BCC 463 – Otimização em Redes
ou
Fluxo em Redes

Prof. Gustavo Peixoto Silva

Departamento de Computação

Univ. Federal de Ouro Preto

Min cx (1) sujeito a

Ax = b (2)

0 ≤ x ≤ u, (3)

- A equação (1) minimizar o custo devido ao fluxo através dos arcos da rede.
- A equação (2) garante o equilíbrio de fluxo em cada nó da rede.
- E a restrição (3) assegura que o fluxo não ultrapasse a capacidade limite de cada arco.

- Para cada nó *i* temos:
- Se *bi* > 0 então *i* é um **nó produtor**.
- *bi* < 0 então *i* é um **nó consumidor**.
- *bi* = 0 então *i* é um **nó de transbordo**.

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$$ A rede deve ser balanceada entre oferta e demanda

Emparelhamento – Política Ótima de Energia

Como utilizar a matéria prima p/ satisfazer às necessidades energéticas?

Matéria prima: petróleo, carvão, urânio, hidroelétricas

Necessidades: eletricidade, óleo lubrificante, gasolina e gás natural

A base tecnológica fornece a eficiência e custo das possíveis conversões.

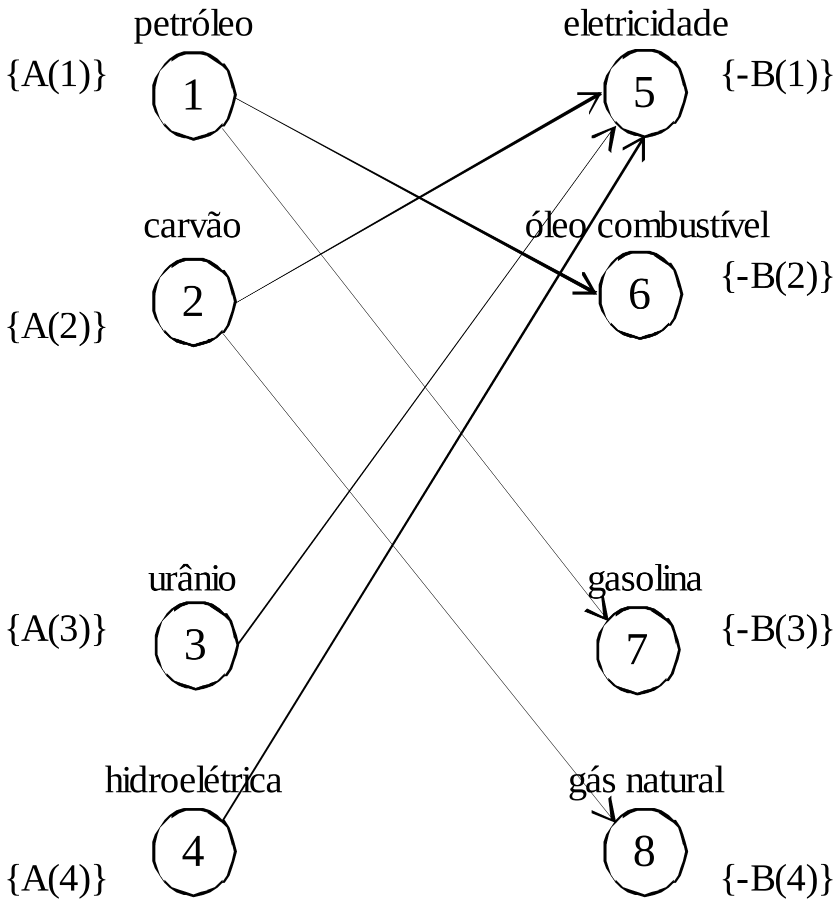
Objetivo: satisfazer as necessidades c/ o menor custo de conversão.

Este é um caso de Problema de Fluxo Generalizado onde ocorre uma transformação do fluxo ao longo dos arcos.

1. Aquedutos – escoamento de H_20 em superfície livre
2. Transformação de matéria prima em produto manufaturado

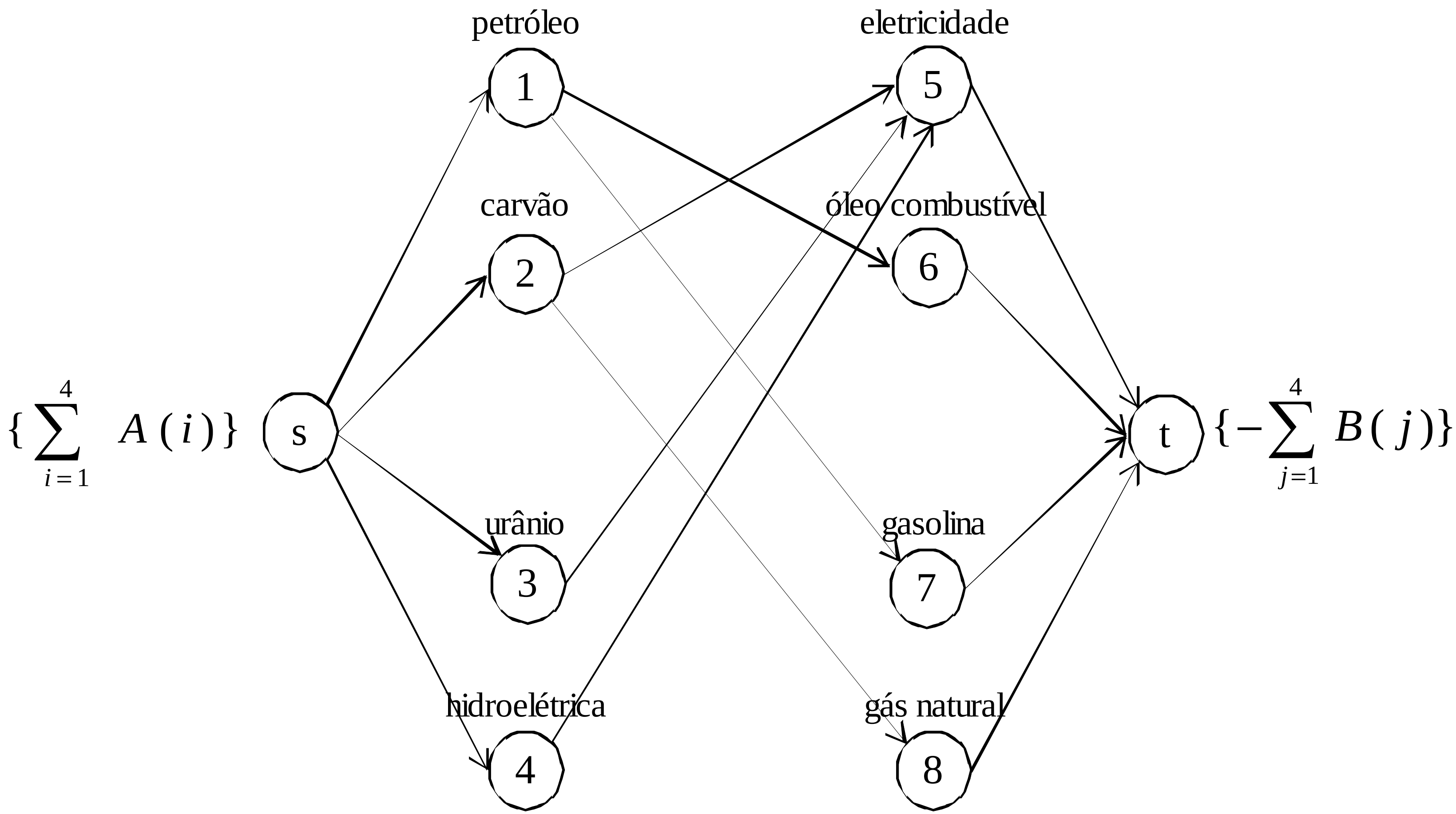
Emparelhamento – Política Ótima de Energia

Como utilizar a matéria prima p/ satisfazer às necessidades energéticas com o menor custo de conversão?

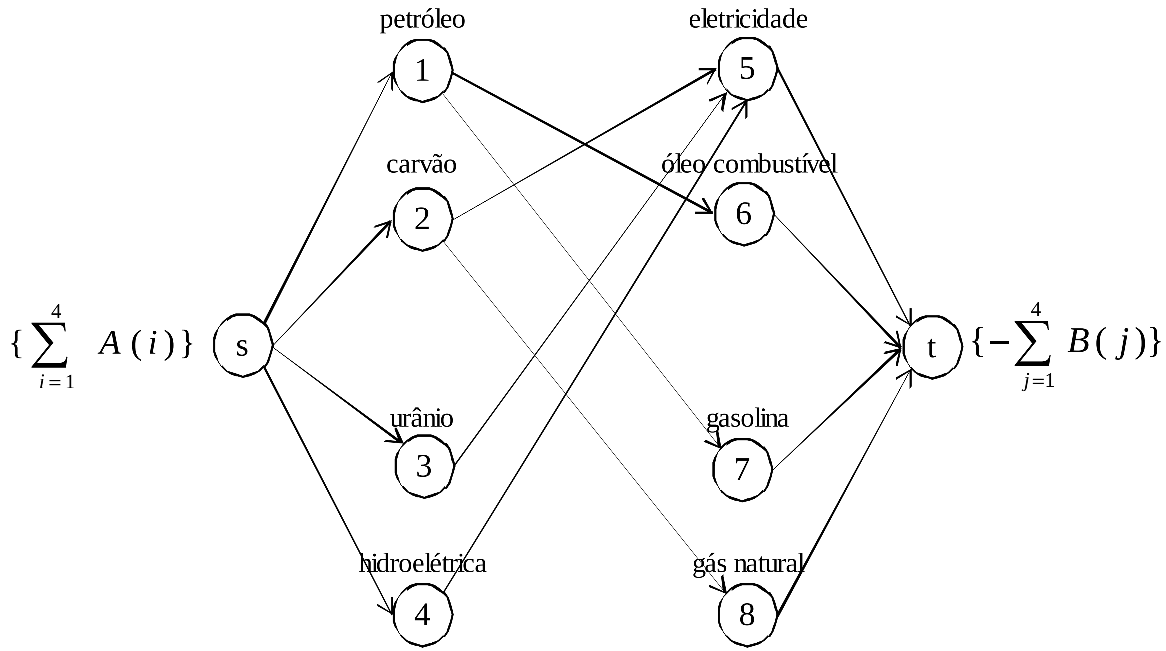


Emparelhamento – Política Ótima de Energia

Como utilizar a matéria prima p/ satisfazer às necessidades energéticas com o menor custo de conversão?



Emparelhamento – Política Ótima de Energia



Tipos de arcos: (s, i) saindo do nó origem s, (j, t) chegando ao nó destino, (i, j) conversão

(s, i) tem capacidade A(i) = disponibilidade da matéria prima i.

(j, t) tem capacidade B(j) = demanda de energia do tipo j.

(i, j) representa a conversão do material i na energia j.

O peso associado aos arcos (i, j) corresponde ao num de unidades de energia j obtida c/ uma unidade de matéria i.

O custo do arco corresponde ao custo da conversão de i em j.

Aplicação 1: Uma secretaria de educação esta colhendo propostas de 4 empresas de transporte escolar para realizar as 4 rotas pré-determinadas. Os custos apresentados pelas empresas são:

	$rota1$	$rota2$	$rota3$	$rota4$
$empresa1$	4000	5000	4500	
$empresa2$	3800	4000		4000
$empresa3$	3000		2000	4500
$empresa4$	3500		4000	5000

a) Supondo que cada empresa só pode ficar com uma rota, montar a rede que minimiza o custo total da secretaria (usando assinalamento).

b) E se cada empresa puder operar em duas rotas, como fica o modelo de assinalamento?

Aplicação 2: A *RentCar* está com uma política de troca da frota considerando o horizonte de 4 anos. No início de cada ano é tomada uma decisão sobre a conservação em operação ou reposição do carro. Um carro deve permanecer em serviço no mínimo 1 e no máximo 3 anos. Veja a tabela de custos de reposição.

Carro adquirido no início do ano	**Custo de reposição por anos em operação**		
	1	2	3
1	4.000	5.400	9.800
2	4.300	6.200	8.700
3	4.800	7.100	---
4	4.900	---	---

Formule este problema como um problema de caminho mínimo.

Transformação da rede

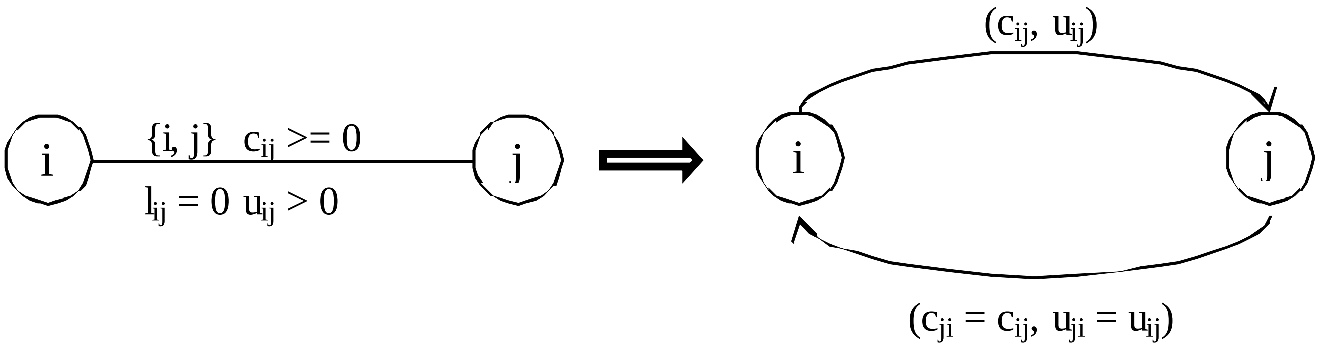
-**Simplificação da rede,**
-**Mostrar equivalência,**
-**Inicialização de método,**
-**Representação de padrão requerido**

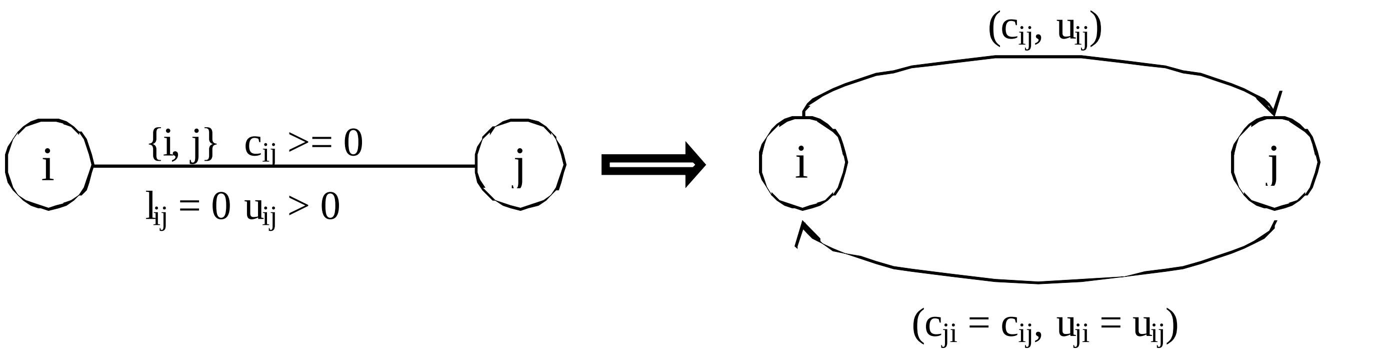
Considerando a formulação do PFCM

1. Arcos não direcionados para arcos direcionados

Seja { i, j } em *A* com $C_{ij} \geq 0$ e capacidade U_{ij},
{i, j} permite fluxo de i para j e de j para i e $X_{ij} + X_{ji} \leq U_{ij}$
Na Função objetivo temos $C_{ij}(X_{ij} + {}_{ij}X_{ji})$
Portanto, se $C_{ij} \geq 0$ então $X_{ij}^* = 0$ ou $X_{ji}^* = 0$. Considere $l_{ij} = 0$.

Transformação: trocar { i, j } pelos arcos (i,j) e (j,i), ambos com custo C_{ij} e capacidade U_{ij}.





Assim, se { i, j } tem fluxo α de i para j na rede transformada teremos $X_{ij} = \alpha$ e $X_{ji}=0$ e vice-versa.

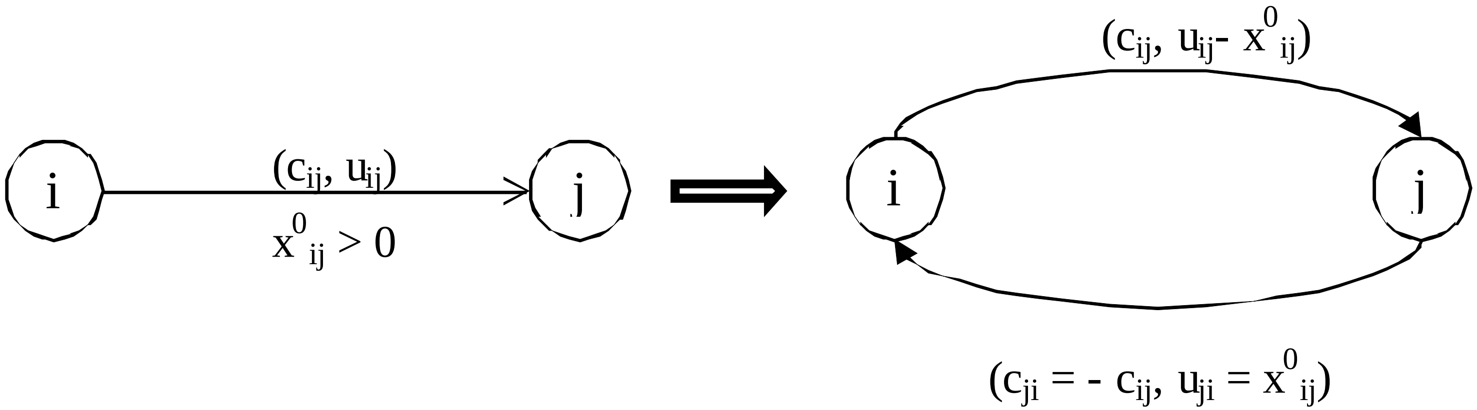
Por outro lado,
Se $X_{ij} \neq 0$ e $X_{ji} \neq 0$ na rede direcionada
Então
Se $X_{ij} – X_{ji} > 0$ o fluxo em { i, j } será de $X_{ij} – X_{ji}$ unidades no sentido de i para j.
Se $X_{ji} – X_{ij} > 0$ o fluxo em { i, j } será de $X_{ji} – X_{ij}$ unidades no sentido de j para i.
Em ambos os casos o fluxo contrario é igual a 0.

Se $X_{ij} = X_{ji}$ o fluxo {i, j} é zero

Rede Residual - Importantíssimo

Considere um fluxo incremental a partir de um fluxo dado, ou uma solução intermediária de um algoritmo.

Dado um fluxo factível X^0(?) em um arco com Lij = 0



Capacidade residual

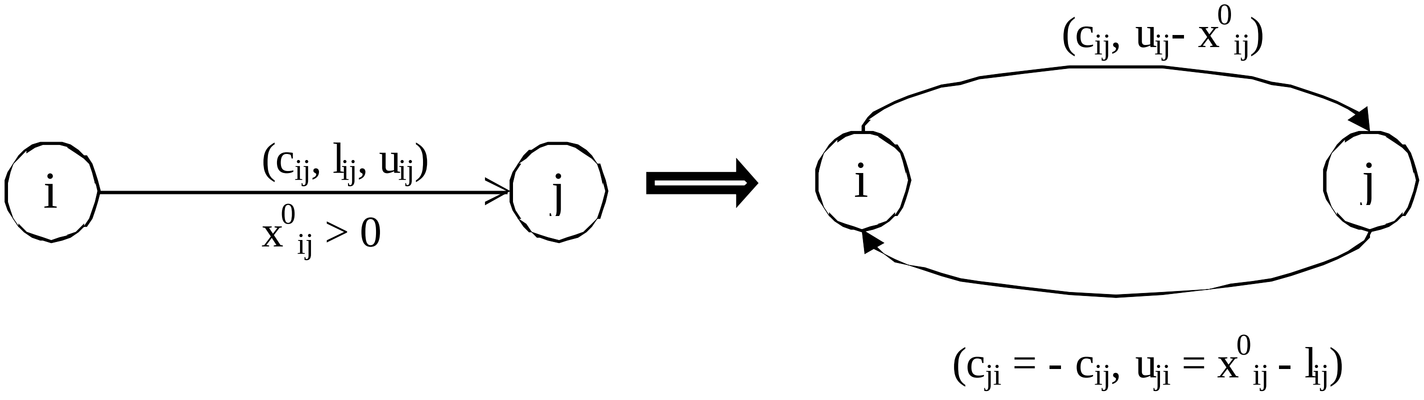
(i, j) Rij = Uij – X^0ij com custo Cij

(j, i) Rji = X^0ij com custo - Cij

Rede Residual - Importantíssimo

Considere um fluxo incremental a partir de um fluxo dado, ou uma solução intermediária de um algoritmo.

Dado um fluxo factível X^0(?) em uma arco com Lij > 0.



Capacidade residual

(i, j) Rij = Uij – X^0ij com custo Cij

(j, i) Rji = X^0ij - Lij com custo - Cij

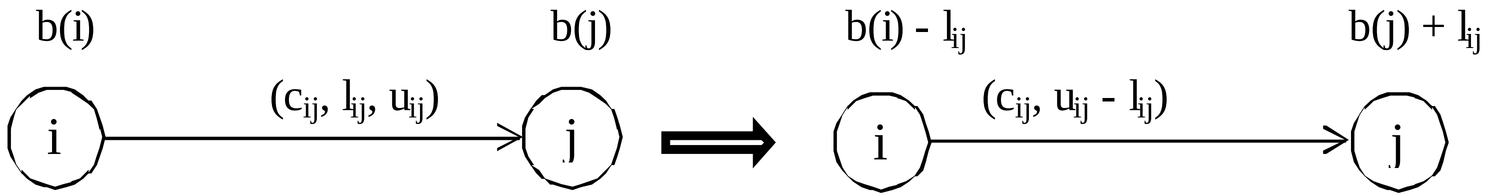
Limite inferior não nulo

Se o arco (i, j) tem o limite inferior lij > 0 sobre xij, trocar xij por x'ij + lij na formulação. Então teremos

Lij <= X'ij + Lij <= Uij => 0 <= X'ij <= Uij – Lij

Segundo a eq. de equilíbrio de fluxo, teremos:

b(i) => b(i) – Lij e b(j) => b(j) + Lij

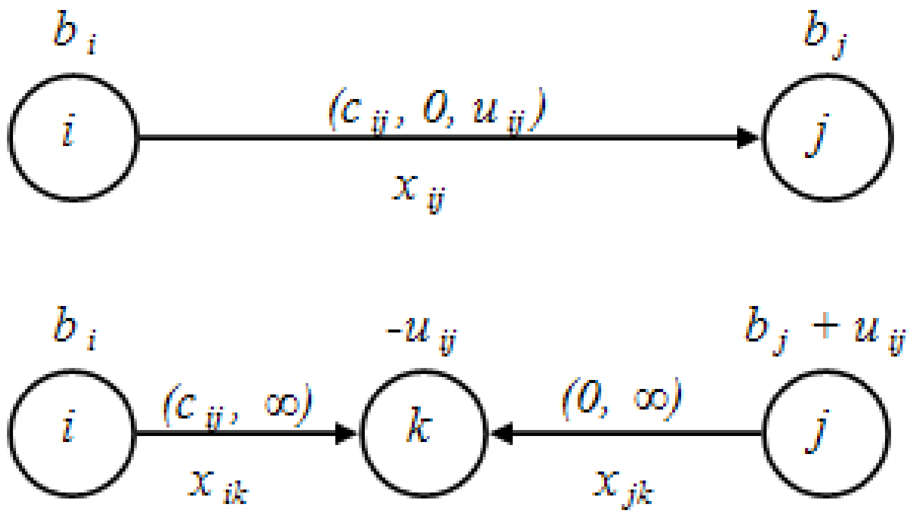


Ocorre o acréscimo de uma constante na função objetivo, que pode ser ignorada no processo de otimização

Removendo arcos capacitados

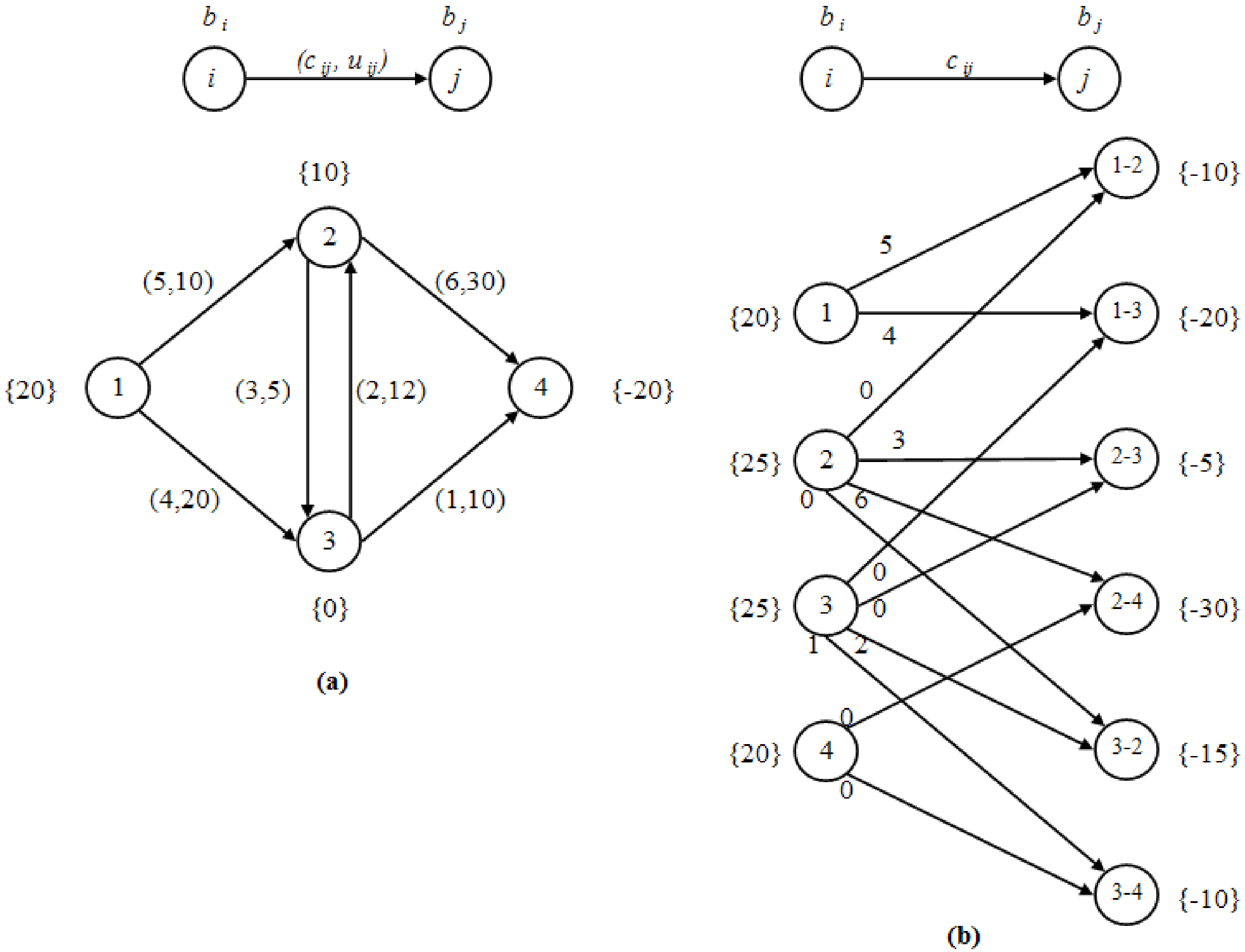
Seja (i, j) c/ capacidade Uij, então introduzir um nó adicional tal que a retrição de capacidade seja transferida p/ a restrição de equilíbrio de fluxo.
Introduzindo uma variável de folga Sij >= 0, e escrevendo a restrição de capacidade na forma de igualdade.

Xij <= Uij => Xij + Sij = Uij multiplicando por (-1) => -Xij –Sij = -Uij
Somando -Xij –Sij = -Uij da eq. de equilíbrio de fluxo do nó j, temos que



Rede bipartida

Esta operação transforma qualquer rede em um rede bipartida.
Nós da esquerda = nós originais com oferta = b(i) +Soma(Uki , k : (k,i) em A) e
Nós da direita = arcos (i, j) em A, c/ demanda = -Uij.
Cada nó da direita tem exatamente dois arcos de entrada com origens em i e j.



A rede transformada tem n+m nós e 2m arcos!

Divisão de um nó

Dividir um nó i em i’ e i“ c/ função de nó de saída e de entrada respectivamente.

Cada arco (i, j) => (i’, j”) de mesmo custo e capacidade.

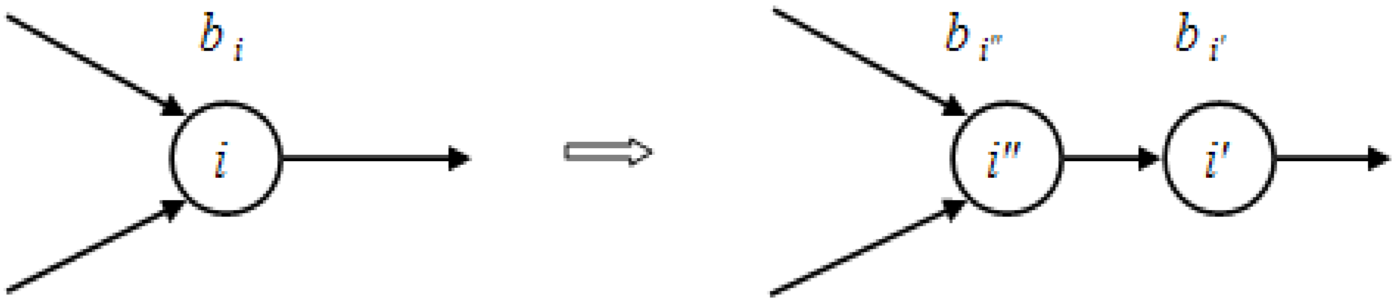
Adicionalmente o arco (i”, i’) c/ custo zero e capacidade ∞, ou de acordo com as suas necessidades.

A oferta/demanda da rede transforma é:

Se b(i) > 0 => b(i”) = b(i) e b(i’) = 0;

Se b(i) < 0 => b(i’) = b(i) e b(i”) = 0

c/c b(i’) = b(“i) = 0



Esta transformação pode ser usada p/ representar situações onde os **nós** tem **capacidade** e **custo por unidade** que passa por ele