BCC 463 – Otimização em Redes
ou
Fluxo em Redes

Prof. Gustavo Peixoto Silva
Departamento de Computação
Univ. Federal de Ouro Preto

$$\begin{aligned} &\textbf{Min } \mathbf{cx} && \textbf{(1) sujeito a} \\ &\mathbf{Ax = b} && \textbf{(2)} \\ &\mathbf{0 \le x \le u,} && \textbf{(3)} \end{aligned}$$

- A equação (1) minimizar o custo devido ao fluxo através dos arcos da rede.
- A equação (2) garante o equilíbrio de fluxo em cada nó da rede.
- E a restrição (3) assegura que o fluxo não ultrapasse a capacidade limite de cada arco.

- Para cada nó *i* temos:
- Se $b_i > 0$ então *i* é um **nó produtor**.
- $b_i < 0$ então *i* é um **nó consumidor**.
- $b_i = 0$ então *i* é um **nó de transbordo**.

Formulação do Problema do Caminho Mínimo como um PPL

1. de um nó origem *s* para um dado nó destino *t*.
   Fazemos $b_S = 1$, $b_t = -1$ e $b_i = 0 \;\; i \neq s$ e $i \neq t$, temos o PCM representado como um problema de fluxo a custo mínimo.

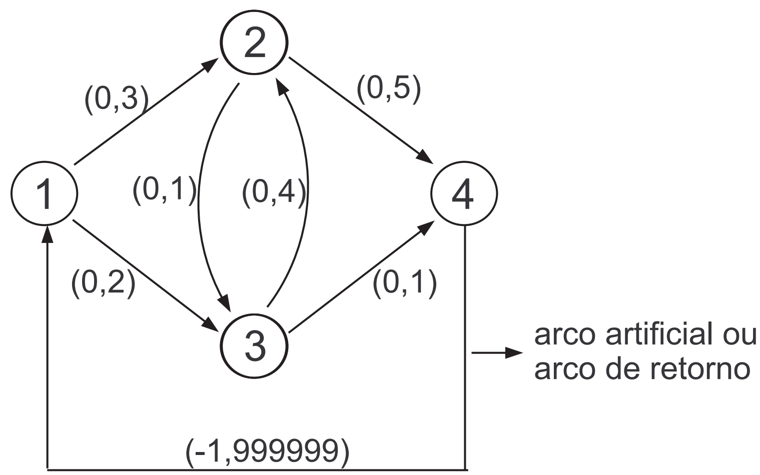
2. de um nó *s* para todos os demais nós da rede.
   Fazendo $b_S = n-1$ e $b_i = 1 \;\; i \neq s$, o problema se transforma e num PFCM.

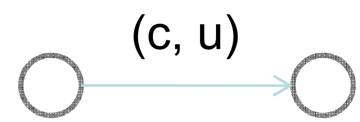
Problema de Fluxo Máximo (PFM)

Enviar a quantidade máxima de fluxo de um dado nó **origem *s*** para um nó **destino *t*** em uma rede capacitada, ou seja, $u_i < \infty$ $i=1,..,m.$

Adicionar um arco artificial de *t* para *s* com custo igual a -1 e u = ∞, e fazendo C_i =0, para os demais arcos, o PFM é transformado em um PFCM.

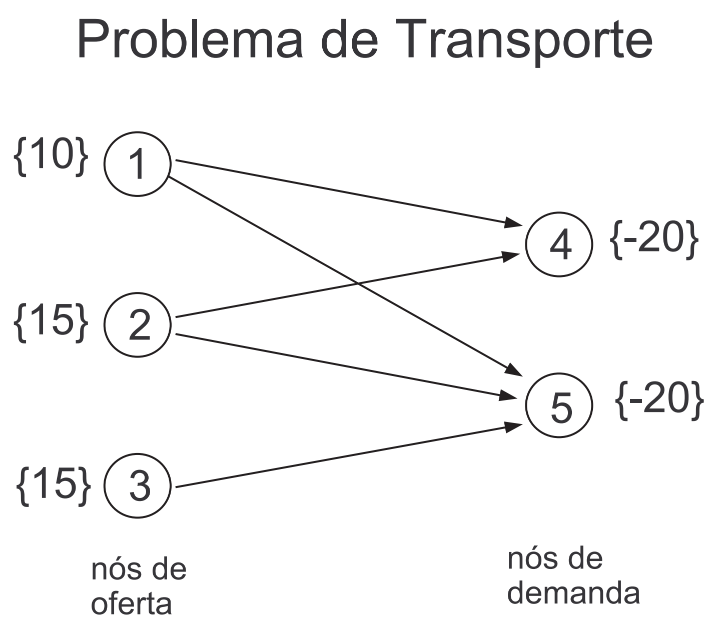
Fluxo Máximo





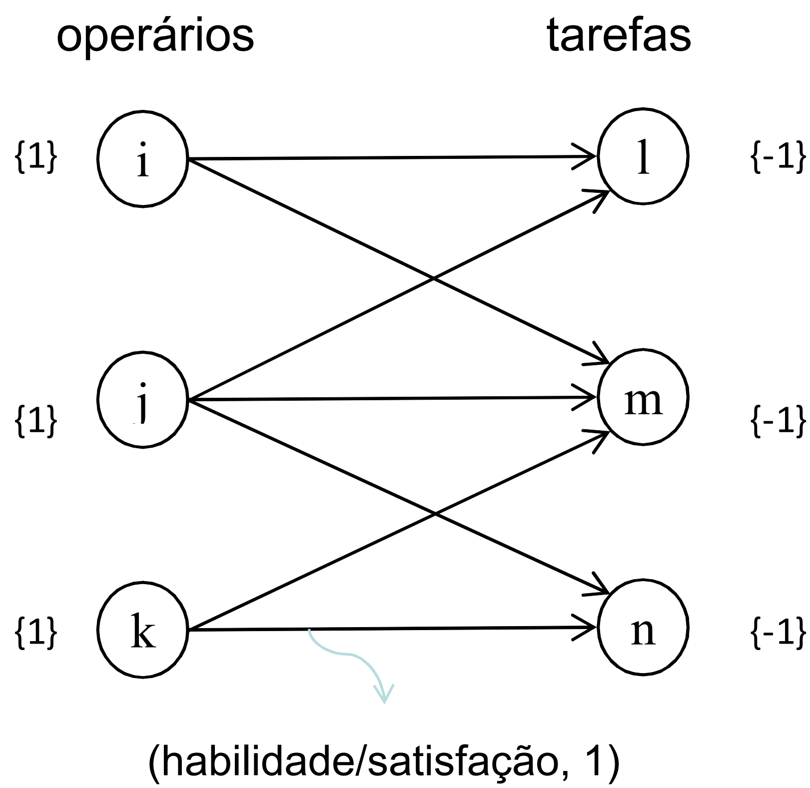
Problema de Transporte

Rede bipartida onde um conjunto contém nós de oferta e o outro contém os nós de demanda. Os arcos ligam os nós de oferta diretamente aos nós de demanda.



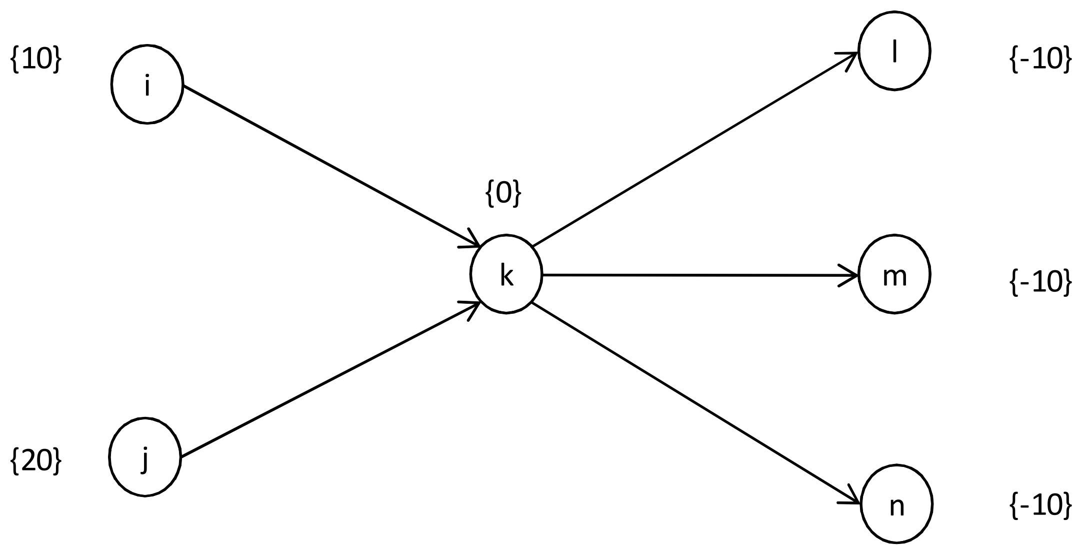
Problema de Designação ou assinalamento (casamento)

Rede bipartida onde o número de nós de oferta é igual ao número de nós de demanda. Para que haja o assinalamento 1 a 1, fazemos b_k=1 onde k é nó de oferta e b_L=-1 onde L é nó de demanda.



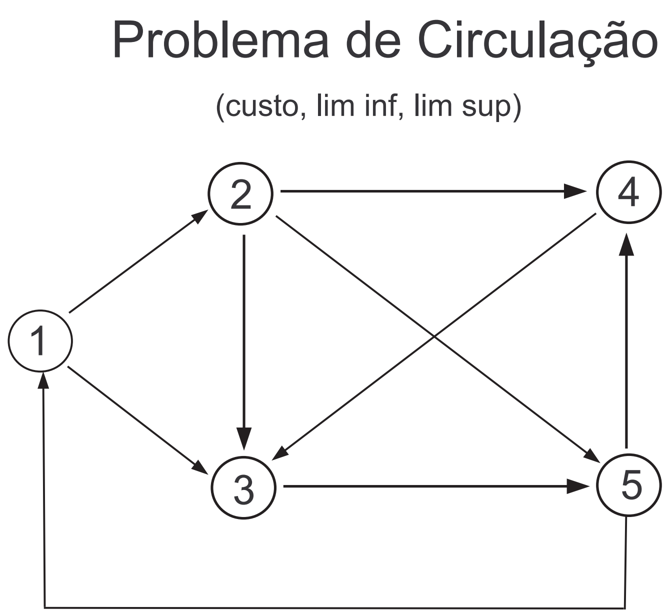
Problema de Transbordo

É um problema de transporte com nós intermediários com b = 0 ou seja a oferta e a demanda dos nós intermediários é igual a 0.



Problema de Circulação

Não existe oferta nem demanda nos nós. Neste caso a rede deve ter alguma característica que gere a movimentação de fluxo na rede.
Assim temos b = 0, e ($C_k < 0$ ou $l_m>0$) para algum k ou m.



Seja bi = 0, para todo i =1,.., 5.
Se ci = 0, para todo i =1,.., 5. Então xi = 0, para todo i =1,.., 5 será a solução ótima.

Caso c_{51} = -1, o modelo PL irá enviar o máximo possível de fluxo através do arco (5, 1) gerando uma solução ≠ 0 vetorial.

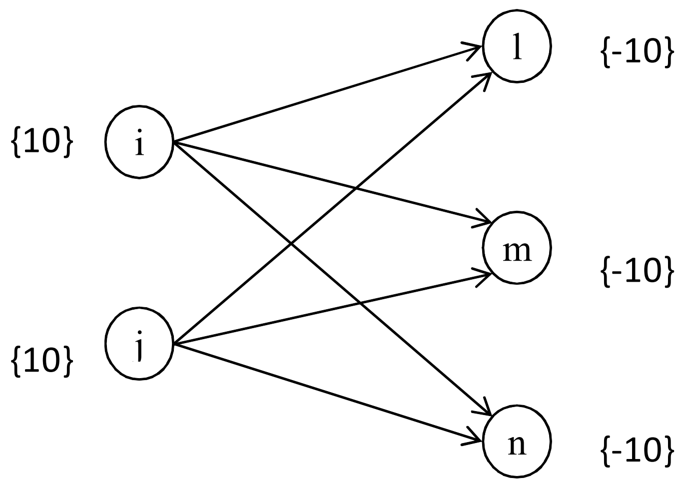
Caso $l_{12} = u_{12} = 2$, então necessariamente passarão 2 un. de fluxo pelo arco (1,2).

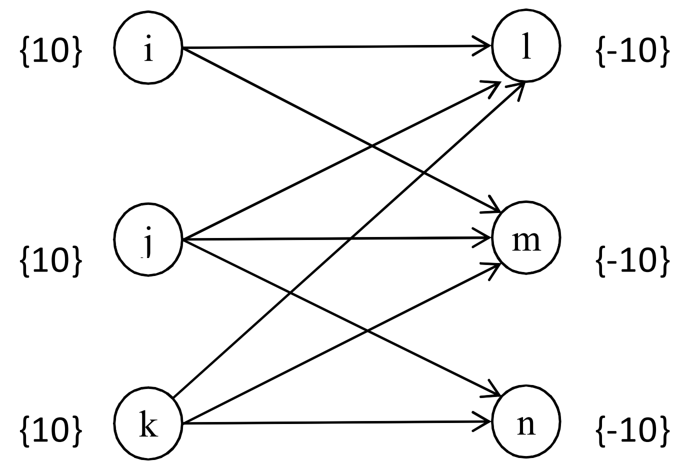
Mas como bi = 0, estas duas unidades deverão transitar por toda a rede, gerando uma circulação.

Problema de Transporte Desbalanceado – transformação da rede

A soma da oferta com a demanda diferem.

Acrescentar um nó artificial no “lado” (oferta/demanda) com menor valor e ligar este nós aos nós do outro lado com arco de custo zero e u = ∞.





As demandas satisfeitas com unidades do nó artificial k são demandas não atendidas e no caso tem custo zero. Pode ser atribuído um custo por demanda não satisfeita através dos arcos artificiais que partem de k.

De forma análoga podemos resolver um problema com o total oferta maior que a demanda total.

Problema de Transbordo – transformação da rede

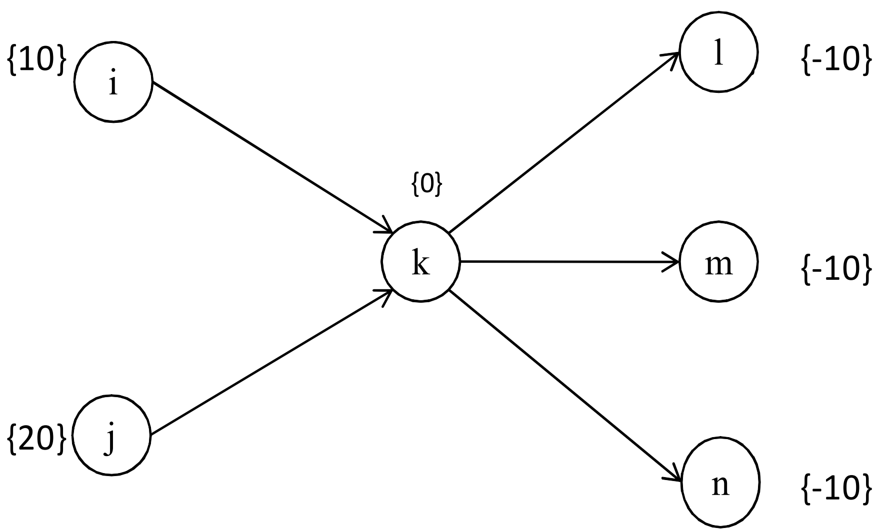
Neste tipo de problema, o transbordo pode ser um armazém de distribuição.

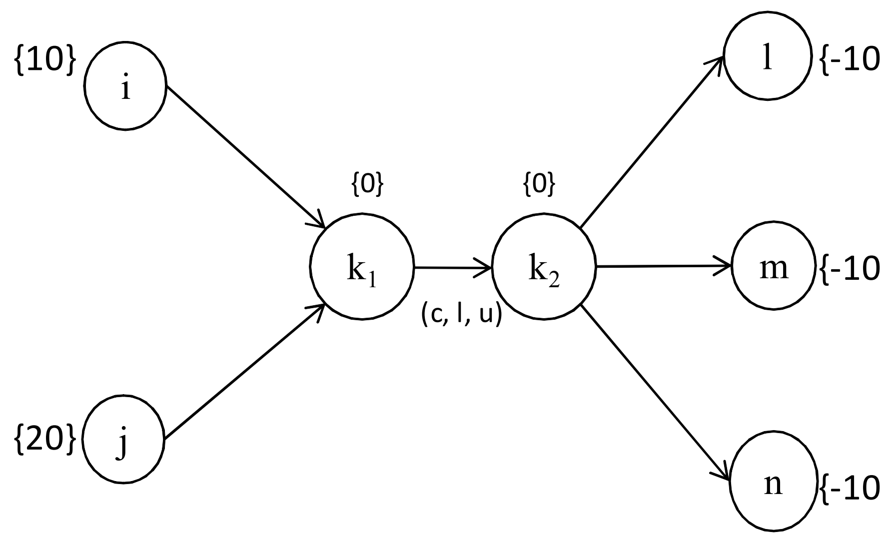
Pode haver um **custo por unidade** de produto (fluxo).

Pode haver uma **capacidade máxima** do armazém

E mesmo uma **quantidade mínima** que o torna economicamente viável.

Como fazê-lo?





Aplicação: Uma secretaria de educação esta colhendo propostas de 4 empresas de transporte escolar para realizar as 4 rotas pré-determinadas. Os custos apresentados pelas empresas são:

	$rota1$	$rota2$	$rota3$	$rota4$
$empresa1$	4000	5000	4500	
$empresa2$	3800	4000		4000
$empresa3$	3000		2000	4500
$empresa4$	3500		4000	5000

a) Supondo que cada empresa só pode ficar com uma rota, montar a rede que minimiza o custo total da secretaria (usando assinalamento).

b) E se cada empresa puder operar em duas rotas, como fica o modelo de assinalamento?