PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Prof. Gustavo Peixoto Silva
Departamento de Computação
Univ. Federal de Ouro Preto

5 modelos

M9.1 - Problema de Seleção de Projetos – ver Taha Capítulo 9

Cinco projetos estão sob avaliação em um planejamento de três anos. A tabela abaixo nos dá os retornos esperados assim como os desembolsos anuais associados.

	Desembolsos (milhões $/ano)			Retorno líquido (milhoes $)
Projeto	Ano 1	Ano 2	Ano 3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Fundos Disponíveis	25 M$	20 M$	30 M$	----------

Quais são os projetos que devem ser selecionados tal que o retorno seja maximizado no período?

O problema é do tipo sim-não e as variáveis de decisão são:

X_j = 1 se o projeto j for selecionado e

X_j = 0 se o projeto não for selecionado

Problema de Seleção de Projetos – continuação

	Desembolsos (milhões $/ano)			Retorno líquido (milhoes $)
Projeto	Ano 1	Ano 2	Ano 3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Fundos Disponíveis	25 M$	20 M$	30 M$	----------

O modelo fica da seguinte forma:

Max $Z(X) = 20X_1 + 40X_2 + 20X_3 + 15X_4 + 30X_5$ sujeito a

$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 7X_4 + 8X_5 <= 25$

$X_1 + 7X_2 + 9x_3 + 4X_4 + 6X_5 <= 20$

$8X_1 + 10X_2 + 2x_3 + X_4 + 10X_5 <= 30$

$X_j \in \{0, 1\}$

Problema de Seleção de Projetos – continuação

O modelo fica da seguinte forma:

Max $Z(X) = 20X_1 + 40X_2 + 20X_3 + 15X_4 + 30X_5$ sujeito a

$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 7X_4 + 8X_5 <= 25$

$X_1 + 7X_2 + 9x_3 + 4X_4 + 6X_5 <= 25$

$8X_1 + 10X_2 + 2x_3 + X_4 + 10X_5 <= 25$

$X_j \in \{0, 1\}$

A solução ótima inteira é $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1$, $X_5 = 0$ e $Z(X) = 95$ M$.

Se resolvermos o Problema de Programação Linear real a solução seria:

$X_1 = 0,5789$, $X_2 = X_3 = X_4 = 1$, $X_5 = 0,7368$ e $Z(X) = 108,68$. Esta solução não faz sentido!

Se arredondarmos a solução teremos:

$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = 1$, que é uma solução inviável.

Portanto, para resolver problemas de Programação Linear Inteira não podemos simplesmente arredondar a solução real obtida!!!

M9.2 - Problema da mochila – *Knapsack problem*

	Peso unit.	Volume unit.	Valor unit.
Item i	Wi (ton)	Vi (m^3)	Ri ($)
1	5	1	400
2	8	8	700
3	3	6	600
4	2	5	500
5	7	4	400

Cinco itens podem ser carregados em uma mochila (container, caminhão, aeronave, etc). O peso e o volume máximo de carga permitidos são 112 t e 109 m^3 respectivamente.

Formule o PLI e ache a carga mais valiosa sendo que podem ser levadas quais quer quantidades de um mesmo item, inclusive nenhuma unidade!

Problema de cobertura

Neste tipo de problema, varias instalações oferecem serviços comuns a diferentes localidades. O objetivo é determinar o número mínimo de instalações que cobrirão todas as localidades. Também pode ser considerado o custo de cada instalação em função da localidade.

Exemplo: hospitais, escolas, creches, corpo de bombeiro, posto policial etc.

- As variáveis são binárias;
- Os coeficientes à esquerda das restrições são 0 ou 1;
- O lado direito de cada restrição é do tipo >= 1 e
- A função objetivo minimiza $c_1x_1 + c_2x_2 + ...+ c_nx_n$, com $c_j > 0$.

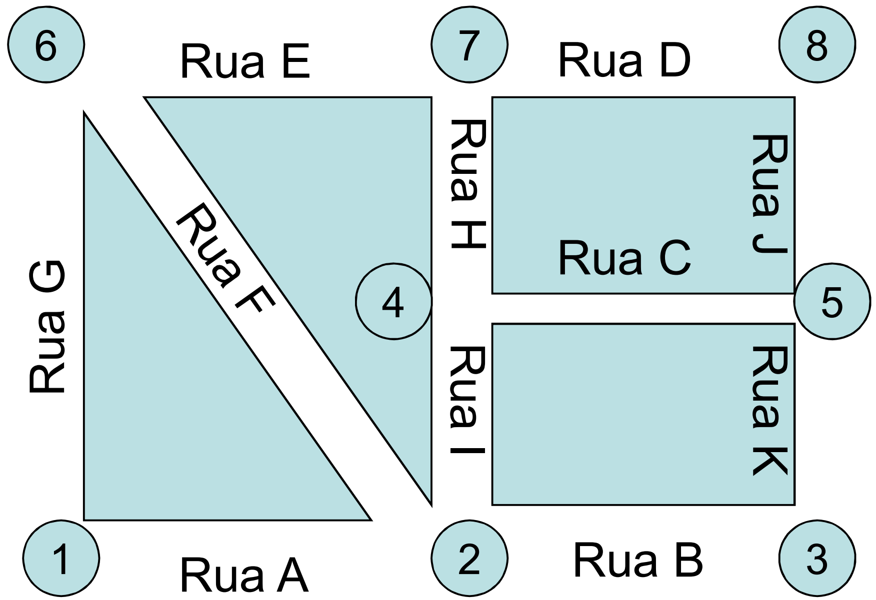
Se c_j representa o custo de instalação no local j, então estes coeficientes podem ser diferentes de 1.

M9.3 - Instalação de telefones

Uma universidade quer instalar telefones de emergência em locais selecionados. Assim, decidiu-se que cada uma das ruas do campus terá pelo menos um telefone.

É lógico que colocar os telefones nas esquinas é mais proveitoso. O mapa do campus mostra que se requer no máximo oito localizações de telefones.

Modele o problema para escolher o número mínimo de telefones que atenda às restrições do problema.

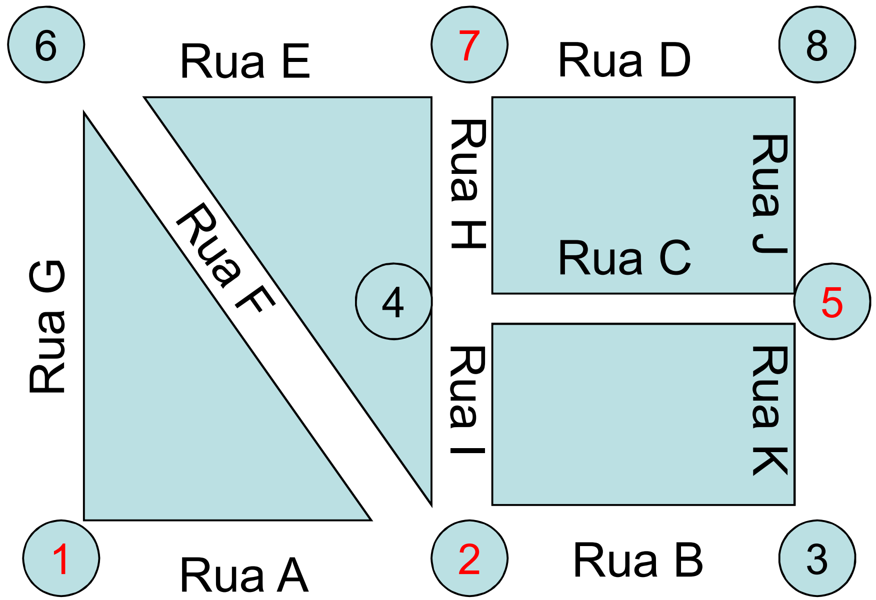


M9.3 - Instalação de telefones

VD: x_i = 1 se o telefone na localidade i for instalado e 0 cc, i = 1, ... 8

FO: Min $Z = \sum_{i=1}^{8} X_i$ Sujeito a

A: $x_1 + x_2 >= 1$
B: $x_2 + x_3 >= 1$
C: $x_4 + x_5 >= 1$
D: $x_7 + x_8 >= 1$
E: $x_6 + x_7 >= 1$
F: $x_2 + x_6 >= 1$
G: $x_1 + x_6 >= 1$
H: $x_4 + x_7 >= 1$
I: $x_2 + x_4 >= 1$
J: $x_5 + x_8 >= 1$
K: $x_3 + x_5 >= 1$
xi $\in$ { 0, 1 }



M9.4 Uma transportadora entrega diariamente cargas fracionadas ao seus 5 clientes, segundo 6 rotas pré-estabelecidas. As rotas com seus respectivos clientes atendidos são:

Rotas	1	2	3	4	5	6
Clientes	1, 2, 4	4, 3, 5	1, 2, 5	2, 3, 5	1, 4, 2	1, 3, 5

As distâncias entre o depósito e os clientes são dadas a seguir

j i	Dep.	1	2	3	4	5
Dep.	0	10	12	16	9	8
1	10	0	32	8	17	10
2	12	32	0	14	21	20
3	16	8	14	0	15	18
4	9	17	21	15	0	11
5	8	10	20	18	11	0

O objetivo é determinar as rotas a serem escolhidas tal que todos os clientes sejam atendidos por pelo menos uma rota e que a distância total percorrida seja mínima.
Obs. Toda rota deve iniciar e terminar no depósito.

Calculando o custo de cada rota:

R1: (0 –> 1): 10 + (1 –> 2): 32 + (2 –> 4): 21 + (4 –> 0): 9 = 72

R2: 9 + 15 + 18 + 8 = 50

R3: 10 + 32 + 20 + 8 = 70

R4: 12 + 14 + 18 + 8 = 52

R5: 10 + 17 + 21 + 12 = 60

R6: 10 + 8 + 18 + 8 = 44

Rotas	1	2	3	4	5	6
Clientes	1, 2, 4	4, 3, 5	1, 2, 5	2, 3, 5	1, 4, 2	1, 3, 5

j i	Dep.	1	2	3	4	5
Dep.	0	10	12	16	9	8
1	10	0	32	8	17	10
2	12	32	0	14	21	20
3	16	8	14	0	15	18
4	9	17	21	15	0	11
5	8	10	20	18	11	0

Determinar as rotas a serem escolhidas tal que todos os clientes sejam atendidos por pelo menos uma rota e que a distância total percorrida seja mínima. Obs. Toda rota deve iniciar e terminar no depósito.

M9.5 - A região metropolitana de Belo Horizonte inclui 6 cidade que precisam ser atendidas por ambulâncias. Devido à proximidade de algumas cidades, uma única estação pode atender a mais de uma comunidade.

A determinação é de que a estação esteja na cidade que fica a menos de 15 minutos das outras cidades que atender, além daquela onde se localiza.

A seguir são apresentadas as distâncias em minutos entre as seis cidades.

j i	1	2	3	4	5	6
1	0	23	14	18	10	32
2	23	0	24	13	22	11
3	14	24	0	60	19	20
4	18	13	60	0	55	17
5	10	22	19	55	0	12
6	32	11	20	17	12	0

Formule a questão como um PLI cuja solução produzirá o menor número de estações, bem como as respectivas cidades onde se localizarão.

M9.6 Uma siderúrgica abastece a sua produção, estabelecida em duas usinas a partir de três minas de ferro. Os custos de transporte por tonelada, as demandas das usinas e as capacidades de extração do minério nas minas são dados na tabela abaixo. Por força de contrato, caso alguma mina forneça qualquer quantidade de minério, é cobrado um custo fixo por este fornecimento. Escreva um modelo de programação linear para atender as demandas com o menor custo possível.

	Mina 1	Mina 2	Mina 3	Demanda mínima
Usina 1	\$10	\$25	\$15	520
Usina 2	\$12	\$20	\$30	630
Cap. Produção	250	570	750	
Custo fixo	\$1.200	\$1.750	\$1.530	

M9.7 - Uma empresa produz 3 tipos de roupas: camisas, bermudas e calças. Faça um modelo de PL para maximizar o lucro da empresa nas próximas semanas de acordo com os dados abaixo. A produção destes itens requer a utilização de maquinários específicos. As máquinas necessárias são alugadas às seguintes taxas semanais: para camisas $200,00; para bermudas $150 e para calças, $100. A produção de cada tipo de roupa também requer uma quantidade de tecido e de horas de trabalho, dados na tabela. Cada semana tem disponível 150 horas de trabalho e 160 m^2 de tecido. Considerando os custos unitários e os preços de venda na tabela, formule um modelo de PLI para maximizar o lucro semanal da empresa.

	Camisa	Bermuda	Calça
Trabalho (hs)	3	2	6
Tecido (m^2)	2	1,5	2
Preço venda	$ 12	$ 8	$ 15
Custo	$ 6	$ 4	$ 8

X_i = quantidade de roupas do tipo i a ser produzida no período

Y_i = 1 se alguma roupa do tipo i for produzida e 0 caso contrário.

Max Z = 6x1 + 4x2 + 7x3 – 200y1 – 150y2 -100y3, as

3x1 + 2x2 + 6x3 <= 150

2x1 + 1,5x2 + 2x3 <= 160

Xi <= Myi, i = 1, 2, 3 e M >> 0; xi >=0 e inteiro e yi $\in$ {0, 1}