Exercícios 2.4

5. Encontre a solução ótima do seguinte problema de programação linear pelo método simplex tabular:

$Max\ Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$
s.r.
$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$
$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 11$
$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

6. Uma firma faz três produtos e tem três máquinas disponíveis para produção. Para resolver sua escala de produção, modela o seguinte PPL.

$Max\ Z = 4x_1 + 4x_2 + 7x_3$
s.r.
$x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 100$ (horas na máquina 1)
$2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 100$ (horas na máquina 2)
$8x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 100$ (horas na máquina 3)
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Resolva o problema pelo método simplex tabular e responda às questões:

a) Qual é a solução ótima encontrada?

b) Quando a solução final é encontrada, existe algum tempo disponível em qualquer uma das três máquinas? Quanto?

7. Um navio tem um compartimento de carga com capacidade de peso de 160.000 kg e capacidade de volume de 70.000 m³. O dono do navio foi contratado para levar cargas de carne de boi empacotada e grão. O peso total da carne de boi disponível é 85.000 kg; o peso total do grão disponível é 100.000 kg. O volume por massa da carne de boi é 0,2 m³ por quilo, e o volume por massa do grão é 0,4 m³ por quilo. O lucro para transportar carne de boi é de R$ 0,35 por quilo, e o lucro para transportar grão é de R$ 0,12 por quilo. O dono do navio é livre para aceitar toda ou parte da carga disponível; ele quer saber quantos quilos de carne e quantos quilos de grãos devem ser transportados para maximizar seu lucro. Resolva pelo método simplex tabular.

8. A Óleos Unidos S.A. é uma empresa do ramo de derivados de petróleo que manufatura três combustíveis especiais com base na mistura de dois insumos: um extrato mineral e um solvente. No processo de produção não existe perda de material, de forma que a quantidade de litros de extrato mineral somada à quantidade de litros de solvente utilizada para a fabricação de um tipo de combustível resulta no total de litros daquele combustível. A proporção da mistura está descrita na tabela a seguir:

	Combustível A	**Combustível B**	**Combustível C**
Extrato mineral	8 litros	5 litros	4 litros
Solvente	5 litros	4 litros	2 litros

Suponha que a Óleos Unidos tenha disponíveis 120 litros de extrato mineral e 200 litros de solvente, e que os lucros líquidos esperados para os três combustíveis sejam de R$ 20,00, R$ 22,00 e R$ 18,00, respectivamente. Responda ao que se pede.

a) Estabeleça um modelo de programação linear que determine a quantidade de cada combustível a ser fabricada, dadas as restrições de matéria-prima.

b) Quanto de cada produto deve ser manufaturado para maximizar o lucro da companhia? De quanto é esse lucro? (Resolva pelo método simplex tabular.)

c) Na condição de otimalidade, existe alguma matéria-prima com folga? Qual? De quanto é essa sobra?

9. Um pequeno entregador pode transportar madeira ou frutas em seu carrinho de mão, mas cobra R$ 20,00 para cada fardo de madeira e R$ 35,00 por saco de frutas. Os fardos pesam 1 kg e ocupam 2 dm³ de espaço. Os sacos de fruta pesam 1 kg e ocupam 3 dm³ de espaço. O carrinho tem capacidade para transportar 12 kg e 10 dm³, e o entregador pode levar quantos sacos e fardos desejar.

a) Formule um problema de programação linear para determinar quantos sacos de fruta e quantos fardos de madeira devem ser transportados para que o entregador ganhe o máximo possível.

b) Resolva o problema pelo método simplex tabular e determine qual será o lucro do entregador e como ele deve encher o seu carrinho.

c) O carrinho será totalmente utilizado? Sobrará capacidade de carga ou capacidade de volume? Quanto?

10. Uma indústria vende dois produtos, P1 e P2, ao preço por tonelada de R$ 70,00 e R$ 60,00, respectivamente. A fabricação dos produtos é feita em toneladas e consome recursos que chamaremos de R1 e R2. Esses recursos estão disponíveis nas quantidades de 10 e 16 unidades, respectivamente. A produção de 1 tonelada de P1 consome 5 unidades de R1 e 2 unidades de R2, e a produção de 1 tonelada de P2 consome 4 unidades de R1 e 5 unidades de R2.

Formule um problema de programação linear para determinar quantas toneladas de cada produto devem ser fabricadas para se obter o maior faturamento possível.

a) Qual será o faturamento máximo?

b) Quanto de cada produto deve ser fabricado?

c) Como os recursos estão sendo utilizados? Estão sendo subutilizados ou são insuficientes?

=============== Fazer somente até aqui ===============

2.5 Problemas de forma não-padrão

Nem todos os problemas de programação linear estão na forma padrão, isto é, são problemas de maximização com todas as restrições do tipo menor ou igual. Quando o formato não for o padrão, devemos utilizar diversos métodos antes de empregar o simplex. Por exemplo: quando tivermos um problema em que todas as restrições são do tipo menor ou igual e a função-objetivo for de minimização, devemos alterar o problema como mostrado na Figura 2.22.

Lembre que a igualdade *Min Z* = *Max* (−*Z*) é sempre válida (quando a solução ótima existir). Mas nem sempre as modificações são tão simples.

Considere o problema a seguir de maximização simples em que uma das restrições é do tipo maior ou igual.

$$\begin{aligned}
&Max\,Z = 3x_1 - 5x_2\\
&s.r.\\
&x_1 \le 4\\
&2x_2 \le 12\\
&3x_1 + 2x_2 \ge 18\\
&x_1 \ge 0 \text{ e } x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

A primeira providência a ser tomada seria a introdução das variáveis de folga. Nesse caso, nas duas primeiras restrições não teríamos problema e obteríamos as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
x_3 &= 4 - x_1\\
x_4 &= 12 - 2x_2
\end{aligned}$$

A terceira restrição seria diferente das duas primeiras por causa do sinal da restrição (≥). Se utilizássemos o mesmo artifício de antes, isto é, se definíssemos uma variável como a diferença entre o RHS (lado direito da restrição) e o LHS (lado esquerdo da restrição) e a considerássemos a variável criada maior ou igual a zero, essa não corresponderia ao desejado. O RHS, nesse caso, é menor que o LHS por definição da restrição, logo a diferença seria negativa. Como, para o método simplex funcionar, todas as variáveis devem ser maiores ou iguais a zero, isso não resolveria nosso problema.

Poderíamos, então, toda vez que o sinal da restrição fosse do tipo maior ou igual, definir uma variável que, em vez de representar a folga entre o RHS e o LHS (que seria negativa), representaria o excesso entre o LHS e o RHS. No nosso caso:

$$x_5 = 3x_1 + 2x_2 - 18 \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1 + 2x_2 - x_5 = 18$$

O valor de x_5 seria, portanto, obrigatoriamente não negativo. Isso resolveria a questão de que todas as variáveis de um problema a ser solucionado pelo método simplex devem ser não negativas. Contudo, outro problema apareceria: o de achar a solução inicial. O dicionário inicial e a solução (óbvia) associada a ele seriam dados por·

$$\begin{aligned}
x_3 &= 4 - x_1 & &\text{Solução associada}\\
x_4 &= 12 \quad 2x_2 & &\\
x_5 &= 3x_1 + 2x_2 - 18 & \Rightarrow \; &(0, 0, 4, 12, -18)\\
Z &= 3x_1 \quad 5x_2 & &
\end{aligned}$$

Note que o valor de x_5 nessa solução fere a restrição do problema, que obriga x_5 a ser maior ou igual a zero. Portanto, a solução associada é uma solução do problema, porém não é viável.

A maneira de se resolver esse e outros problemas em que achar a solução inicial viável não é obvia envolve a utilização de métodos como o 'M grande' ou 'função-objetivo

Figura 2.22

Transformação de uma PL de minimização para maximização

$$\begin{aligned}
&Min\,Z = 3x_1 - 5x_2 & & & &Max\,W = -Z = -3x_1 + 5x_2\\
&s.r. & & & &s.r.\\
&x_1 \le 4 & & & &x_1 \le 4\\
&2x_2 \le 12 & &\Rightarrow & &2x_2 \le 12\\
&3x_1 + 2x_2 \le 18 & & & &3x_1 + 2x_2 \le 18\\
&x_1 \ge 0 \text{ e } x_2 \ge 0 & & & &x_1 \ge 0 \text{ e } x_2 \ge 0
\end{aligned}$$