

BCC 463 – Otimização em Redes  
ou  
Fluxo em Redes

Prof. Gustavo Peixoto Silva  
Departamento de Computação  
Univ. Federal de Ouro Preto

## 1. Otimização em Redes

- É um caso particular da Programação Linear, onde pretende-se **minimizar uma função de custo** que depende do **fluxo que passa pelos arcos** de uma rede.
- Os modelos de fluxo em redes apresentam muitas aplicações, associados tanto ao **fluxo de material físico**, como o **fluxo de informações, atribuição de tarefas, designação de locais**, entre outros.
- Devido à estrutura de rede, temos **algoritmos especializados** com grandes **vantagens computacionais**.
- A geometria de uma rede, que relaciona as entidades envolvidas no problema, sempre pode ser desenhada no plano, permitindo fácil compreensão do problema estudado.
- **Nem sempre é possível** representar um problema, mesmo que seja de uma rede real, como um problema de Otimização em Redes.

## **2. Alguns sistemas abordados como redes:**

- Sistemas de produção/distribuição
- Sistemas logísticos militar
- Sistemas de tráfego urbano
- Sistemas de rodovias (transporte)
- Sistemas de comunicação
- Sistema de localização
- Sistema de roteamento e programação
- Redes elétricas
- Rede de dutos/tubulações
- Redes de relacionamento, entre outras.

### 3. Notação e Definições

- Um **grafo direcionado**  $G = (N, A)$  apresenta um conjunto  $N$  de nós e um conjunto  $A$  de arcos. Os arcos são pares ordenados de nós distintos.
- **Arcos** – ligações unidirecionais de transporte de produtos, informações ou outra entidade qualquer.
- **Nós** – locais de produção/consumo, terminais de conexão, etc.
- Uma **rede direcionada** é um grafo direcionado com valores associados aos seus nós e/ou arcos.
- **Arcos** – custos, capacidade, fluxo.
- **Nós** – oferta, demanda, custo/lucro marginal.
- Normalmente utilizamos  $n$  para denotar o número de nós e  $m$  para denotar o número de arcos em  $G$ , ou seja,  $|N| = n$  e  $|A| = m$ .

- A estrutura de uma rede pode ser armazenada em uma matriz  $n \times m$  com uma linha para cada nó, e uma coluna para cada arco, dita **matriz de incidência nó-arco**.
- A coluna correspondente ao arco  $(i, j)$  tem apenas dois elementos não nulos,  $+ 1$  na linha do nó  $i$  e  $- 1$  na linha do nó  $j$ .

$$\text{Min } cx \quad (1) \text{ sujeito a}$$

$$Ax = b \quad (2)$$

$$0 \leq x \leq u, \quad (3)$$

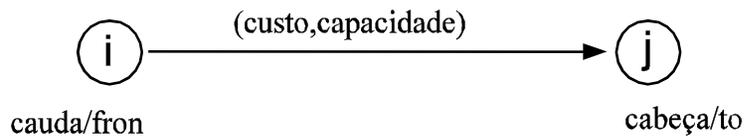
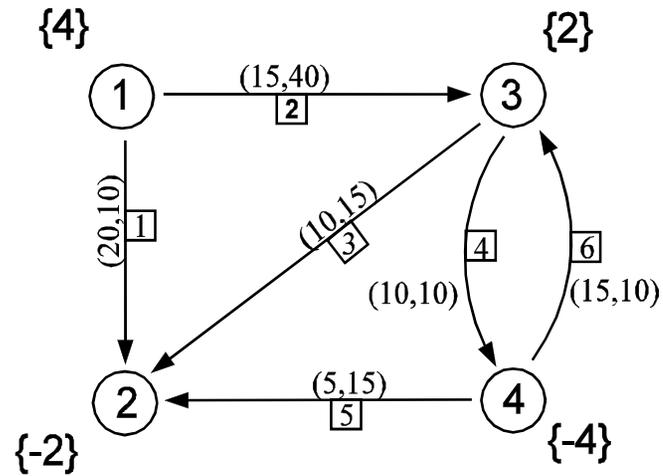
- Onde:
- $c$  = vetor de custos nos arcos
- $x$  = vetor de fluxo nos arcos (incógnita)
- $A$  = matriz de incidência nó-arco
- $b$  = vetor de demanda nos nós
- $u$  = vetor de capacidade dos arcos

**Min  $cx$             (1) sujeito a**

**$Ax = b$             (2)**

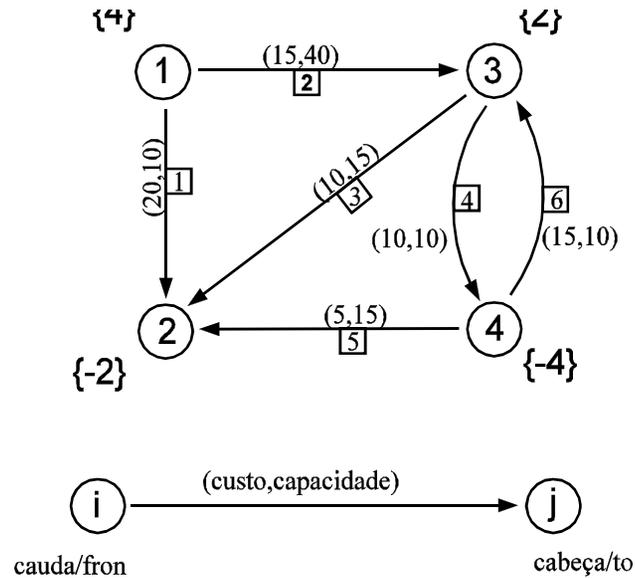
**$0 \leq x \leq u,$       (3)**

- A equação (1) minimizar o custo devido ao fluxo através dos arcos da rede.
- A equação (2) garante o equilíbrio de fluxo em cada nó da rede.
- E a restrição (3) assegura que o fluxo não ultrapasse a capacidade limite de cada arco.
  
- Para cada nó  $i$  temos:
  - Se  $b_i > 0$  então  $i$  é um **nó produtor**.
  - $b_i < 0$  então  $i$  é um **nó consumidor**.
  - $b_i = 0$  então  $i$  é um **nó de transbordo**.



$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \\ & (1,2) & (1,3) & (3,2) & (3,4) & (4,2) & (4,3) \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & , & \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$





O = vetor origem, D = vetor destino, C = vetor de custos, a rede pode ser armazenada assim:

<i>arco</i>	<i>O</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>U</i>
1	1	2	20	10
2	1	3	15	40
3	3	2	10	15
4	3	4	10	10
5	4	2	5	15
6	4	3	15	10

Os Problema de Fluxo em Redes podem ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A} C_{ij} X_{ij} \quad \text{sujeito a} \\
 & \sum_{j:(i,j) \in A} X_{ij} \quad - \quad \sum_{i:(j,i) \in A} X_{ji} \quad = \quad b_i \quad \forall i \in N \\
 & \quad \text{(fluxo sai de i)} \quad - \quad \text{(fluxo entra em i)} \quad = \quad \text{(fluxo disponível em i)} \\
 & 0 \leq X_{ij} \leq U_{ij} \quad \forall (i, j) \in A
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n b_i = 0}$$

Assim temos as seguintes **leis** para modelar um problema de fluxo em redes :

1. Lei de conservação de fluxo nos nós:  $\sum \text{fluxo entra} + b_{\text{nó}} = \sum \text{fluxo sai do nó}$
2. Lei de equilíbrio de fluxo na rede:  $\sum \text{oferta de fluxo} = \sum \text{demanda de fluxo}$

## Definições

### Grafos e redes direcionados

Grafo  $G=(N, A)$  , Rede  $R=(N, A, c, l, u, b, x)$  onde  $N$  é um conjunto de nós e  $A$  é um conjunto de arcos que são pares ordenados de nós distintos.

**Graus de entrada** de um nó é igual ao número de arcos que chagam no nó.

**Grau de saída** de um nó, é igual ao número de arcos que saem do nó.

### Lista de adjacência

Lista de arcos adjacentes  $A(i)$  de um nó  $i$  é o conjunto de arcos que saem de  $i$ .

$$A(i)=\{(i,j) \in A \mid j \in N\}$$

Propriedade: 
$$\sum_{i \in N} |A(i)| = m$$

Como nossa definição não permite arcos “paralelos” nem “laços”, temos  $m < n(n - 1) < n^2$

Um grafo é **esparso** se  $m = O(n)$  e **denso** em caso contrário (em particular, no caso  $m = \Omega(n^2)$ ).

## Caminho

Caminho é uma seqüência alternada contínua de nós e arcos, sem repetições. Pode ter arcos no sentido direto ou no sentido oposto do caminho.

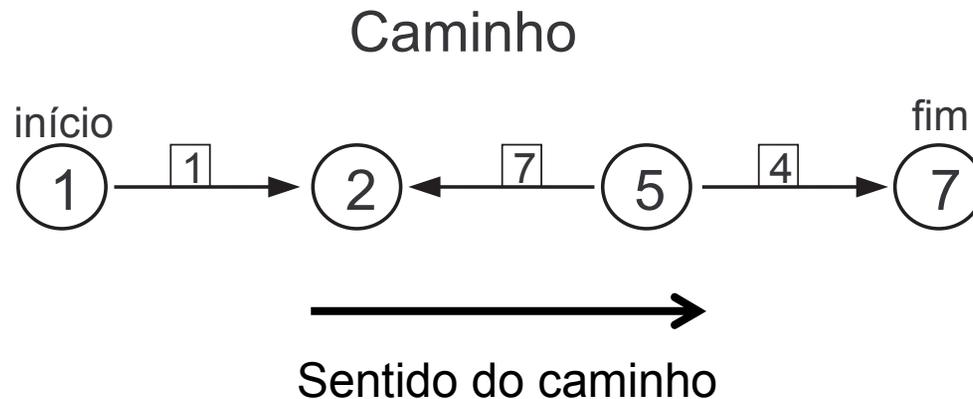
## Caminho direcionado ou Cadeia

É um caminho com todos os arcos orientados no sentido direto.

Observação: Podemos armazenar um caminho definindo um índice (vetor) predecessor  $pred(i)$  para todo nó  $i$  do caminho.

Se  $i$  e  $j$  são nós consecutivos segundo a orientação do caminho, então  $pred(j)=i$ .

Na figura a seguir temos:  $Pred(7)=5$ ,  $pred(5)=2$ ,  $pred(2)=1$  e  $pred(1)=0$



**Ciclo** - É um caminho fechado

**Circuito** - É uma cadeia fechada

**Grafo Conectado** - Existe um caminho conectando qualquer par de nós

**Grafo Fortemente Conectado** - Existe uma cadeia (caminho direcionado) conectando qualquer par de nós

**Árvore** - É um grafo conectado sem ciclos

**Árvore Geradora** - É uma árvore e um subgrafo gerador

**Corte** - É uma partição dos nós de  $N$  em duas partes,  $S$  e  $\bar{S} = N - S$ . Cada corte define um conjunto de arcos a um extremo em  $S$  e outro em  $\bar{S}$ . Estes arcos são denotados por  $[S, \bar{S}]$ .

A capacidade de um corte é dada pela **soma da capacidade** dos arcos que ligam nós de  $\bar{S}$  a nós de  $S$  menos a **soma do limite inferior** dos arcos que ligam nós de  $S$  aos nós de  $\bar{S}$ .

Um vetor de fluxo  $x$  é dito **factível** se satisfaz as condições:

$$\sum_{j:(i,j) \in A} X_{ij} \quad - \quad \sum_{i:(j,i) \in A} X_{ji} \quad = \quad b_i \quad \forall i \in N$$

(fluxo sai de  $i$ )      -      (fluxo entra em  $i$ )      =      (fluxo disponível em  $i$ )

$$0 \leq X_{ij} \leq U_{ij} \quad \forall (i, j) \in A$$

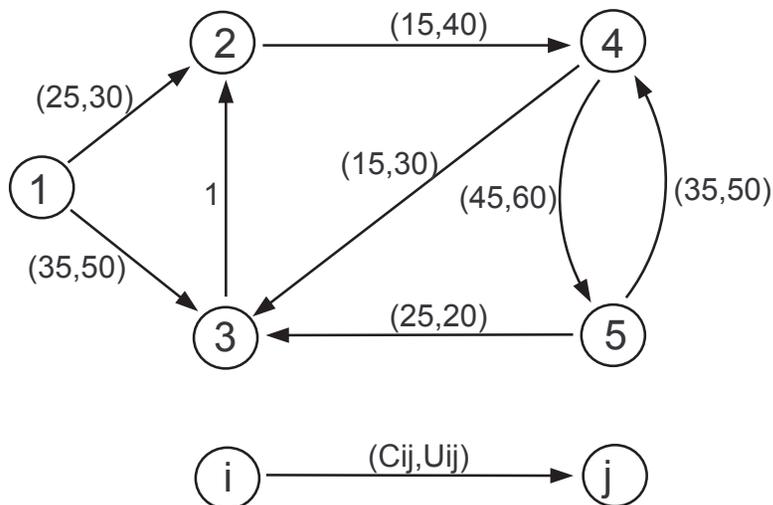
$$\boxed{\sum_{i=1}^n b_i = 0}$$

## Armazenamento de uma rede

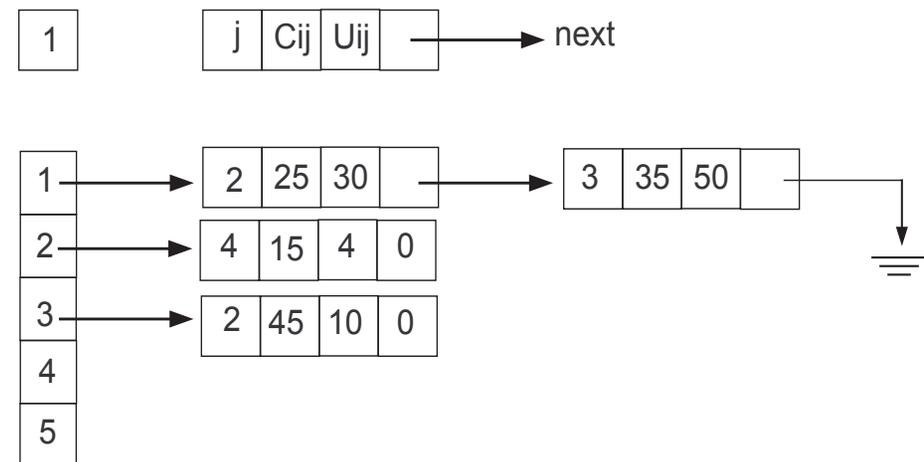
Lista de nós adjacentes: Para cada nó  $i$  temos uma lista ligada contendo os seus nós adjacentes  $j$  e as informações do arco  $(i,j)$ .

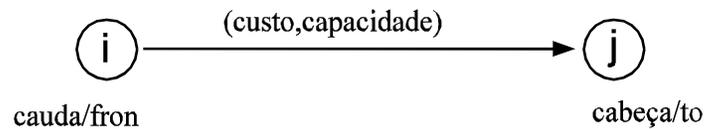
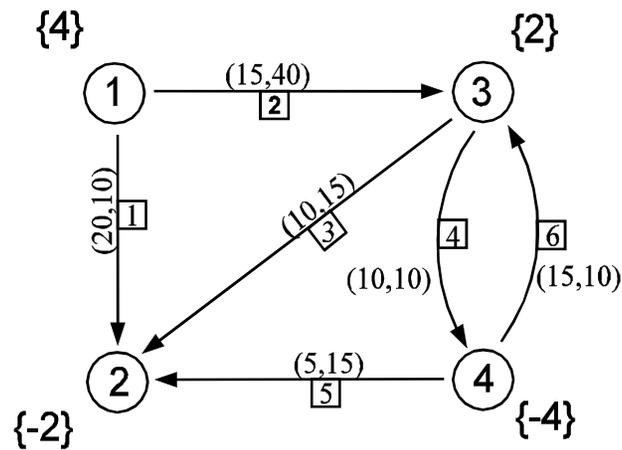
Para acessar as  $n$  listas temos um vetor de ponteiros para a primeira célula de cada lista. Essa primeira célula é dita “*first*”. Se a lista de adjacentes do nó  $i$  é vazia  $first(i)=0$ .

Armazenamento de Uma Rede



Representação forward star





## Armazenamento de uma rede

Nós trabalharemos com os vetores  $O[ ]$ ,  $D[ ]$ ,  $C[ ]$ , etc.

Teremos também um vetor de listas  $adj[ ]$  com os índices dos arcos adjacentes aos nó  $i$ .

$adj[i] = \{1, 2\}$ ,  $adj[2] = \{ \}$ ,  $adj[3] = \{3, 4\}$ ,  $adj[4] = \{5, 6\}$

## Problemas Clássicos de Otimização em Redes

**Problema do Caminho Mínimo (PCM):** Qual é a melhor forma de percorrer uma rede indo de um dado **ponto origem** a um outro **ponto destino**, com o menos custo possível?

Condições

**Problema de Fluxo Máximo (PFM):** Qual é o máximo de fluxo que pode-se enviar de um dado **ponto origem** a outro **ponto destino** da rede, respeitando a capacidade dos arcos? Como é feito este envio?

Condições

**Problema de Fluxo com Custo Mínimo(PFCM):** Considerando que

1. é conhecido o custo por unidade de fluxo que passa em cada arco da rede,
2. que os arcos podem ser capacitados,
3. e que precisamos enviar unidades de fluxo alocados em determinados nós (oferta/produção) para outros nós (demanda/consumo),

Devemos responder: Como fazer este envio pela rede com o menor custo possível?

## Formulação do Problema do Caminho Mínimo como um PPL

1. de um nó origem  $s$  para um dado nó destino  $t$ .  
Fazemos  $b_s = 1$ ,  $b_t = -1$  e  $b_i = 0$   $i \neq s$  e  $i \neq t$ , temos o PCM representado como um problema de fluxo a custo mínimo.
2. de um nó  $s$  para todos os demais nós da rede.  
Fazendo  $b_s = n-1$  e  $b_i = 1$   $i \neq s$ , o problema se transforma e num PFCM.