, sobretudo, pela justificativa fornecida pelo teorema de aproximação de Weierstrass que, de fato, garante a existência de um polinômio capaz de aproximar uma função *f* tão bem quanto se queira.

Teorema (Weierstrass)

Se *f* é uma função contínua em um intervalo fechado [a, b], então, dado $\xi > 0$, existe alguma função polinomial, *p*, de ordem $n = n(\xi)$, tal que

$$|f(x) - p(x)| < \xi, \text{ para } x \in [a, b]$$

Apesar de justificar a existência da função interpolante polinomial, este teorema não é construtivo, isto é, não fornece modos ou critérios para a sua obtenção.

Neste texto apresentam-se alguns dos procedimentos mais usuais para a obtenção de funções interpolantes polinomiais.

Objetivo

Sendo (x_i, y_i), i = 0, 1, ..., n; pontos, com abscissas distintas, de uma função y = f(x), obter o polinômio, y = p(x) tal que:

$$p(x_i) = f(x_i) = y_i, \; i = 0, 1, ..., n$$

2 - Existência e unicidade do polinômio interpolador

Teorema 2.1

Se (x_i, y_i) i = 0, 1, ..., n; são (n + 1) pontos com abscissas distintas, de uma função, y = f(x), então existe um, e só um, polinômio, y = p(x), de grau máximo n, tal que:

$$p(x_i) = f(x_i) = y_i, \; i = 0, 1, ..., n$$

Demonstração

O objetivo é aproximar uma função, y = f(x), por um polinômio, y = p(x), ou seja, deseja-se obter

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = y$$

tal que $p(x_i) = f(x_i) = y_i$ para todo i = 0, 1, 2, ..., n

Com esta condição, tem-se:

$$p(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + ... + a_1 x_0 + a_0 = y_0$$
$$p(x_1) = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + ... + a_1 x_1 + a_0 = y_1$$
$$...$$
$$p(x_n) = a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + ... + a_1 x_n + a_0 = y_n$$

Que é um sistema de (n + 1) equações lineares com (n + 1) incógnitas a_0, a_1, a_2, ..., a_n. A sua matriz dos coeficientes é dada por:

$$X = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & ... x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & ... x_1 & 1 \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ x_n^n & x_n^{n-1} & ... x_n & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Trata-se de uma ma matriz de Vandermonde. O seu determinante é calculado da seguinte maneira

$$\det(X) = (x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2)\,...\,(x_0 - x_n)\,(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)\,...\,(x_1 - x_n)\,...\,(x_{n-1} - x_n)$$

Como, por condição, x_0, x_1, ..., x_n são valores distintos, então tem-se que o determinante de X é não nulo e o sistema linear admite solução única. Portanto, existe um único polinômio, y = p(x), tal que $p(x_i) = f(x_i) = y_i$, i = 0, 1, ..., n. Conclui-se, ainda, que o polinômio tem grau máximo n, uma vez que os coeficientes, a_i, i = 0, 1, ..., n; podem assumir qualquer valor real, zero inclusive.

3 - Erro de truncamento

Teorema 3.1

Sejam:

(i) (x_i, y_i), i = 0,1, ..., n pontos com abscissas distintas de uma função y = f(x);

(ii) y = f(x) uma função com (n + 1) derivadas contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$.

Então, para cada $x \in [x_0, x_n]$, existe um número $\xi \in (x_0, x_n)$, que depende de x, tal que

$$f(x) - p(x) = E_t(x) = (x - x_0).(x - x_1)\,...\,(x - x_n).\frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!} \qquad (3.1)$$

Onde $f^{n+1}(.)$ é a derivada de ordem (n + 1) de y = f(x) e y = p(x) é o polinômio que a interpola nos pontos (x_i, y_i), i = 0, 1, ..., n.

A expressão (3.1) é chamada de **termo do erro** ou **erro de truncamento**. É o erro que se comete quando se substitui a função pelo polinômio que a interpola, no ponto x.

A importância do Teorema 3.1 é mais teórica do que prática, uma vez que não é possível determinar o ponto ξ. Na prática, para estimar o erro cometido, quando a função é dada analiticamente, é utilizado o corolário a seguir.

Corolário 3.1

Se f(x) e suas derivadas até a ordem (n + 1) são contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$, então:

$$E_t(x) \le \left|(x - x_0).(x - x_1)\ldots(x - x_n)\right|.\frac{M}{(n+1)!} \qquad (3.2)$$

Onde $M = \max\left|f^{n+1}(x)\right|$ no intervalo $[x_0, x_n]$.

Exemplo 3.1

Sabendo-se que os pontos a seguir são da função $f(x) = x.e^{3.x}$, calcular um limitante superior para o erro de truncamento quando se avalia y para x = 0,25.

i	0	1	2
x_i	0,2	0,3	0,4
$f(x_i)$	1,8221	2,4596	3,3201

Solução

De (3.2) tem-se que

$$E_t(x) \le \left|(x - x_0).(x - x_1)\ldots(x - x_n)\right|.\frac{M}{(n+1)!}$$

Onde $M = \max\left|f'''(x)\right|$ no intervalo [0,2; 0,4]. Como $f(x) = x.e^{3.x}$, segue que:

$f'(x) = e^{3.x}(1 + 3.x)$
$f''(x) = e^{3.x}.(6 + 9.x)$
$f'''(x) = 27.e^{3.x}.(1 + x)$

No intervalo [0,2; 0,4], $f'''(x)$ é máxima para x = 0,4. Logo $M = f'''(0,4) = 125,4998$. Sendo assim:

$$E_t(0,25) \le \left|(0,25 - 0,2).(0,25 - 0,3).(0,25 - 0,4)\right|.\frac{125,4998}{3!}$$

$$E_t(0,25) \le 0,0078$$

Note-se que y = p(x) não necessariamente converge para y = f(x) em [a, b] à medida que se aumenta o número de pontos de interpolação. Polinômios interpoladores de grau elevado podem produzir grandes oscilações nos extremos do intervalo, é o Fenômeno de Runge.

Este fenômeno demonstra que polinômios de grau elevado são normalmente pouco recomendáveis para a interpolação porque aumentam o erro em valores próximos aos extremos do intervalo de interpolação e melhoram a aproximação em valores próximos ao centro.
O problema pode ser evitado usando interpolação polinomial por partes com polinômios de grau moderado. Desta forma, pode-se tentar diminuir o erro de interpolação aumentando o número de peças de polinômios usadas, em vez de aumentar o grau do polinômio.
Exemplos típicos: interpolação linear por partes (uma reta para cada par de pontos) e interpolação quadrática por partes (uma parábola para cada três pontos), curvas spline.

4 - Métodos de obtenção do polinômio interpolador

Os vários métodos para a determinação do polinômio interpolador têm em comum o conceito de que um polinômio nada mais é do que uma combinação linear de polinômios. O que difere um método do outro é a forma como este conceito é utilizado, ou seja, a maneira de como o polinômio interpolador é concebido.

4.1 – Método de Lagrange

Neste método, o polinômio, $y = L(x)$, que interpola uma função, $y = f(x)$, em um conjunto de pontos (x_i, y_i), $i = 0, 1, ..., n$ é concebido da forma

$$L(x) = y_0.L_0(x) + y_1.L_1(x) + \cdots + y_n.L_n(x) \qquad (4.1)$$

onde os $L_i(x)$, $i = 0,1, 2, ..., n$.

Para que este modelo resulte em um polinômio interpolador é necessário que

$$\mathbf{L(x_i) = f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, ..., n}$$

Sejam, então

$$L(x_0) = y_0.L_0(x_0) + y_1.L_1(x_0) + y_2.L_2(x_0) + \ldots + y_n.L_n(x_0)$$

Para que $L(x_0) = y_0$ é necessário que

$$L_0(x_0) = 1 \text{ e } L_1(x_0) = L_2(x_0) = \ldots = L_n(x_0) = 0$$

Considere-se agora

$$L(x_1) = y_0.L_0(x_1) + y_1.L_1(x_1) + y_2.L_2(x_1) + \ldots + y_n.L_n(x_1)$$

Para que $L(x_1) = y_1$ é necessário que

$$L_1(x_1) = 1 \text{ e } L_0(x_1) = L_2(x_1) = \ldots = L_n(x_1) = 0$$

Portanto, para que (4.1) seja o polinômio interpolador de $y = f(x)$ nos pontos (x_i, y_i) os $L_i(x)$; $i = 0,1, 2, ..., n$; devem ser tais que

$$L_i(x_i) = 1$$

$$L_i(x_j) = 0;\ i, j = 0,1, 2, ..., n;\ i \neq j$$

Assim, os $L_i(x)$ são polinômios de grau n uma vez que cada um tem n zeros.

Para determinar cada $L_i(x)$, i = 0,1, ..., n; basta considerar que todo x_j, j = 0, 1, ..., n; é um zero de $L_i(x)$ quando $i \neq j$.

Seja a determinação de $L_0(x)$. Tem-se, por condição, que:

$$L_0(x_0) = 1$$

$$L_0(x_j) = 0; \;\; j = 1, 2, ..., n$$

Portanto, conhecendo os zeros de $L_0(x)$, pode-se escrevê-lo na forma fatorada:

$$L_0(x) = c_0.(x - x_1).(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Para determinar o coeficiente c_0 basta considerar o valor numérico de $L_0(x)$ em $x = x_0$ que, por condição, é igual a 1.

$$L_0(x_0) = c_0.(x_0 - x_1).(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n) = 1$$

$$c_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}$$

Tem-se, então, que

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} \tag{4.2}$$

Seja, agora, a determinação de $L_1(x)$. Por condição, tem-se que

$$L_1(x_1) = 1$$

$$L_1(x_j) = 0; \;\; j = 0, 2, ..., n$$

E, então, $L_1(x)$, pode ser escrito na forma

$$L_1(x) = c_1.(x - x_0).(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

De modo análogo ao que foi feito anteriormente, para determinar o coeficiente c_1 basta considerar o valor numérico de $L_1(x)$ em $x = x_1$ que, por condição, é igual a 1, obtendo-se então

$$L_1(x_1) = c_1.(x_1 - x_0).(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n) = 1$$

$$c_1 = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)}$$

Tem-se, então, que

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} \tag{4.3}$$

Considerando os resultados 4.2 e 4.3, conclui-se que

$$\boxed{L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)},\ i = 0, 1, ..., n \quad (4.4)}$$

Exemplo 4.1

Seja y = f(x) uma função dada nos pontos a seguir. Utilizando interpolação polinomial, método de Lagrange, determinar o polinômio que a interpola.

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	4
y_i	4	11	20	44

Solução

O polinômio interpolador é:

$$L(x) = y_0.L_0(x) + y_1.L_1(x) + y_2.L_2(x) + y_3.L_3(x)$$

Seja, então, a obtenção de $L_i(x)$, i = 0, 1, 2, 3

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 1).(x - 2).(x - 4)}{-8} = \frac{x^3 - 7.x^2 + 14.x - 8}{-8}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 0).(x - 2).(x - 4)}{3} = \frac{x^3 - 6.x^2 + 8.x}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 0).(x - 1).(x - 4)}{-4} = \frac{x^3 - 5.x^2 + 4.x}{-4}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 0).(x - 1).(x - 2)}{24} = \frac{x^3 - 3.x^2 + 2.x}{24}$$

Obtém-se, então, que

$$\mathbf{L(x) = x^2 + 6.x + 4}$$

Exemplo 4.2

Sendo y = f(x) uma função conhecida nos pontos:

i	0	1	2
x_i	0,9	1	1,1
y_i	0,6216	0,5403	0,4536

Pede-se:

(i) Utilizando interpolação polinomial, método de Lagrange, estimar o valor de y para x = 1,07.

Solução

O polinômio interpolador é:

$$L(x) = y_0.L_0(x) + y_1.L_1(x) + y_2.L_2(x)$$

Neste item, pede-se para calcular L(1,07) que é dado por:

$$L(1{,}07) = y_0.L_0(1{,}07) + y_1.L_1(1{,}07) + y_2.L_2(1{,}07)$$

Tem-se que

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1).(x - 1{,}1)}{(0{,}9 - 1).(0{,}9 - 1{,}1)} \Rightarrow L_0(1{,}07) = -0{,}1050$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0{,}9).(x - 1{,}1)}{(1 - 0{,}9).(1 - 1{,}1)} \Rightarrow L_1(1{,}07) = 0{,}5100$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0{,}9).(x - 1)}{(1{,}1 - 0{,}9).(1{,}1 - 1)} \Rightarrow L_2(1{,}07) = 0{,}5950$$

Portanto

$L(1{,}07) = (0{,}6216).(-0{,}1050) + (0{,}5403).(0{,}5100) + (0{,}4536).(0{,}5950) \Rightarrow \mathbf{L(1{,}07) = 0{,}4802}$

(ii) Sabendo-se que os pontos dados são relativos à função y = cos(x), estimar o erro de truncamento máximo cometido no item (i).

Solução

Sabe-se que o erro de truncamento máximo cometido é dado por:

$$E_t(x) \le \left|(x - x_0).(x - x_1)\ldots(x - x_n)\right|.\frac{M}{(n+1)!}$$

onde $M = \text{máx}|f^{n+1}(x)|$ no intervalo $[x_0, x_n]$.

Tem-se que $f'''(x) = \text{sen}(x)$, cujo módulo é máximo no intervalo [0,9; 1,1] para x = 1,1 e $f'''(1{,}1) = 0{,}8912 = M$. Sendo assim,

$$E_t(1{,}07) \le |\,(1{,}07 - 0{,}9).(1{,}07 - 1).(1{,}07 - 1{,}1)\,|.\frac{0{,}8912}{3!} \Rightarrow E_t(1{,}07) \le 5{,}3 \times 10^{-5} \cong 0{,}0001$$

4.2 – Método das diferenças divididas

4.2.1 – O operador diferença dividida

Definição 4.1

Dada uma função, y = f(x), a sua primeira derivada é definida como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{4.5}$$

Sendo (x_i, y_i), i = 0, 1, ..., n; um conjunto de pontos da função, então:

$$f'(x_i) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h}$$

Seja

$$x_i + h = x_{i+1} \Rightarrow h = x_{i+1} - x_i$$

Sendo assim

$$f'(x_i) = \lim_{x_i \to x_{i+1}} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{4.6}$$

Definição 4.2

Sendo (x_i, y_i), i = 0, 1, ..., n; um conjunto de pontos, com abscissas distintas, de uma função y = f(x), define-se o operador diferença dividida de primeira ordem como:

$$Dy_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \; i = 0, 1, ..., n-1 \tag{4.7}$$

Observe-se que este operador nada mais é do que uma aproximação do valor numérico da primeira derivada de uma função em um ponto.

Pode ser demonstrado que as diferenças divididas de ordem superior são aproximações para as derivadas de ordem superior.

A diferença dividida de segunda ordem é definida como:

$$D^2y_i = \frac{Dy_{i+1} - Dy_i}{x_{i+2} - x_i}, \; i = 0, 1, ..., n-2 \tag{4.8}$$

A diferença dividida de terceira ordem é definida como:

$$D^3y_i = \frac{D^2y_{i+1} - D^2y_i}{x_{i+3} - x_i}, \; i = 0, 1, ..., n-3 \tag{4.9}$$

Considerando as definições (4.7), (4.8) e (4.9), tem-se que a diferença dividida de ordem k, é definida como:

$$D^k y_i = \frac{D^{k-1} y_{i+1} - D^{k-1} y_i}{x_{i+k} - x_i}, \begin{cases} k = 1, 2, ..., n \\ i = 0, 1, ..., n - k \end{cases} \qquad (4.10)$$

Sendo a diferença dividida de ordem zero definida como:

$$D^0 y_i = y_i,\ i = 0, 1, ..., n \qquad (4.11)$$

4.2.2 – O polinômio interpolador com diferenças divididas[1]

Neste método, o polinômio, $y = p(x)$, que interpola uma função, $y = f(x)$, em um conjunto de pontos (x_i, y_i), $i = 0, 1, ..., n$; é concebido da forma:

$$p(x) = a_0 + a_1.(x - x_0) + a_2.(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n.(x - x_0)(x - x_1) ... (x - x_{n-1}) \qquad (4.12)$$

Tendo em vista que $y = p(x)$ deve ser tal que $p(x_i) = f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, ..., n$
Então

$$p(x_0) = a_0 \Rightarrow a_0 = y_0 = D^0 y_0 \qquad (4.13)$$

$$p(x_1) = y_0 + a_1.(x_1 - x_0) = y_1$$

Vem, então, que

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad (4.14)$$

Tendo em vista a definição 4.7, verifica-se que 4.14 é a diferença dividida de primeira ordem, ou seja

$$a_1 = Dy_0 \qquad (4.15)$$

O polinômio 4.12 deve interpolar $y = f(x)$ no ponto (x_2, y_2). Portanto

$$p(x_2) = y_0 + Dy_0.(x_2 - x_0) + a_2.(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \qquad (4.16)$$

Sabe-se que:

$$D_{Y_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \rightarrow Y_1 - Y_0 = Dy_0(x_1 - x_0)$$

$$D_{Y_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow Y_2 - Y_1 = Dy_1(x_2 - x_1)$$

[1] Contribuição do Professor José Américo Trivellato Messias

Somando-se as duas equações, tem-se:

$$Y_1\text{-}Y_0 + Y_2\text{-}Y_1 = Dy_0(x_1\text{-}x_0) + Dy_1(x_2\text{-}x_1)$$

$$Y_2 - Y_0 = Dy_0(x_1\text{-}x_0) + Dy_1(x_2\text{-}x_1) \qquad (4.17)$$

Explicitando a_2 em (4.16), tem-se que:

$$a_2 = \frac{Y_2 \text{ - } Y_0 \text{ - } Dy_0(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x1)}$$

Tendo em vista (4.17), vem que:

$$a_2 = \frac{Dy_0(x_1 - x_0) + Dy_1(x_2 - x_1) \text{ - } Dy_0(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x1)}$$

$$a_2 = \frac{Dy_0.x_1 - Dy_0.x_0 + Dy_1(x_2 - x_1) \text{ - } Dy_0 x_2 + Dy_0.x_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x1)} = \frac{Dy_1(x_2 - x_1) \text{ - } Dy_0 x_2 + Dy_0.x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x1)}$$

$$a_2 = \frac{Dy_1(x_2 - x_1) \text{ - } Dy_0(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x1)}$$

Portanto

$$a_2 = \frac{Dy_1 \text{ - } Dy_0}{x_2 \text{ - } x_0} \qquad (4.18)$$

Com base na definição 4.8, conclui-se que 4.18 é a diferença dividida de segunda ordem. Sendo assim

$$a_2 = D^2 y_0 \qquad (4.19)$$

Considerando os resultados (4.13), (4.15) e (4.19), pode-se concluir que:

$$a_i = D^i y_0,\ i = 0, 1, \ldots n$$

e que 4.12 é um polinômio da forma:

$$\boxed{p(x) = y_0 + (x - x_0)\,.Dy_0 + (x - x_0)(x - x_1)\,.D^2 y_0 + \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}).D^n y_0}$$

(4.20)

Teorema 4.1 (Valor Médio de Lagrange Generalizado)

Se y = f(x) é uma função com n derivadas contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$, então existe um ponto ξ □ $[x_0, x_n]$ tal que

$$D^n y_0 = \frac{f^n(\xi)}{n!} \tag{4.21}$$

Demonstração

Seja

$$e(x) = f(x) - p(x)$$

Onde p(x) é o polinômio que interpola f(x) nos pontos dados. Assim sendo, a função e(x) tem n + 1 zeros distintos, o que implica, pelo Teorema de Rolle Generalizado, que e`(x) tem n zeros em $[x_0, x_n]$ e, assim, sucessivamente. Assim, conclui-se que existe um $\xi \in [a,b]$ tal que $e^n(\xi) = 0$. Ou seja

$$0 = f^n(\xi) - p^n(\xi) \Rightarrow 0 = f^n(\xi) - D^n y_0.n!$$

c.q.d.

Corolário 4.1

Sob as hipóteses do teorema anterior, tem-se que

$$D^n f(x) \cong \frac{f^n(x)}{n!} \tag{4.22}$$

Corolário 4.2

Se y = f(x) e suas derivadas até a ordem (n + 1) são contínuas no intervalo $[x_0, x_n]$, então:

$$E_T(x) \leq |(x - x_0).\ (x - x_1).\ \ldots\ .\ (x - x_n)|.\text{máx}|D^{n+1}f(x)|$$

Tendo em vista o teorema 4.1 e o corolário 4.2, na ausência de informação sobre $f^{n+1}(x)$, uma estimativa para o erro de truncamento máximo pode ser obtida utilizando-se uma diferença dividida de ordem (n + 1), caso estas não variem muito.

Exemplo 4.3

A tabela a seguir apresenta valores da voltagem, V, em função da corrente elétrica, I. Utilizando interpolação polinomial, método das diferenças divididas, estimar o valor de V quando I = 3A.

i	0	1	2	3
$I = x_i$	1	2	4	8
$V = y_i$	120	94	75	62

Solução

Inicialmente, são determinados os valores das diferenças divididas.

i	$I = x_i$	$V = y_i$	Dy_i	D^2y_i	D^3y_i
0	1	120	- 26	5,5	- 0,64
1	2	94	- 9,5	1,04	
2	4	75	- 3,25		
3	8	62			

Tem-se, então:

$p(x) = y_0 + (x - x_0).Dy_0 + (x - x_0).(x – x_1).D^2y_0 + (x - x_0).(x – x_1).(x – x_2).D^3y_0$

$p(3) = 120 + (3 - 1).(- 26) + (3 - 1).(3 – 2).(5,5) + (3 - 1).(3 – 2).(3 – 4).(- 0,64)$

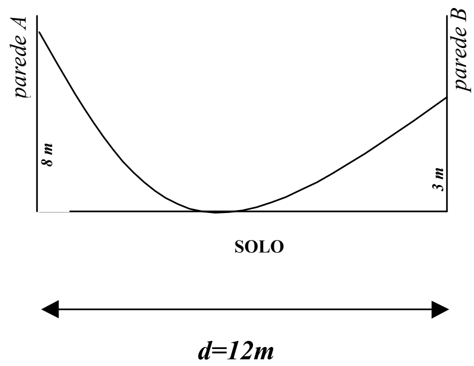
p(3) = 80,28V

Exemplo 4.4

Uma barra de metal está presa em duas paredes separadas pela distância de 12m. A 5m da parede A, um corpo apoiado sobre a barra faz com que esta toque no solo. Os pontos de engate nas duas paredes estão a 8m (parede A) e 3m (parede B) do solo, conforme mostra a figura a seguir. Usando interpolação polinomial, Método das Diferenças Divididas, pede-se estimar:

a) a altura, em relação ao solo, de um ponto da barra localizado a 2m da parede A;

b) qual deve ser a altura da barra no ponto localizado a 2m da parede A, para que o trecho compreendido até 5m da mesma seja representado por um polinômio de grau um.



Solução

a) Os pontos a considerar são os da tabela a seguir.

i	x_i	$V = y_i$	Dy_i	D^2y_i
0	0	8	- 1,6	0,169
1	5	0	0,429	
2	12	3		

$p(x) = y_0 + (x - x_0).Dy_0 + (x - x_0).(x - x_1).D^2y_0$

$p(2) = 8 + (2 - 0).(- 1,6) + (2 - 0).(2 - 5).(0,169) \Rightarrow$ **p(2) = 3,786m**

b) Pede-se para determinar a altura y da barra a 2m da parede A. Os pontos a considerar e as diferenças divididas estão na tabela a seguir.

i	x_i	y_i	Dy_i	D^2y_i
0	0	8	$\frac{y-8}{2}$	$\frac{1}{5}(-\frac{y}{3}-\frac{y-8}{2})$
1	2	y	$-\frac{y}{3}$	
2	5	0		

Para que este trecho seja representado por um polinômio de grau um, é necessário que a diferença dividida de segunda ordem seja nula. Então, fazendo:

$$\frac{1}{5}\left(-\frac{y}{3}-\frac{y-8}{2}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y = 4,8m}$$

4.3 – Método das diferenças finitas ascendentes

4.3.1 – O Operador Diferença Finita Ascendente

Definição 4.3

Sendo (x_i, y_i), i = 0, 1, . . . , n; pontos de uma função, y = f(x), tais que $x_{i+1} - x_i = h$ = constante; i = 0, 1, . . . , n – 1; define-se a diferença finita ascendente de primeira ordem como:

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x) \qquad (4.24)$$

Em um ponto x_i tem-se que

$$\Delta f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i)$$
$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n - 1 \qquad (4.25)$$

Da definição (4.24), verifica-se que o operador Δ(.) é linear (ver anexo), sendo assim, as diferenças finitas ascendentes de ordem superior são definidas, por recorrência, da seguinte maneira.

Segunda ordem.

$$\Delta[\Delta y_i] = \Delta[y_{i+1} - y_i]$$
$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n - 2 \qquad (4.26)$$

Terceira ordem.

$$\Delta[\Delta^2 y_i] = \Delta[\Delta y_{i+1} - \Delta y_i,]$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n - 3 \qquad (4.27)$$

Generalizando, tem-se que a diferença finita ascendente de ordem k é definida como:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \quad \begin{cases} k = 1, 2, ..., n \\ i = 0, 1, ..., n - k \end{cases} \qquad (4.28)$$

Sendo a diferença finita ascendente de ordem zero definida como:

$$\Delta^0 y_i = y_i;\ i = 0, 1, 2, ..., n \qquad (4.29)$$

As diferenças finitas ascendentes estão intimamente relacionadas com as derivadas de uma função. Tendo em vista as definições 4.1 e 4.3, verifica-se que $\frac{\Delta f(x)}{h}$ é uma aproximação para a primeira derivada de uma função y = f(x). O teorema a seguir generaliza esta idéia.

Teorema 4.3

Sendo y = f(x) uma função com derivadas contínuas até a ordem k, tem-se que:

$$\Delta^k f(x) = h^k . f^{(k)}(\xi_k) \text{ para algum } \xi_k \in (x, x + k.h) \qquad (4.30)$$

Demonstração

A demonstração será feita por indução sobre k.

Base de indução: a relação vale para k = 1

$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x) = h.f\,'(\xi)$ (Teorema do Valor Médio)

Hipótese de indução

Admita-se que a relação vale para k – 1.

$\Delta^{k-1} f(x) = h^{k-1} . f^{k-1}(\xi_{k-1}),\ \xi_{k-1} \in (x, x + (k - 1).h)$

Passagem de indução

Provar que a relação é válida para k.

$$\Delta^k[f(x)] = \Delta^{k-1}[\Delta[f(x)]] = \Delta^{k-1}[f(x + h) - f(x)]$$
$$= \Delta^{k-1}[f(x + h)] - \Delta^{k-1}[f(x)]$$

$\Delta^{k-1}[f(x + h)] = h^{k-1} f^{(k-1)}(\mu_1)$ com $\mu_1 \in (x + h, x + h + (k - 1)h) = (x + h, x + h.k)$

$\Delta^{k-1}[f(x)] = h^{k-1} f^{(k-1)}(\mu_2)$ com $\mu_2 \in (x, x + (k - 1)h)$

Usando agora o (T.V.M) para $f^{(k-1)}$ tem-se

$$\exists\ \xi_k \in (\mu_1, \mu_2) \text{ ou } (\mu_2, \mu_1) : f^{(k-1)}(\xi_1) - f^{(k-1)}(\xi_2) = hf^{(k)}(\xi_k)$$

Vem, então, que

$$\begin{aligned}\Delta^k[f(x)] &= \Delta^{k-1}[f(x+h)] - \Delta^{k-1}[f(x)] \\ &= h^{k-1}(f^{(k-1)}(\mu_1) - f^{(k-1)}(\mu_2)) \\ &= h^{k-1}hf^{(k)}(\xi_k),\ \xi_k \in (\mu_1, \mu_2) \\ &= h^k f^{(k)}(\xi_k),\ \xi_k \in (x, x + k.h)\end{aligned}$$

c.q.d.

Corolário 4.3

$[\Delta^k f(x) / h^k]$.é uma aproximação para $f^{(k)}(x)$ e o erro cometido tende a zero quando h tende a zero.

4.3.2 – O polinômio interpolador com diferenças finitas ascendentes

Teorema 4.2

Se (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$; são pontos de uma função, $y = f(x)$, tais que $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$; então vale a relação:

$$D^k y_i = \frac{\Delta^k y_i}{h^k.k!},\ k = 0, 1, 2, ..., n;\ i = 0, 1, 2, ..., n-k \tag{4.31}$$

Demonstração:

A demonstração é feita por meio de indução finita em k.

Base de indução: ordem 1

$$Dy_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{\Delta y_i}{h^1.1!},\ i = 0,1,2,\ldots, n-1$$

Hipótese de indução

Admita-se que o argumento é válido para a ordem $k - 1$.

$$D^{k-1} y_i = \frac{\Delta^{k-1} y_i}{h^{k-1}.(k-1)!},\ i = 0,1,2,\ldots, n-k+1$$

Passagem de indução

Provar que é válido para ordem k. Por definição

$$D^k y_i = \frac{D^{k-1} y_{i+1} - D^{k-1} y_i}{x_{i+k} - x_i}, \ i = 0,1,\ 2,\ \dots,\ n-k$$

Sendo $x_{i+k} - x_i = k.h$, ,tem-se que

$$D^k y_i = \frac{\dfrac{\Delta^{k-1} y_{i+1}}{h^{k-1}.(k-1)!} - \dfrac{\Delta^{k-1} y_i}{h^{k-1}.(k-1)!}}{k.h}, \ i = 0,1,\ 2,\ \dots,\ n-k$$

$$D^k y_i = \frac{\Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i}{h.h^{k-1}.k.(k-1)!}, \ i = 0,1,\ 2,\ \dots,\ n-k$$

Portanto

$$D^k y_i = \frac{\Delta^k y_i}{h^k.k!}, \ k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n;\ i = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-k$$

c.q.d.

Seja a variável

$$z = \frac{x - x_0}{h} \qquad (4.32)$$

De onde vem que

$x = x_0 + h.z$

$x - x_0 = h.z$

$x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = h.z - h = h.(z - 1)$

$x - x_2 = x - (x_0 + 2.h) = x - x_0 - 2.h = h.z - 2.h = h.(z - 2)$

.

.

.

$x - x_{n-1} = h.[z - (n - 1)]$

Efetuando as substituições no polinômio interpolador com diferenças divididas, 4.21, obtém-se que o polinômio interpolador com diferenças finitas ascendentes:

$$\boxed{p(x_0 + h.z) = y_0 + z.\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ... + \frac{z(z-1)\dots[z-(n-1)]}{n!}\Delta^n y_0}$$

(4.33)

Exemplo 4.5

Os pontos a seguir relacionam a solubilidade, S, da água no óleo mineral, em partes por milhão, com a temperatura, t, em graus centígrados. Utilizando interpolação polinomial, método das diferenças finitas ascendentes, estime o valor de t quando S = 200ppm.

	S	t			
i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	30	15	35	-19	13
1	130	50	16	-6	
2	230	66	10		
3	330	76			

Sabe-se que

$$z = \frac{x - x_0}{h} \;\Rightarrow\; z = \frac{200 - 30}{100} = 1{,}7$$

Logo

$$p(x_0 + h.z) = y_0 + z.\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$p(x_0 + h.z) = 15 + z.(35) + \frac{z(z-1)}{2!}.(-19) + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}.(13)$$

Sendo assim, o polinômio interpolador é dado por:

$$p(x_0 + h.Z) = 2.17.Z^3 - 16.Z^2 + 48{,}83.Z + 15$$

Tem-se, então, que **$p(200) = 62{,}4^oC$**

Exemplo 4.6

Uma hidroelétrica tem capacidade máxima de 60MW, que é determinada por três geradores de 30MW, 15MW e 15MW, respectivamente. A demanda de energia varia num ciclo de 24h, sendo que a demanda mínima ocorre entre 2h e 5h e a máxima entre 14h e 17h. Utilizando interpolação polinomial, método das diferenças finitas ascendentes, estime a demanda mínima e a máxima e o horário em que cada uma ocorre, considerando os dados a seguir.

i	0	1	2	3
Hora (x_i)	2	3	4	5
Demanda (y_i)	16,4	15,2	14,9	16,0

i	0	1	2	3
Hora (x_i)	14	15	16	17
Demanda (y_i)	36,5	43,0	34,0	31,2

Solução

→ **Demanda mínima**

Inicialmente, são calculados os valores das diferenças finitas ascendentes.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	2	16,4	- 1,2	0,9	0,5
1	3	15,2	- 0,3	1,4	
2	4	14,9	1,1		
3	5	16,0			

Sendo

$$z = \frac{x - x_0}{h}$$

então $z = x - 2$ e $x = 2 + z$

O polinômio interpolador tem a forma

$$p(x_0 + h.z) = y_0 + z.\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

Assim,

$$p(2+z) = 16{,}4 + z.(-1{,}2) + \frac{z(z-1)}{2!}(0{,}9) + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}(0{,}5)$$

$$p(2+z) = 0{,}08.z^3 + 0{,}2.z^2 - 1{,}48.z + 16{,}4$$

Para estimar a demanda mínima basta obter a primeira derivada de $p(2 + z)$ e determinar os seus zeros. Tem-se, então:

$$p'(2 + z) = 0{,}24.z^2 + 0{,}4.z - 1{,}48 = 0$$

Trata-se de uma função do segundo grau. Seus zeros são – 3,46, que não tem sentido para este problema, e **1,79**. A questão, agora, é verificar que $z = 1{,}79$ é abscissa de ponto de mínimo. Para isto toma-se a segunda derivada de $p(2 + z)$ e verifica-se, facilmente, que:

$$p''(2 + z) = 0{,}48.z + 0{,}4 > 0 \;\forall\; z > 0$$

Logo $z = 1{,}79$ é, de fato, abscissa de um ponto de mínimo. Portanto **p(3,79) = 14,8MW** é uma estimativa para a demanda mínima e. $x = 3{,}79$, que corresponde a **03h48min**, é o horário aproximado no qual a ela ocorre.

→ **Demanda máxima**

Cálculo das diferenças finitas ascendentes.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	14	36,5	6,5	- 15,5	21,7
1	15	43,0	- 9	6,2	
2	16	34,0	- 2,8		
3	17	31,2			

Sendo

$$z = \frac{x - x_0}{h}$$

então z = x – 14 e x = 14 + z

O polinômio interpolador tem a forma

$$p(x_0 + h.z) = y_0 + z.\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

Assim,

$$p(14 + z) = 36{,}5 + z.(6{,}5) + \frac{z(z-1)}{2!}(-15{,}5) + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}(21{,}7)$$

$$p(14 + z) = 3{,}62.z^3 - 18{,}6.z^2 + 21{,}48.z + 36{,}5$$

Derivando p(14 + z) tem-se a função:

$$p'(14 + z) = 10{,}86.z^2 - 37{,}2.z + 21{,}48$$

Cujos zeros são z = 0,74 e z = 2,69. Basta, agora, calcular o valor numérico da segunda derivada de p(14 + z) em cada um destes pontos para verificar qual deles é abscissa de ponto de máximo.

Sendo

$$p''(14 + z) = 21{,}72.z - 37{,}2$$

Para z = 0,74, tem-se que p''(14,74) = - 21,13 e, para z = 2,69, p''(16,69) = 21,23. Portanto, z = 0,74 é abscissa de ponto de máximo e, calculando o valor numérico do polinômio interpolador neste ponto, tem-se a estimativa para a demanda máxima que é

p(14,74) = 43,7MW

e verifica-se que ela ocorre às **14h44min**, aproximadamente.

5 – Complexidade dos métodos de interpolação

É importante, quando se avalia a eficiência de um algoritmo qualquer, saber como ele se comporta com relação ao número de operações aritméticas em função do tamanho da sua entrada. Esta é a análise de complexidade de tempo do algoritmo. Quando se avalia a quantidade de memória necessária em função do tamanho da entrada, tem-se a análise de complexidade de espaço. Existe uma vasta teoria sobre técnicas de avaliação formal destas complexidades. Neste texto considera-se, estritamente, o número de operações aritméticas.

Os métodos de interpolação de Lagrange, Diferenças Divididas e Diferenças Finitas Ascendentes realizam, cada um, um número específico de operações aritméticas, ou seja, cada um tem a sua complexidade. A tabela 5.1 apresenta uma síntese da análise feita para cada um destes métodos.

Método	Adições	Multiplicações	Divisões	Total
Lagrange	$2.n^2 + 3.n$	$2.n^2 + n - 1$	$n + 1$	$4.n^2 + 5.n$
Diferenças divididas	$\frac{3}{2}.n^2 + \frac{5}{2}.n$	$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$	$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$	$\frac{5}{2}.n^2 + \frac{7}{2}.n$
Diferenças finitas ascendentes	$n^2 + n + 1$	$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$	n	$\frac{3}{2}.n^2 + \frac{5}{2}.n + 1$

Tabela 5.1: Complexidade dos métodos de interpolação (n é o grau do polinômio)

Tomando como exemplo um polinômio interpolador de grau dez verifica-se que o número total de operações efetuadas pelo Método de Lagrange é igual a 450, pelo Método das Diferenças Divididas 285 e, pelo Método das Diferenças Finitas Ascendentes, 176. O que leva a verificar que o Método das Diferenças Finitas Ascendentes apresenta maior eficiência quando comparado com os outros dois métodos estudados.

6 – Considerações finais

(a) Os métodos que utilizam diferenças (divididas ou finitas ascendentes) são eficientes quando se deseja aumentar (ou diminuir) o grau do polinômio obtido, pois basta, simplesmente, acrescentar (ou retirar) termos. Logo, para cálculos exploratórios, estes métodos, em geral, são preferíveis.

(b) No método de Lagrange a alteração do grau do polinômio exige que os cálculos sejam, todos, refeitos.

(c) O método de Lagrange ocupa menos memória, uma vez que não é necessário o cálculo e o armazenamento de uma tabela de diferenças divididas ou finitas ascendentes.

(d) A desvantagem na utilização do Método das Diferenças Finitas Ascendentes é a exigência de que as abscissas dos pontos a utilizar para a interpolação devam ser, necessariamente, eqüidistantes.

(e) Nos métodos que utilizam diferenças divididas ou finitas ascendentes, a estimativa do erro de truncamento pode ser facilmente integrada ao algoritmo, uma vez que utiliza uma diferença.

(f) No método de Lagrange, a estimativa do erro de truncamento pode ser obtida somente se a função interpolada for conhecida analiticamente.

(g) O método de Lagrange é um pouco mais fácil de ser implementado.

Anexos

a) Teorema do Valor Médio

Se y = f(x) é uma função que satisfaz as condições:

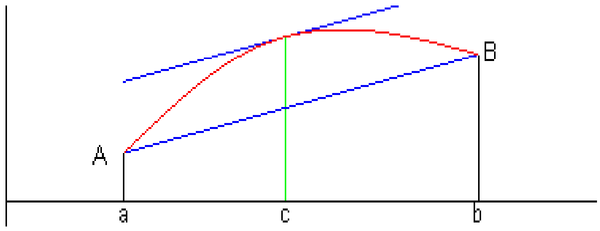
(i) é contínua no intervalo fechado [a, b]

(ii) é derivável no intervalo aberto (a, b)

Então, existe pelo menos um número c em (a, b), tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometricamente, o teorema do valor médio diz que se f é uma função "suave" que liga os pontos A= (a ,f(a)) e B = (b ,f(b)) existe pelo menos um ponto c*,* entre a e b , tal que a reta tangente ao gráfico de f em c é paralela a reta secante que passa por A e B. A figura a seguir ilustra o teorema.



O teorema do valor médio é a tradução matemática para um fato que aparece de forma corriqueira em muitas situações cotidianas. Por exemplo, se a média de velocidade, em uma viagem de carro é de 80 km/h, então, em algum momento da viagem, o velocímetro do carro deve ter marcado 80km/h.

Para traduzir a afirmação em termos matemáticos, considere-se que s(t) é a posição do carro em um instante t. Se a viagem começa em t = a (horas) e termina em t = b (horas), a velocidade média é dada por:

$$v_m = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$$

A afirmação de que em algum momento da viagem a velocidade instantânea deve ser igual à velocidade média, significa que em algum tempo c tem-se:

$$v_m = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} = v(c) = s'(c)$$

O Teorema do Valor Médio estabelece as condições mínimas que uma função s deve satisfazer para que a igualdade acima seja verdadeira.

b) Operador linear

Um operador α é linear se, e somente se:

(i) $\alpha.(u \pm w) = \alpha.u \pm \alpha.w$

(ii) $\alpha.(k.w) = k.(\alpha.w)$, onde k é uma constante real

Então, de fato, o operador $\Delta(.)$ é linear, pois:

$$
\begin{aligned}
\Delta(f + g)(x) &= (f + g).(x + h) - (f + g)(x) \\
&= f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x) \\
&= f(x + h) - f(x) + g(x + h) - g(x) \\
&= \Delta f(x) + \Delta g(x)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\Delta(k.f(x)) &= (k.f(x + h)) - (k.f(x)) \\
&= k.f(x + h) - k.f(x) \\
&= k.[f(x + h) - f(x)] \\
&= k.\,\Delta.f(x)
\end{aligned}
$$