UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas

Departamento de Computação

José Álvaro Tadeu Ferreira

Cálculo Numérico

Notas de aulas

Integração Numérica

Ouro Preto

2013

(Última revisão em novembro de 2013)

Sumário

1 - Introdução

No Cálculo Diferencial e Integral estuda-se o conceito de integral definida e como calculá-la por meio de processos analíticos. Os resultados obtidos correspondem a áreas ou volumes de figuras geométricas, dependendo do tipo de integral.

O objetivo deste capítulo é a apresentação de métodos numéricos para o cálculo de integrais definidas próprias, ou seja, dada uma função y = f(x), avaliar:

$$I(f) = \int_a^b f(x).dx \tag{1.1}$$

Sabe-se, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Diferencial e Integral, que:

$$I(f) = \int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a) \tag{1.2}$$

onde F(x) é a primitiva de f(x), isto é, F‘(x) = f(x).

Antes de tratar de métodos numéricos para o cálculo de integrais definidas é relevante atentar para as razões da importância dos mesmos. Sendo assim, a seguir, são apresentados alguns exemplos nos quais a utilização de métodos numéricos para o cálculo de integrais definidas, por algum motivo, se faz necessária.

As aplicações mais óbvias das integrais definidas se encontram no cálculo de comprimentos, áreas, volumes, massa, centro de massa, distância percorrida, tempo decorrido, etc. Considere-se o problema de calcular o comprimento de uma curva f em um intervalo a e b. Se a função f for diferenciável, esse problema remete a uma integral. Seja, por exemplo, calcular o perímetro de uma elipse, que exige a avaliação da expressão

$$p = 4.b.\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2.\mathrm{sen}^2(t)}.dt$$

Ocorre que a integral

$$\int \sqrt{1 - k^2.\mathrm{sen}^2(t)}.dt$$

é conhecida como integral elíptica do primeiro tipo, e não admite uma primitiva que resulte da combinação finita de funções elementares. Em outras palavras, não há uma fórmula fechada para o perímetro da elipse.

A Física está repleta de conceitos definidos por meio de integração. Por exemplo, os movimentos unidimensionais, isto é, movimentos num espaço cuja posição possa ser determinada por apenas uma coordenada. Pode ser o movimento de uma partícula numa reta, um carro numa estrada, um pêndulo simples, etc.

A integração numérica se presta, também, para calcular constantes matemáticas. Por exemplo, o número π, que é definido como sendo a área do círculo de raio unitário. Como para o círculo unitário se tem $x^2 + y^2 = 1$, então $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, logo,

$$\pi = 2.\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

Neste caso, é até possível determinar uma primitiva para o integrando, mas o problema é que essa primitiva acabará sendo expressa em termos de π. Pode-se mostrar teoricamente que o lado direito é igual ao esquerdo, obtendo-se a equação π = π!!!! O valor numérico de π só poderá ser obtido, no entanto, se for feita a integração precisa da função no integrando.

Outro exemplo vem da Teoria das Probabilidades. A distribuição de probabilidades mais comum na natureza é dada pela função

$$P_{\tau,\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}} \exp\left\{ -\frac{(t-\tau)^2}{2.\sigma^2} \right\}$$

Para determinar a probabilidade de que um evento ocorra dentro de um intervalo [a, b] é necessário calcular a integral

$$\int_{a}^{b} P_{\tau,\sigma}(t).dt$$

Acontece que e^{-x^2} é uma função cuja primitiva não pode ser expressa como uma combinação finita de funções elementares. Em probabilidade, como é muito freqüente o uso dessa integral, adotam-se tabelas com precisão limitada, mas razoável, que servem para a maioria dos propósitos. Essas tabelas podem ser facilmente montadas com a utilização dos métodos de integração numérica que serão tratados neste texto.

Outro exemplo são os casos em que há a necessidade de se trabalhar com dados experimentais. Nesta situação, não há funções matemáticas que descrevem um fenômeno físico, mas apenas tabelas de dados que devem ser integrados para se analisar o problema. O tratamento é feito, essencialmente, de forma numérica.

Conforme ilustrado nos exemplos apresentados anteriormente, na resolução de uma integral definida várias situações podem ocorrer:

(i) a determinação da primitiva F pode ser difícil;

(ii) a função a integrar pode não admitir uma primitiva F que possa ser escrita como uma combinação finita de funções elementares;

(iii) a função a ser integrada pode não ser conhecida na sua forma analítica, mas, apenas, em um conjunto de pontos (x_i, y_i), i = 0, 1, ... n.

A chave para a solução do problema é, essencialmente, aproximar a função integranda, f, por outra função cuja integral seja fácil de calcular. Substitui-se, então, f pelo polinômio que a interpola em um conjunto de pontos (x_i, y_i), i = 0, 1, ..., n, pertencentes ao intervalo [a, b]. Sendo p este polinômio, é razoável esperar que

$$I(p) = \int_a^b p(x).dx$$

seja, sob certas condições, um valor aproximado de I(f). O erro cometido neste processo é

$$e = I(f) - I(p) = I(f - p) \qquad (1.3)$$

O resultado (1.3) se justifica pela linearidade do operador de integração. Como pode ser observado, o erro depende da maior ou menor aproximação do polinômio p a f. Adiante serão apresentadas estimativas desta importante grandeza.

Por razões históricas, as fórmulas de integração numérica também são denominadas “quadratura numérica”, pois foi com o problema da quadratura do círculo que Arquimedes fez os primeiros cálculos usando a noção de integral.

2 – Fórmulas de Newton-Cotes

As fórmulas de Newton-Cotes podem ser:

(a) do tipo fechado: são aquelas em que todos os pontos estão no intervalo de integração [a, b], e $x_0 = a$ e $x_m = b$ são os extremos.

(b) do tipo aberto: nestas fórmulas todos os pontos estão no intervalo, [a, b], de integração, porém a função integranda, y = f(x), não é avaliada em ambas as extremidades do intervalo, mas em pontos próximos. São utilizadas quando a função integranda apresenta descontinuidades nos extremos do intervalo de integração, ou seja, têm utilidade na análise de integrais impróprias.

Neste texto serão estudadas as Fórmulas de Newton-Cotes do tipo fechado. Estas fórmulas permitem calcular, por aproximação, uma integral definida substituindo a função a ser integrada pelo polinômio com diferenças finitas ascendentes que a interpola em um conjunto de pontos (x_i, y_i), i = 0, 1, ..., n; onde $a = x_0$ e $b = x_n$. Sendo assim, par avaliar

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x).dx$$

substitui-se f(x) por

$$p(x_0 + h.z) = y_0 + z.\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{z(z-1)\ldots[z-(n-1)]}{n!}\Delta^n y_0 \quad (2.1)$$

onde

$$z = \frac{x - x_0}{h}.$$

Tem-se, então, que:

$$x = x_0 + h.z \Rightarrow dx = h.dz.$$

Com esta mudança de variável, tem-se que

Para $x = x_0 \Rightarrow z = \frac{x_0 - x_0}{h} \Rightarrow z = 0$

Para $x = x_n \Rightarrow z = \frac{x_n - x_0}{h} = \frac{n.h}{h} \Rightarrow z = n$

Portanto, a integral que será, efetivamente, calculada é:

$$I = \int_0^n p(x_0 + h.z).h.dz$$

Como h é uma constante, tem-se

$$I = h.\int_0^n p(x_0 + h.z).dz \qquad (2.2)$$

A expressão 2.2 constitui-se em uma família de regras de integração ou de fórmulas de quadratura. De acordo com o valor atribuído a n, determina-se o grau do polinômio interpolador e se obtêm diferentes regras de integração.

2.1 – Regra dos Trapézios

Esta regra é obtida fazendo-se n igual a um, ou seja, por meio da integração do polinômio interpolador de grau um.

2.1.1 – Fórmula Simples

É calculada, então, a integral a seguir.

$$I = h.\int_0^1 [y_0 + z\Delta y_0] \cdot dz$$

Que, resolvida, resulta em

$$I = h.\left[zy_0 + \frac{z^2}{2}\Delta y_0 \right]_0^1 = h\left[y_0 + \frac{\Delta y_0}{2} \right] \qquad (2.3)$$

Sabe-se que

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 \qquad (2.4)$$

Substituindo 2.4 em 2.3, vem

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_1 \right] \qquad (2.5)$$

Que é a Regra dos Trapézios na sua fórmula simples. Na figura 2.1 é apresentada a interpretação geométrica desta regra. Como se sabe, calcular uma integral definida corresponde a avaliar a área sob a curva da função integrada, no intervalo de integração. No caso, a área sob a curva de f, no intervalo [a = x_0, b = x_1] foi estimada com sendo a área sob uma reta e que, conforme mostra a figura 2.1, é a área de um trapézio.

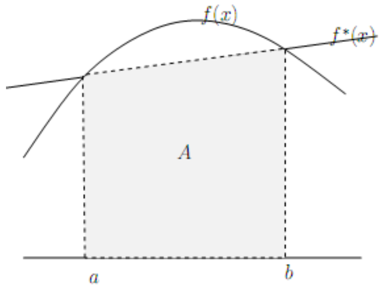

Figura 2.1: Regra dos Trapézios - fórmula simples

O erro de truncamento é dado pela expressão (2.6). Este erro é de truncamento, porque o grau do polinômio interpolador foi truncado em um em função do número de pontos utilizados.

$$E_T = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \quad \xi \in [x_0, x_1] \tag{2.6}$$

2.1.2 – Fórmula Composta

Os resultados obtidos por uma fórmula simples de Newton-Cotes, não têm, muitas vezes, a precisão desejada. Uma maneira de obter resultados mais precisos é subdividir o intervalo de integração em k partes do mesmo tamanho e aplicar a fórmula simples de repetidamente.

Posteriormente será verificado, observando as expressões dos erros de truncamento das várias fórmulas, que eles dependem de uma potência do comprimento (b - a) do intervalo de integração [a,b]. Então, se este intervalo é reduzido, o erro será reduzido na proporção desta potência.

Considerando o exposto, para melhorar o resultado, o intervalo [a,b] de integração é dividido em k partes de tamanho h e aplica-se a fórmula simples da Regra dos Trapézios em cada uma delas. A figura (2.2) ilustra este procedimento.

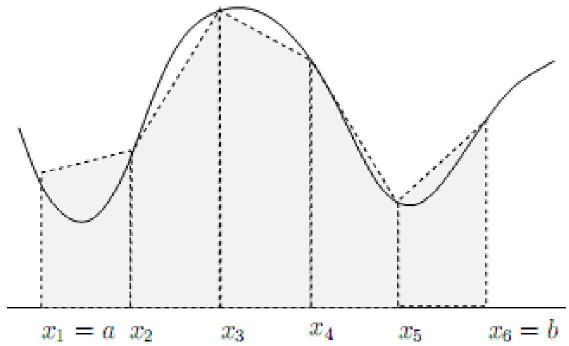

Figura 2.2: Regra dos Trapézios – Fórmula composta

Tem-se, então, para a aproximação da integral:

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_1\right] + \frac{h}{2}\left[y_1 + y_2\right] + ... + \frac{h}{2}\left[y_{k-1} + y_k\right]$$

Resultando em:

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2.y_1 + 2.y_2 + ... + 2.y_{k-1} + y_k\right] \qquad (2.7)$$

O erro resultante é a soma dos erros cometidos na aplicação da Regra dos Trapézios em cada uma das k partes na qual o intervalo de integração foi dividido, e é dado por:

$$E_T = -\frac{(x_k - x_0)^3}{12k^2}.f^{''}(\xi) \quad x_0 \le \xi \le x_k \qquad (2.8)$$

Ocorre que o número ξ não é conhecido, portanto, tal como é, o resultado (2.8) não pode ser utilizado. Sendo assim, o erro cometido é estimado por meio de (2.8.a), ou seja, na forma de erro de truncamento máximo.

$$E_T \le \left|\frac{(x_k - x_0)^3}{12k^2}\right| \max\left|f^{''}(x)\right| \quad x_0 \le x \le x_k \qquad (2.8.a)$$

Exemplo 2.1

Sendo f(x) = ln(x + 2) -1, estime $I = \int_{2}^{3,2} f(x).dx$, utilizando a Regra dos Trapézios, de modo que o erro de truncamento máximo seja 0,0004.

Solução

Tem-se que $f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ cujo módulo é máximo, no intervalo [2; 3,2], para x = 2 e |f ''(2)| = 0,0625. Fazendo as substituições em (2.8.a), vem:

$$E_T \leq \left|\frac{(3,2-2)^3}{12k^2}\right|.0,0625 \leq 0,0004 \Rightarrow k \geq 4,7 \Rightarrow \mathbf{k \geq 5}$$

Considerando o intervalo de integração dividido em 5 partes, tem-se h = 0,24.

i	x_i	y_i	c_i
0	2,00	0,3863	1
1	2,24	0,4446	2
2	2,48	0,4996	2
3	2,72	0,5518	2
4	2.96	0,6014	2
5	3,20	0,6487	1

Tendo em vista que:

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2.y_1 + 2.y_2 + 2.y_3 + 2.y_4 + y_5\right]$$

Obtém-se que:

$$\sum_{i=0}^{5} c_i.y_i = 5,2298$$

Como

$$I = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{5} c_i.y_i \Rightarrow I = \frac{0,24}{2}.5,2298 \Rightarrow \mathbf{I = 0,6276}$$

Observação

Utilizando o Cálculo Diferencial e Integral e quatro casas decimais, é obtido o seguinte resultado:

$$I = \int_{2}^{3,2} [(\ln(x+2) - 1].dx = \{(x+2).[\ln(x+1) - 1] - x\}_{2}^{3,2} = 0,6278$$

2.2 – Primeira Regra de Simpson

Para obter esta regra é integrado o polinômio interpolador de grau dois são, portanto, necessários três pontos.

2.2.1 – Fórmula Simples

Esta fórmula é obtida calculando-se a seguinte integral.

$$I = h.\int_0^2 [y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2}\Delta^2 y_0] \cdot dz$$

Tem-se, então:

$$I = h\left[z.y_0 + \frac{z^2}{2}.\Delta y_0 + \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{4}\right).\Delta^2 y_0 \right]_0^2$$

Fazendo z igual a dois, vem

$$I = h\left[2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0 \right] \tag{2.9}$$

Tem-se que:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 \tag{2.10}$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - (y_1 - y_0)$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 \tag{2.10.a}$$

Substituindo (2.10) e (2.10.a) em (2.9), tem-se:

$$I = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2 \right] \tag{2.11}$$

A interpretação geométrica desta regra é apresentada na figura (2.3)

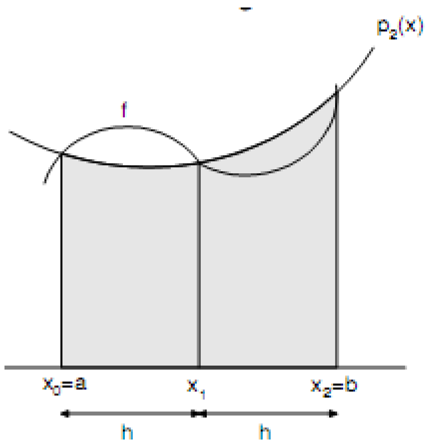

Figura 2.3: Primeira Regra de Simpson – Fórmula Simples

O erro de truncamento cometido é dado por:

$$E_{S1} = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi) \quad \xi \in [x_0, x_2] \tag{2.12}$$

2.2.2 – Fórmula Composta

Para obter esta fórmula divide-se o intervalo de integração em k partes de mesmo tamanho e aplica-se a fórmula simples de forma repetida. Observe-se que, como para cada aplicação da fórmula simples são necessários três pontos, k deve ser um número par. A figura (2.4) ilustra o procedimento.

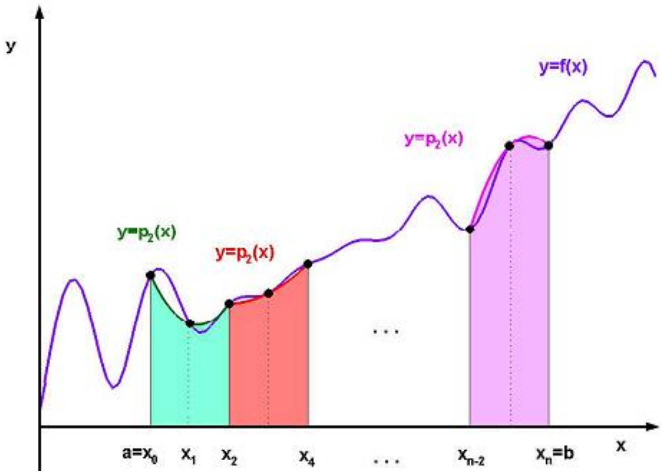

Figura 2.4: Primeira Regra de Simpson – Fórmula Composta

Desta forma, vem, então, que:

$$I = \frac{h}{3}[y_0) + 4.y_1 + y_2] + \frac{h}{3}[y_2 + 4.y_3 + y_4] + ... + \frac{h}{3}[y_{k-2} + 4.y_{k-1} + y_k]$$

Resultando em:

$$I = \frac{h}{3}.[y_0 + 4.y_1 + 2.y_2 + 4.y_3 + 2.y_4 + ... + 2.y_{k-2} + 4.y_{k-1} + y_k] \qquad (2.13)$$

O Erro de truncamento resultante da integração pela Primeira Regra de Simpson – Fórmula Composta é dado por:

$$E_{S1} = -\frac{(x_k - x_0)^5}{180k^4} f^{(IV)}(\xi) \quad \xi \in [x_0, x_k] \qquad (2.14)$$

Uma vez que ponto ξ não é conhecido, a expressão (2.14) é aproximada pela expressão (2.15), ou seja, na forma de erro de truncamento máximo.

$$E_{S1} \le \left|\frac{(x_k - x_0)^5}{180k^4}\right| \cdot \max\left|f^{(IV)}(x)\right| \quad x \in [x_0, x_k] \qquad (2.15)$$

<u>Exemplo 2.2</u>

O PROCON tem recebido reclamações com relação ao peso dos pacotes de açúcar de 5kg. Com a finalidade de verificar a validade das reclamações, foi coletada uma amostra de 100 pacotes. Com isto, chegou-se à conclusão de que para determinar a probabilidade de um pacote de açúcar pesar menos do que 5kg deve ser avaliada a expressão a seguir.

$$F = 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_0^{1{,}8} e^{-\frac{x^2}{2}}.dx$$

Estime essa probabilidade e o erro de truncamento máximo cometido utilizando a Primeira Regra de Simpson. Divida o intervalo de integração em 6 partes e faça os cálculos com 4 casas decimais.

Solução

Para calcular F é necessário, antes, obter uma estimativa para o valor da integral.

$$I = \int_0^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}}.dx$$

Sendo o intervalo de integração dividido em 6 partes, então h = 0,3.

i	x_i	y_i	c_i
0	0,0	1	1
1	0,3	0,9560	4
2	0,6	0,8353	2
3	0,9	0,6670	4
4	1,2	0,4868	2
5	1,5	0,3247	4
6	1,8	0,1979	1

Tendo em vista que:

$$I = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4.y_1 + 2.y_2 + 4.y_3 + 2.y_4 + 4.y_5 + y_6\right]$$

Obtém-se que:

$$\sum_{i=0}^{6} c_i.y_i = 11,6325$$

Como

$$I = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{6} c_i.y_i \Rightarrow I = \frac{0,3}{3}.11,6325 \Rightarrow \mathbf{I = 1,1633}$$

Obtido o valor da integral, pode-se calcular F.

$$F = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.1,1633 \Rightarrow \mathbf{F = 0,9640}$$

O erro de truncamento máximo cometido no cálculo da integral é dado por (2.15). Verifica-se que:

$$f'(x) = -x.e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.(x^2 - 1)$$

$$f'''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.(3 - x^3)$$

$$f^{(IV)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.(x^4 - 6.x^2 + 3) \tag{2.16}$$

Na figura 2.1 é apresentado o gráfico de $|f^{(IV)}(x)|$.

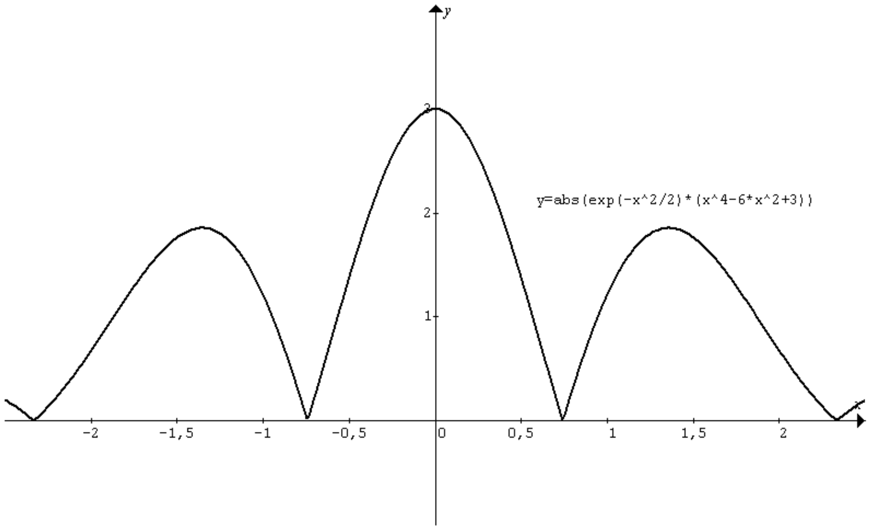

Gráfico 2.1

Conforme pode ser observado no gráfico 2.1, $|f^{(IV)}(x)|$ atinge o seu máximo no intervalo [0; 1,8], para x = 0. Verifica-se que $|f^{(IV)}(0)| = 3$

Sendo assim, vem que:

$$E_{S1} \leq \left| \frac{(1{,}8-0)^5}{180.6^4} \right| \cdot 3 \Rightarrow E_{S1} \leq 0{,}000243$$

2.3 – Segunda Regra de Simpson

Nesta regra, a função a ser integrada será aproximada por um polinômio interpolador de grau 3. Portanto, são necessários quatro pontos para a interpolação.

2.3.1 – Fórmula Simples

Agora é resolvida a seguinte integral:

$$I = h.\int_0^3 \left[y_0 + z.\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0 \right].dz \qquad (2.17)$$

Tem-se que:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 \qquad (2.18)$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 \qquad (2.19)$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta y_2 - 2\Delta y_1 + \Delta y_0 = y_3 - y_2 - 2.(y_2 - y_1) + y_1 - y_0$$

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3.y_2 + 3.y_1 - y_0 \qquad (2.20)$$

Integrando (2.17) e efetuando as devidas substituições, chega-se ao seguinte resultado:

$$I = \frac{3h}{8}\left[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right] \qquad (2.21)$$

O erro de truncamento resultante da integração pela Segunda Regra de Simpson é dado por:

$$E_{S2} = -\frac{3h^5}{80} f^{(IV)}(\xi) \quad \xi \in [x_0, x_3] \qquad (2.22)$$

2.3.2 – Fórmula Composta

O número de partes, k, no qual o intervalo de integração é dividido deve ser múltiplo de três, pois a regra utiliza um polinômio interpolador de grau três. Esta fórmula é dada pela seguinte expressão:

$$I = \frac{3h}{8}\left[y_0 + 3.y_1 + 3.y_2 + y_3\right] + \frac{3h}{8}\left[y_3 + 3.y_4 + 3.y_5 + y_6\right] + ... + \frac{3h}{8}\left[y_{k-3} + 3.y_{k-2} + 3.y_{k-1} + y_k\right]$$

Resultando em:

$$I = \frac{3h}{8}[y_0 + 3.y_1 + 3.y_2 + 2.y_3 + 3.y_4 + 3.y_5 + 2.y_6 + ... + 3.y_{k-2} + 3.y_{k-1} + y_k] \qquad (2.18)$$

O Erro de truncamento resultante da integração pela Segunda Regra de Simpson – Fórmula Composta é dado por:

$$E_{S2} = -\frac{(x_k - x_0)^5}{80k^4} f^{(IV)}(\xi) \quad \xi \in [x_0, x_k] \qquad (2.23)$$

Como o ponto ξ não é conhecido, a expressão (2.23) pode ser aproximada pela expressão (2.24).

$$E_{S2} \leq \left|\frac{(x_k - x_0)^5}{80k^4}\right| \cdot \max\left|f^{(IV)}(x)\right| \quad x \in [x_0, x_k] \qquad (2.24)$$

Exemplo 2.3

Um tanque esférico de raio R = 5 m está cheio com água.. A água será drenada através de um orifício de raio r = 0,1 m situado no fundo do tanque. A variação do nível, h, da água com o tempo, t, em segundos, é dada pela relação:

$$dt = \frac{R^2 - h^2}{r^2\sqrt{2g(h+R)}}\,dh$$

Onde g = 9,81 m/s^2 é a aceleração devida à gravidade.

Utilize a Segunda Regra de Simpson, para estimar o tempo para que o nível da água chegue a 1m do fundo. Divida o intervalo de integração em nove partes e faça os cálculos com duas casas decimais.

Solução

Fazendo as substituições tem-se que

$$dt = \frac{25 - h^2}{0{,}01\sqrt{19{,}62(h+5)}}\,dh$$

Como o raio do tanque é 5m, inicialmente o nível da água, em relação ao fundo, é 10m. Portanto, a integral a ser calculada é

$$t = \int_{10}^{1} \frac{25 - h^2}{0{,}01\sqrt{19{,}62(h+5)}}\,dh$$

Como o intervalo deve ser dividido em 9 partes, então h = - 1.

i	z_i	y_i	c_i
0	10	- 437,19	1
1	9	-337,89	3
2	8	-244,20	3
3	7	-156,41	2
4	6	-74,88	3
5	5	0,00	3
6	4	67,73	2
7	3	127,71	3
8	2	179,19	3
9	1	221,20	1

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{9} c_i . y_i = -1.443{,}56$$

Tendo em vista que:

$$t = \frac{3.h}{8}\left[y_0 + 3.y_1 + 3.y_2 + 2.y_3 + 3.y_4 + 3.y_5 + 2.y_6 + 3.y_7 + 3.y_8 + y_9\right]\text{, então}$$

$$t = \frac{3.h}{8}\sum_{i=0}^{9} c_i.y_i \Rightarrow t = \frac{3.(-1)}{8}.(-1.443,56) \Rightarrow \mathbf{t = 541,34s}$$

2.4 – Considerações

(i) **Ordem de convergência** é a velocidade com a qual uma sucessão converge para o seu limite.

(ii) Comparando-se as expressões dos erros, verifica-se que as regras de Simpson têm ordem de convergência h^4, enquanto que a Regra dos Trapézios é da ordem h^2. Assim, as regras de Simpson produzem resultados que convergem para o valor real da integral com a mesma velocidade, e mais rapidamente do que na Regra dos Trapézios, quando $h \to 0$.

(iii) Uma regra de integração tem **grau de exatidão g** se integrar, exatamente, todos os polinômios de grau menor ou igual a g e existir pelo menos um polinômio de grau g + 1 que não é integrado exatamente por esta regra.

(iv) Portanto a Regra dos Trapézios tem grau de exatidão um e as Regras de Simpson três. Embora a Primeira Regra de Simpson tenha sido obtida por meio da integração do polinômio interpolador de grau dois, ela é exata, também, para polinômios de grau três, visto que, na fórmula do erro, aparece a derivada quarta da função. Pode ser demonstrado que, quando o grau, n, do polinômio é par, então as fórmulas de Newton-Cotes do tipo fechado têm grau de exatidão (n + 1).

(v) Para obter o resultado de uma integral com uma determinada precisão, pode-se impor que o erro, em módulo, seja menor que $0,5 \times 10^{-k}$, onde k é o número de casas decimais corretas que se deseja e, assim, determinar em quantas partes deverá se dividido o intervalo de integração. Outra alternativa é aumentar, sucessivamente, o número de pontos e comparar dois resultados consecutivos até que seja obtida a precisão desejada. Este segundo procedimento é o mais comumente utilizado.

3 – Aplicação das Fórmulas de Newton-Cotes na Integração Dupla

Sendo z = f(x, y), uma função tabelada nos intervalos $[x_0, x_m]$ e $[y_0, y_p]$, pode-se calcular a integral dupla

$$I = \int_{x_0}^{x_m} \int_{y_0}^{y_p} f(x, y)\, dy\, dx$$

como o produto de dois operadores integrais, um em x e outro em y:

$$I = \int_{x_0}^{x_m} dx \int_{y_0}^{y_p} f(x, y) dy \qquad (3.1)$$

Seja

$$G(x) = \int_{y_0}^{y_p} f(x, y) dy \qquad (3.2)$$

Substituindo (3.2) em (3.1) tem-se que

$$I = \int_{x_0}^{x_m} G(x) dx \qquad (3.3)$$

Observe-se que (3.2) e (3.3) são duas integrais simples. Portanto, podem ser resolvidas utilizando-se as regras de integração estudadas. Resolver (3.3) corresponde a integrar em x, e o resultado é da forma:

$$I = c_x.[a_0.G(x_0) + a_1.G(x_1) + a_2.G(x_2) + ... + a_m.G(x_m)]$$

Este resultado é uma representação genérica das regras de integração estudadas, ou seja, uma constante que multiplica a soma ponderada das ordenadas dos pontos dados. Colocando de forma mais compacta, tem-se:

$$I = c_x \sum_{i=0}^{m} a_i G(x_i) \qquad (3.4)$$

De 3.2 tem-se que

$$G(x_i) = \int_{y_0}^{y_p} f(x_i, y) dy$$

Aplicando uma regra de integração, obtém-se

$G(x_i) = c_y.[b_0f(x_i, y_0) + b_1f(x_i, y_1) + b_2f(x_i, y_2) +\ldots\ b_pf(x_i, y_p)],\ i = 0, 1, ..., m$

Resultado que pode ser escrito da forma:

$$G(x_i) = c_y \sum_{j=0}^{p} b_j.f(x_i, y_j) \tag{3.5}$$

Finalmente, substituindo (3.5) em (3.4), tem-se:

$$I = c_x.c_y \sum_{\substack{j=0\\ i=0}}^{\substack{m\\ p}} a_i.b_j.f(x_i.y_j) \tag{3.6}$$

<u>**Exemplo 3.1**</u>

Sendo $f(x, y) = \dfrac{sen(x.y)}{x^2 + y}$ estime I = $\int_{0,1}^{0,9}\int_{0,2}^{0,5} f(x, y)dy.dx$ com $h_x = 0,2$ e $h_y = 0,1$. Considere, nos cálculos, quatro casas decimais.

Solução:

a) $m = \dfrac{0,9 - 0,1}{0,2} = 4$ (subdivisões em x) $\rightarrow$ 1ª regra de Simpson

$p = \dfrac{0,5 - 0,2}{0,1} = 3$ (subdivisões em y) $\rightarrow$ 2ª regra de Simpson

b) O quadro a seguir apresenta uma forma de organizar os cálculos.

		j	0	1	2	3
		y_j	0,2	0,3	0,4	0,5
i	x_i	$\downarrow a_i$ $b_j \rightarrow$	1	3	3	1
0	0,1	1	1 0,0952	3 0,0968	3 0,0975	1 0,0980
1	0,3	4	4 0,2068	12 0,2305	12 0,2443	4 0,2533
2	0,5	2	2 0,2219	6 0,2717	6 0,3056	2 0,3299
3	0,7	4	4 0,2022	12 0,2639	12 0,3105	4 0,3464
4	0,9	1	1 0,1773	3 0,2403	3 0,2911	1 0,3320
					Σ =	**24,0722**

Cada célula do corpo do quadro é preenchida da seguinte forma:

$a_i \times b_j$ $f(x_i, y_j)$

Tem-se então

$\sum = 1.f(0,1\ ;\ 0,2) + 3.f(0,1\ ;\ 0,3) + 3.f(0,1\ ;\ 0,4) + \ldots + 1.f(0,9\ ;\ 0,5) = 24,0722$

c) $I = \frac{h_x}{3}.\frac{3}{8}.h_y.\sum = \frac{0,2}{3}.\frac{3}{8}.0,1.[24,0722] \Rightarrow I = 0,0602$

Exemplo 3.2

Sendo $f(x, y) = \dfrac{1}{(x+y)^2}$ estime $I = \int_3^4 \int_1^2 f(x, y)dy.dx$ com $h_x = 0,2$ e $h_y = 0,25$. Considere, nos cálculos, quatro casas decimais.

Solução:

$m = \frac{4-3}{0,2} = 5$ (subdivisões em x) $\rightarrow$ Regra dos Trapézios

$p = \frac{2-1}{0,25} = 4$ (subdivisões em y) $\rightarrow$ 1^a regra de Simpson

		j	0	1	2	3	4
		y_j	1,0	1,25	1,50	1,75	2
i	x_i	$\downarrow a_i$ $b_j \rightarrow$	1	4	2	4	1
0	3	1	1 0,0625	4 0,0554	2 0,0494	4 0,0443	1 0,0400
1	3,2	2	2 0,0567	8 0,0505	4 0,0453	8 0,0408	2 0,0370
2	3,4	2	2 0,0517	8 0,0463	4 0,0417	8 0,0377	2 0,0343
3	3,6	2	2 0,0473	8 0,0425	4 0,0385	8 0,0349	2 0,0319
4	3,8	2	2 0,0434	8 0,0392	4 0,0356	8 0,0325	2 0,0297
5	4,0	1	1 0.0400	4 0,0363	2 0,0331	4 0,0303	1 0,0278
						Σ =	**4,9027**

Tem-se então

$$I = \frac{h_x}{2} \cdot \frac{1}{3} . h_y . \Sigma \ = \frac{0,2}{2} \cdot \frac{0,25}{3} . [4,9027] \Rightarrow \mathbf{I = 0,0409}$$