Exercícios 2.1

5. Obtenha graficamente a solução ótima do problema de programação linear a seguir:

$Max\ Z = x_1 + 3x_2$

$s.r.$

$4x_1 + x_2 \geq 30$

$10x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

6. A indústria Alumilâminas S.A. iniciou suas operações há um mês e vem conquistando espaço no mercado de laminados brasileiro, com contratos fechados de fornecimento para todos os três tipos diferentes de lâminas de alumínio que fabrica: espessuras fina, média e grossa. Toda a produção da companhia é realizada em duas fábricas, uma localizada em São Paulo e a outra no Rio de Janeiro. Segundo os contratos fechados, a empresa precisa entregar 16 toneladas de lâminas finas, 6 toneladas de lâminas médias e 28 toneladas de lâminas grossas. Devido à qualidade dos produtos da Alumilâminas S.A., há uma demanda extra para cada tipo de lâmina. A fábrica de São Paulo tem um custo de produção diária de R$ 100.000,00 para uma capacidade produtiva de 8 de lâminas finas, 1 de lâminas médias e 2 de lâminas grossas por dia. O custo de produção diário da fábrica do Rio de Janeiro é de R$ 200.000,00 para uma produção de 2 de lâminas finas, 1 de lâminas médias e 7 de lâminas grossas. Quantos dias cada uma das fábricas deverá operar para atender aos pedidos ao menor custo possível? (Resolva pela análise gráfica.)

7. Um pizzaiolo trabalha 8 horas por dia e faz 16 pizzas por hora, caso faça somente pizzas, e 9 calzones por hora, se fizer somente calzones. Ele gasta 40 g de queijo para preparar uma pizza e 60 g de queijo para fazer um calzone. Sabendo que o total disponível de queijo é de 5 kg por dia, e que a pizza é vendida a R$ 18,00 e o calzone a R$ 22,00, pergunta-se: quantas unidades de pizzas e calzones uma pizzaria deve vender diariamente para maximizar a sua receita, considerando que ela tem três pizzaiolos? (Resolva pela análise gráfica.)

8. A Esportes Radicais S.A. produz pára-quedas e asa-deltas em duas linhas de montagem. A primeira linha tem 100 horas semanais disponíveis para a fabricação dos produtos, e a segunda linha tem um limite de 42 horas semanais. Cada um dos produtos requer 10 horas de processamento na linha 1, enquanto na linha 2 o pára-quedas requer 3 horas e a asa-delta, 7 horas. Sabendo que o mercado está disposto a comprar toda a produção da empresa e que o lucro unitário do pára-quedas é de R$ 60,00 e o da asa-delta é de R$ 40,00, encontre a programação de produção que maximize o lucro da Esportes Radicais S.A. (Resolva pela análise gráfica.)

9. A empresa Have Fun S.A. produz uma bebida energética muito consumida pelos freqüentadores de danceterias noturnas. Dois dos componentes utilizados na preparação da bebida são soluções compradas de laboratórios terceirizados — solução Red e solução Blue — que provêem os principais ingredientes ativos do energético: extrato de guaraná e cafeína. A companhia quer saber quantas doses de 10 ml de cada solução deve incluir em cada lata da bebida, para satisfazer as exigências mínimas padronizadas de 48 g de extrato de guaraná e 12 g de cafeína e, ao mesmo tempo, minimizar o custo de produção. Por acelerar o batimento cardíaco, a norma-padrão também prescreve que a quantidade de cafeína seja de, no máximo, 20 g por lata. Uma dose da solução Red contribui com 8 g de extrato de guaraná e 1 g de cafeína, enquanto uma dose da solução Blue contribui com 6 g de extrato de guaraná e 2 g de cafeína. Uma dose de solução Red custa R$ 0,06 e uma dose de solução Blue custa R$ 0,08. (Resolva pela análise gráfica.)

10. A empresa de logística Deixa Comigo S.A. tem uma frota de caminhões para realizar transportes de cargas para terceiros. A frota é composta por caminhões médios com condições especiais para transportar sementes e grãos prontos para o consumo, como arroz e feijão. A frota tem uma capacidade de peso de 70.000 kg e um limite de volume de 30.000 m³. O próximo contrato de transporte refere-se a uma entrega de 100.000 kg de sementes e 85.000 kg de grãos, sendo que a Deixa Comigo S.A. pode aceitar levar tudo ou somente uma parte da carga, deixando o restante para outra transportadora. O volume ocupado pelas sementes é de 0,4 m³ por kg, e o volume dos grãos é de 0,2 m³ por kg. Sabendo que o lucro para transportar as sementes é de R$ 0,12 por kg e o lucro para transportar os grãos é de R$ 0,35 por kg, descubra quantos quilogramas de sementes e de grãos a Deixa Comigo S.A. deve transportar para maximizar o seu lucro. (Resolva pela análise gráfica.)

EXERCÍCIOS 2.2

1. Obtenha a solução ótima para o problema abaixo pelo ~~método analítico~~ apresentado nesta seção. (Confira o resultado com a solução encontrada para a questão 1 da lista de exercícios 2.1.)

   $Max\ Z = 4x_1 + 3x_2$ Resolver pelo Simplex

   $s.r.$

   $x_1 + 3x_2 \leq 7$

   $2x_1 + 2x_2 \leq 8$

   $x_1 + x_2 \leq 3$

   $x_2 \leq 2$

   $x_1, x_2 \geq 0$

2. Solucione o problema de programação linear abaixo utilizando o método ~~analítico visto nesta seção.~~ (Confira o resultado com a solução encontrada na questão 3 da lista de exercícios 2.1.)

   $Max\ Z = 4x_1 + 8x_2$ Resolver pelo Simplex

   $s.r.$

   $3x_1 + 2x_2 \leq 18$

   $x_1 + x_2 \leq 5$

   $x_1 \leq 4$

   $x_1, x_2 \geq 0$

3. Resolva pelo método ~~analítico (dicionário)~~ o seguinte problema de programação linear:

   $Max\ Z = 2x_1 + 6x_2$ Resolver pelo Simplex

   $s.r.$

   $4x_1 + 3x_2 \leq 12$

   $2x_1 + x_2 \leq 8$

   $x_1, x_2 \geq 0$

4. Encontre a solução ótima do problema de programação linear abaixo por meio do método ~~analítico (dicionário)~~:

   $Max\ Z = 2x_1 - x_2 + x_3$ Resolver pelo Simplex

   $s.r.$

   $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60$

   $x_1 - x_2 + x_3 \leq 10$

   $x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$

   $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

5. Determine, usando o método ~~analítico (dicionário)~~, a solução ótima do seguinte PPL:

   $Max\ Z = 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 8x_4$ Resolver pelo Simplex

   $s.r.$

   $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 15$

   $x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 13$

   $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

6. Um agricultor tem uma fazenda com 200 km² onde planeja cultivar trigo, arroz e milho. A produção esperada é de 1.800 kg por km² plantado de trigo, 2.100 kg por km² plantado de arroz e 2.900 kg por km² plantado de milho. Ele tem condições de armazenar no máximo 700.000 kg de qualquer um dos produtos. Sabendo que o trigo dá um lucro de R$ 1,20 por kg, o arroz, R$ 0,60 por kg, e o milho de R$ 0,28 por kg, usando o método analítico (dicionário), determine quantos km² de cada produto devem ser plantados para maximizar o lucro do agricultor.

7. A Capitão Caverna S.A., localizada em Pedra Lascada, aluga três tipos de barcos para passeios marítimos: jangadas, supercanoas e arcas com cabines. A companhia fornece com o barco um capitão para navegá-lo e uma tripulação, que varia de acordo com a embarcação: 1 funcionário para jangadas, 2 para supercanoas e 3 para arcas. A companhia tem 4 jangadas, 8 supercanoas e 3 arcas, e em seu corpo de funcionários, 10 capitães e 18 tripulantes. O aluguel é por diárias e a Capitão Caverna S.A. lucra 50 marfins por jangada, 70 marfins por supercanoas e 100 marfins por arca. Quantos barcos de cada tipo devem ser alugados para que a empresa tenha o maior lucro possível? De quanto é esse lucro? (Resolva pelo método analítico visto nesta seção.)

8. A empresa de artigos de couro Pele Mimosa Ltda. fabrica dois tipos de produtos: malas e mochilas. As malas são vendidas com um lucro de R$ 50,00 por unidade e o lucro unitário por mochila é igual a R$ 40,00. A quantidade de horas necessária para confeccionar cada produto assim como o número total de horas disponíveis em cada departamento, são apresentados na tabela a seguir.

Departamento	Capacidade por departamento (horas por dia)	Horas necessárias	
		Mala	Mochila
1) Corte	300	2	0
2) Tingimento	540	0	3
3) Costura	440	2	2
4) Embalagem	300	6/5	3/2

   a) Sabendo que há uma demanda excedente tanto de malas quanto de mochilas, determine quantas unidades de cada produto a Pele Mimosa Ltda. deve fabricar diariamente para maximizar o seu lucro. (Resolva pelo método analítico.)

   b) Se temos a informação de que a empresa produz diariamente 120 unidades de malas e 30 unidades de mochilas, em quanto o planejamento ótimo aumenta o lucro em relação ao existente?

9. A Picolé Lelé é a marca local preferida pelos habitantes das Ilhas Calorândicas, que consomem todos os picolés cremosos que a empresa consegue fabricar. No entanto, por se localizar no meio do oceano, a Picolé Lelé Ltda. tem algumas restrições de fabricação, devido à escassez de matéria-prima fresca. Preocupados em maximizar o lucro da firma, seus dirigentes elaboraram o seguinte quadro informativo, para que possamos ajudá-los, por meio do método analítico estudado nesta seção, a descobrir quantos picolés de cada sabor devem produzir diariamente de forma a maximizar o lucro da companhia.

Sabor	Lucro por picolé	Quantidade de leite em cada picolé (litros)	Quantidade de açúcar em cada picolé (por 100 gramas)	Polpa de fruta em cada picolé (litros)
Morango	R$ 1,00	0,45	0,50	0,10
Uva	R$ 0,90	0,50	0,40	0,15
Limão	R$ 0,95	0,40	0,40	0,20
Máximo disponível		200	150	60

10. A empresa Serra Serra Serrador fabrica três tipos de madeiras compensadas (placas de aglomerados). Os dados a seguir resumem a produção em horas por unidade em cada uma das três operações de produção, o tempo máximo disponível em cada operação e o lucro unitário de cada placa.

Aglomerado	Operações em horas			Lucro por unidade
	I	II	III	
Placa A	2	2	4	R$ 40,00
Placa B	5	5	2	R$ 30,00
Placa C	10	3	2	R$ 20,00
Tempo máximo disponível	900	400	600	

Quantas unidades de cada placa de aglomerado devem ser produzidas, de maneira a otimizar o lucro da serraria? Resolva pelo método analítico (dicionário).

2.3 Programação linear e seus teoremas

Vamos agora apresentar alguns teoremas a respeito das soluções de um problema de programação linear. Para tal, necessitamos da definição de um conjunto convexo. Em vez de tentarmos defini-lo com o rigor matemático, utilizaremos uma definição intuitiva. Um **conjunto convexo** é um conjunto de pontos em que todos os segmentos de reta que unem dois de seus pontos são internos ao conjunto, isto é, todos os pontos de cada segmento também pertencem ao conjunto original. Graficamente, um exemplo de conjunto convexo e não convexo é representado na Figura 2.19.

Naturalmente, só podemos visualizar essa definição graficamente quando existem apenas duas variáveis no PPL. Passemos, então, à definição de alguns teoremas pertinentes ao estudo de programação linear. Foge do escopo deste texto a demonstração desses teoremas. Sugerimos aos leitores interessados em suas demostrações alguns textos mais avançados, como Hiller & Liberman (1995).

TEOREMA I

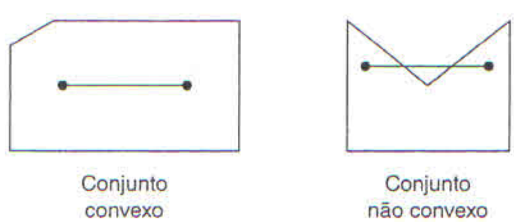
O conjunto de todas as soluções viáveis de um modelo de programação linear é um conjunto convexo.

TEOREMA II

Toda solução compatível básica (solução óbvia) do sistema de equações lineares (dicionário) de um modelo de pro-

Figura 2.19

Representação gráfica de conjuntos convexos e não convexos



gramação linear é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, isto é, do conjunto convexo de soluções.

TEOREMA III

Se uma função-objetivo possui um único ponto ótimo finito, então esse é um ponto extremo do conjunto convexo de soluções viáveis.

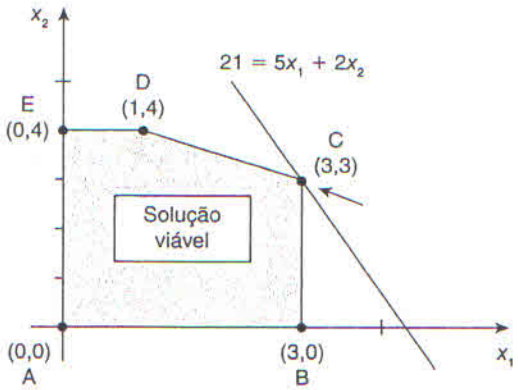
TEOREMA IV

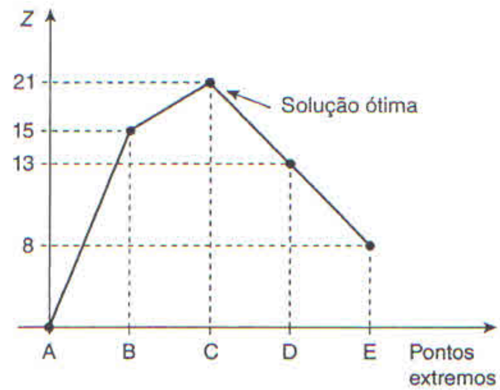
Se a função-objetivo assume o valor ótimo em mais de um ponto do conjunto de soluções viáveis (soluções múltiplas), então ela assume esse valor para pelo menos dois pontos extremos do conjunto convexo e para qualquer combinação convexa desses pontos extremos, isto é, todos os pontos do segmento de reta que une esses dois extremos, ou seja, a aresta do polígono que os contém.

Baseados nos teoremas anteriores, uma maneira prática de resolver pequenos problemas de duas variáveis é verificar o valor da função-objetivo nos pontos extremos do polígono de soluções viáveis. A Figura 2.20 representa tal procedimento para o problema que acabamos de resolver.

Figura 2.20

Representação gráfica do valor de *Z* nos pontos extremos





EXERCÍCIOS 2.3

Resolver graficamente

1. Encontre a solução ótima do problema de programação linear abaixo, desenhando o conjunto de soluções viáveis e testando o valor da função-objetivo em cada um dos pontos extremos. (Confira o resultado com as soluções encontradas na primeira questão das listas de exercícios 2.1 e 2.2.)

Max $Z = 4x_1 + 3x_2$

s.r.

$x_1 + 3x_2 \leq 7$

$2x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

2. Resolva o seguinte problema de programação linear por meio do teste do valor da função-objetivo em cada ponto extremo do conjunto de soluções viáveis e conforme os teoremas vistos nesta seção. (Confira a resposta com a solução encontrada na segunda questão da lista de exercícios 2.1.)

Resolver graficamente

Min $Z = x_1 + 2x_2$

s.r.

$x_1 + x_2 \geq 1$

$-5x_1 + 2x_2 \geq -10$

$3x_1 + 5x_2 \geq 15$

$x_1, x_2 \geq 0$

3. Solucione o problema de programação linear abaixo, testando o valor da função-objetivo nos pontos extremos do conjunto de soluções viáveis. (Confira o resultado com a solução da questão 3 dos exercícios 2.1 e da questão 2 dos exercícios 2.2.)

Max $Z = 4x_1 + 8x_2$

s.r.

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

Resolver graficamente

4. Encontre a solução ótima do seguinte problema de programação linear testando o valor da função-objetivo em cada um dos pontos extremos do conjunto de soluções viáveis:

$Max\ Z = 80x_1 + 75x_2$
$s.r.$
$x_1 + 3x_2 \leq 4$
$2x_1 + 5x_2 \leq 150$
$x_1, x_2 \geq 0$

5. Resolva o problema de programação linear abaixo, testando o valor da função-objetivo em cada um dos pontos extremos do conjunto de soluções viáveis:

$Min\ Z = 4x_1 + 8x_2$
$s.r.$
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$
$x_1 + x_2 \geq 5$
$x_1 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

6. As indústrias Sara Cura Produtos Farmacêuticos desejam produzir dois medicamentos, um analgésico e um antibiótico, que dependem de duas matérias-primas *A* e *B*, disponíveis em quantidades de 8 e 5 ton, respectivamente. Na fabricação de 1 ton de analgésico são empregadas 1 ton da matéria *A* e 1 ton da matéria *B*, e na fabricação de 1 ton de antibiótico são empregadas 4 ton de *A* e 1 ton de *B*. Sabendo que cada tonelada de antibiótico é vendida a R$ 8,00 e de analgésico a R$ 5,00, encontre, por meio da determinação dos pontos extremos do conjunto de soluções viáveis, a quantidade de toneladas de medicamentos a ser produzida pelas indústrias Sara Cura, de maneira a maximizar sua receita.

7. Uma pequena malharia produz dois tipos de camisas: de manga curta e de manga comprida. Toda a produção é feita e vendida para um distribuidor, que compra tudo o que é produzido. A confecção de cada camisa passa por três seções de trabalho: corte, costura e acabamento. A Tabela 1 mostra os tempos necessários em cada seção:

Tabela 1

Tempo de fabricação de uma camisa em cada seção de trabalho

Produto	Tempo de fabricação (em horas)		
	Corte	Costura	Acabamento
Manga curta	3	1,5	5
Manga comprida	3	3	3

A quantidade de horas por semana disponíveis em cada seção de trabalho é apresentada na Tabela 2:

Tabela 2

Limites de capacidade de fabricação

Seção de trabalho	Homens/hora por semana
Corte	210
Costura	180
Acabamento	330

Utilize os teoremas apresentados na Seção 2.3 para determinar a quantidade de cada tipo de camisa que deve ser fabricada de maneira a maximizar o lucro da empresa, sabendo que o lucro unitário proporcionado pela camisa de manga curta é de R$ 2,00 e o proporcionado pela camisa de manga comprida é de R$ 3,00.

8. A indústria Bonecas Sinistras S.A. produz dois tipos de boneca: a Vampiresca e a Lobimulher. O processo de montagem de cada uma dessas bonecas requer duas pessoas. Os tempos de montagem são os seguintes:

Modelo	Montador 1	Montador 2
Vampiresca	6 min	2 min
Lobimulher	3 min	4 min
Máximo de horas disponíveis	8	8

A política da companhia é a de balancear toda a mão-de-obra em todos os processos de montagem. Na verdade, a gerência deseja programar o trabalho de modo que nenhum montador tenha mais de 30 minutos de trabalho por dia do que o outro. Isso quer dizer que, em um período regular de oito horas, os dois montadores deverão ter um mínimo de sete horas e meia de trabalho. Considerando que o mercado está disposto a comprar toda a produção da Bonecas Sinistras S.A. e que a firma tem um lucro de R$ 2,00 por unidade de Vampiresca e R$ 1,00 por Lobimulher, quantas unidades de cada boneca devem ser produzidas por dia? Quanto tempo trabalhará cada montador por dia? (Resolva por meio da determinação dos pontos extremos do conjunto de soluções viáveis.)

9. Um jovem está saindo com duas namoradas: Sheila Peres e Ana Paula Ambrósio. Ele sabe, por experiência, que:

- Ana Paula, elegante, gosta de freqüentar lugares sofisticados, mais caros, de modo que uma saída de três horas custará R$ 240,00.
- Sheila, mais simples, prefere um divertimento mais popular, de modo que uma saída de três horas lhe custará R$ 160,00.
- Seu orçamento permite-lhe dispor de R$ 960,00 mensais para diversão.

- Seus afazeres escolares lhe dão liberdade de, no máximo, 18 horas e 40.000 calorias de sua energia para atividades sociais.
- Cada saída com Ana Paula consome 5.000 calorias, mas com Sheila, mais alegre e extrovertida, ele gasta o dobro.
- Ele gosta das duas com a mesma intensidade.

Como o jovem deve planejar a sua vida social para obter o número máximo de saídas? (Encontre a solução ótima determinando os pontos extremos do conjunto de soluções viáveis.)

10. A Cat Without Fat S.A. é uma empresa fabricante de comida enlatada para gatos, cujo principal diferencial competitivo é o baixo nível de gordura de seus produtos. A empresa utiliza, na produção, uma mistura de frango (75% de proteína e 25% de gordura) que custa R$ 3,00 por quilo e/ou uma mistura de peixe (90% de proteína e 10% de gordura) que custa R$ 5,00 por quilo. Que combinação de matérias-primas a empresa deve utilizar, a fim de preparar uma comida para gatos com, no máximo, 15% de gordura ao menor custo possível por quilo?

a) Modele o problema. Dica: as variáveis de decisão deste problema representam os percentuais de matérias-primas utilizados para preparar o enlatado, devendo, portanto, ter valores entre 0 e 1 (ou entre 0% e 100%).

b) Encontre a solução ótima por meio da determinação do valor da função-objetivo em cada ponto extremo do conjunto de soluções viáveis.

2.4 Programação linear e a forma tabular

O procedimento que relatamos na Seção 2.2 é chamado de *método simplex analítico*. Quando estivermos resolvendo um problema de programação linear manualmente, será conveniente utilizar a forma tabular do método simplex. Em vez de utilizar os dicionários, devemos usar o quadro simplex para registrar apenas as informações essenciais: os coeficientes das variáveis, as constantes das restrições e as variáveis básicas e não básicas.

Devemos, portanto, simplificar a forma de um dicionário, estabelecendo um quadro equivalente. Depois, devemos verificar como cada operação analítica realizada pode ser automatizada por meio de regras de comando. Por fim, devemos verificar como tomar a decisão de parada do algoritmo.

Voltemos ao nosso primeiro exemplo e ao seu respectivo dicionário inicial, já com a introdução das variáveis de folga.

Problema forma-padrão	**Dicionário inicial**
$Max\, Z = 5x_1 + 2x_2$	$Z = 5x_1 + 2x_2$
s.r.	
$x_1 \leq 3$	$x_3 = 3 - x_1$
$x_2 \leq 4$	$x_4 = 4 - x_2$
$x_1 + 2x_2 \leq 9$	$x_5 = 9 - x_1 - 2x_2$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Lembre-se de que as variáveis originais do problema são as não básicas e as variáveis de folga são as básicas (lado esquerdo das equações). O próximo passo para a obtenção do quadro inicial é a modificação do dicionário inicial para obter o dicionário inicial modificado, que servirá como ponto de partida para a formação do quadro simplex inicial. Para efetuar essa modificação, devemos trocar de lado todas as variáveis do problema (nesse rol estão incluídas as variáveis originais, as de folga e Z), isto é, levar todas as variáveis para o lado esquerdo das equações. Dessa maneira, podemos conseguir o dicionário inicial modificado para o problema dado:

Dicionário inicial modificado

$Z - 5x_1 - 2x_2 = 0$

$x_1 + x_3 = 3$

$x_2 + x_4 = 4$

$x_1 + 2x_2 + x_5 = 9$

Vale notar que, no dicionário inicial modificado, as variáveis da equação que representam a função-objetivo trocaram de lado, isto é, quando queríamos aumentar o valor de Z, procurávamos as variáveis da equação que tinham coeficientes positivos. Como as variáveis mudaram de lado na equação, devemos agora procurar as que tenham sinais negativos. A decisão de parar ocorrerá quando não tivermos mais variáveis com coeficientes negativos, ou seja, quando todos os coeficientes tiverem sinal não negativo (positivo ou zero).

Agora, a transformação do dicionário inicial modificado para o quadro inicial é direta. Primeiro, vamos definir o formato do quadro, de maneira a facilitar sua compreensão. O quadro terá, do lado esquerdo, as variáveis básicas e, do lado direito, as constantes das equações. No meio ficarão todos os coeficientes das restrições e da função-objetivo. Para padronização, colocaremos na primeira linha a equação (zero) que representa a função-objetivo. Isso não é obrigatório, mas facilita a explanação e a compreensão do método.