PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Prof. Gustavo Peixoto Silva
Departamento de Computação
Univ. Federal de Ouro Preto

Programação Linear Inteira - PLI

(PL1) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

X_1, X_2 Inteiros não negativos

Como $X^* = (3.75; 1.25)$ $Z^* = 23.75$

Se fosse usado o arredondamento das variáveis, teríamos $X_1 = 4$ e $X_2 = 1$, que é uma solução inviável, viola a restrição $10X_1 + 6X_2 <= 45$!

Portanto esta técnica não se aplica à resolução de problemas deste tipo.

Para resolver PPI é necessário aplicar técnicas específicas, como veremos a seguir.

Branch and Bound

(PL1) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

X_1, X_2 Inteiros não negativos

Como $X^* = (3.75; 1.25)$ $Z^* = 23.75$

Selecionar arbitrariamente uma variável não inteira. Seja $X_1 = 3.75$

- Resolver o PL2 = Restrições do PL1 + a restrição $X_1 <= 3$
- Resolver o PL3 = Restrições do PL1 + a restrição $X_1 >= 4$, independentes!

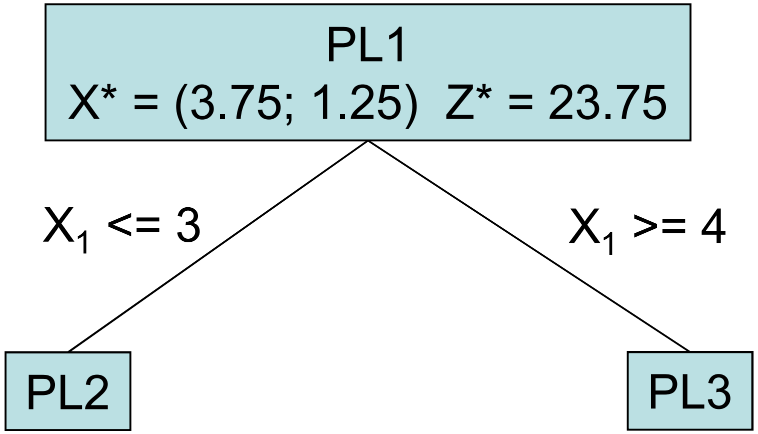
Assim nenhuma informação do problema original é perdida e elimina-se a parte fracionária da variável X_1 para o valor 3.75.

O PL2 e o PL3 são mutuamente excludentes e portanto podem ser considerados separadamente.

Esta dicotomia dá o conceito de ramificação. X_1 é dita variável de ramificação (*Branch*).

A PLI ótima se encontra a partir do PL2 ou do PL3. Portanto, ambos devem ser examinados.

Árvore B&B



(PL2) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$$X_1 + X_2 <= 5$$
$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$
$$X_1 <= 3$$
$$X_1 \text{ e } X_2 >= 0$$

(PL3) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$$X_1 + X_2 <= 5$$
$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$
$$X_1 >= 4$$
$$X_1 \text{ e } X_2 >= 0$$

Resolvendo o PL2

(PL2) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

$X_1 <= 3$ (restrição acrescida ao modelo PL1)

$$X_1 \text{ e } X_2 >= 0$$

COM SOLUÇÃO $X^* = (3; 2)$ $Z^* = 23$

A solução do PL2 satisfaz a condição de integralidade. Portanto esta é dita **SOLUÇÂO INCUMBENTE (Candidata)**, ou seja, não precisa ser examinado mais.

Neste caso já temos um **LIMITE INFERIOR** para a solução inteira. Assim, qualquer subproblema que não possa melhorá-lo deve ser descartado.

Por outro lado, se algum subproblema **MELHORAR** o limitante inferior, este deverá ser atualizado.

Resolvendo o PL3

(PL3) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

$$X_1 \qquad >= 4$$

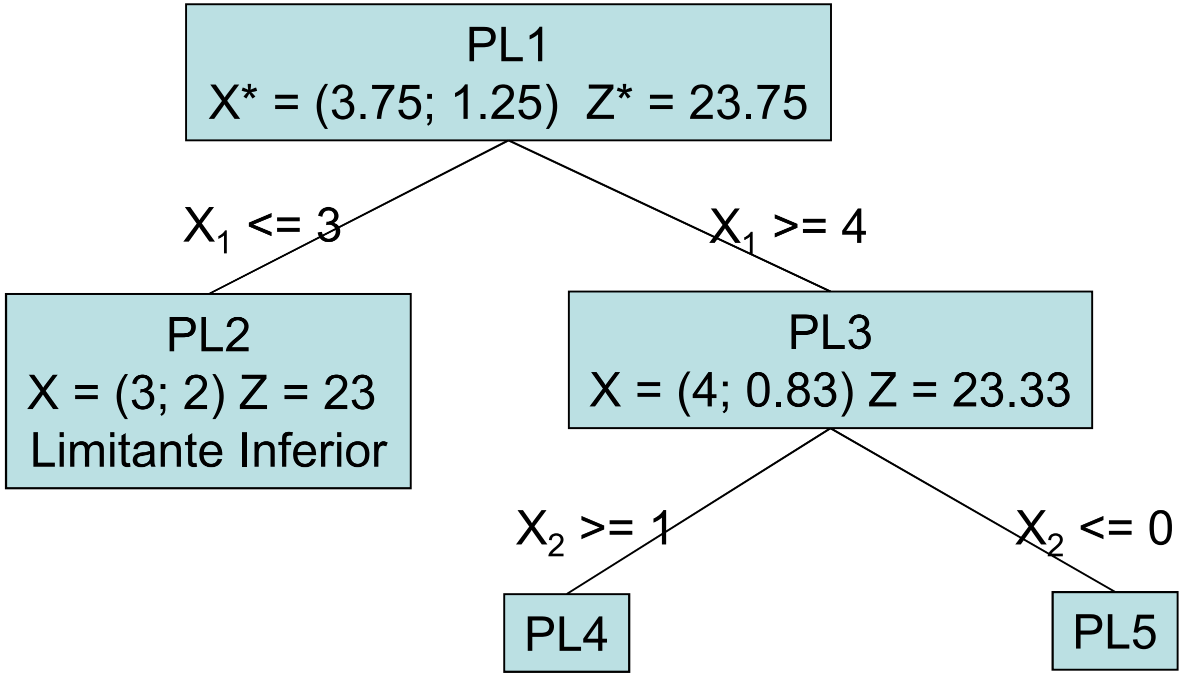
$$X_1 \text{ e } X_2 >= 0$$

COM SOLUÇÃO $X^* = (4 ; 0.833)$ E $Z^* = 23.333$

Como a solução não é inteira, devemos tomar a variável não inteira $X_2 = 0.8333$ e tentar eliminar sua parte fracionária.

- Resolver o PL4 = Restrições do PL3 + a restrição $X_2 >= 1$
- Resolver o PL5 = Restrições do PL3 + a restrição $X_2 <= 0$

Árvore B&B



(PL4) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_2 &\le 5\\
10X_1 + 6X_2 &\le 45\\
X_1 &\ge 4\\
X_2 &\ge 1\\
X_1 \text{ e } X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

(PL5) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_2 &\le 5\\
10X_1 + 6X_2 &\le 45\\
X_1 &\ge 4\\
X_2 &\le 0\\
X_1 \text{ e } X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Resolvendo o PL4

(PL4) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

$$X_1 >= 4$$

$$X_2 >= 1$$

$$X_1 \text{ e } X_2 >= 0$$

ESTE PROBLEMA NÃO TEM SOLUÇÃO VIÁVEL E DEVE SER ABANDONADO

Resolvendo o PL5

(PL5) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

$$X_1 >= 4$$

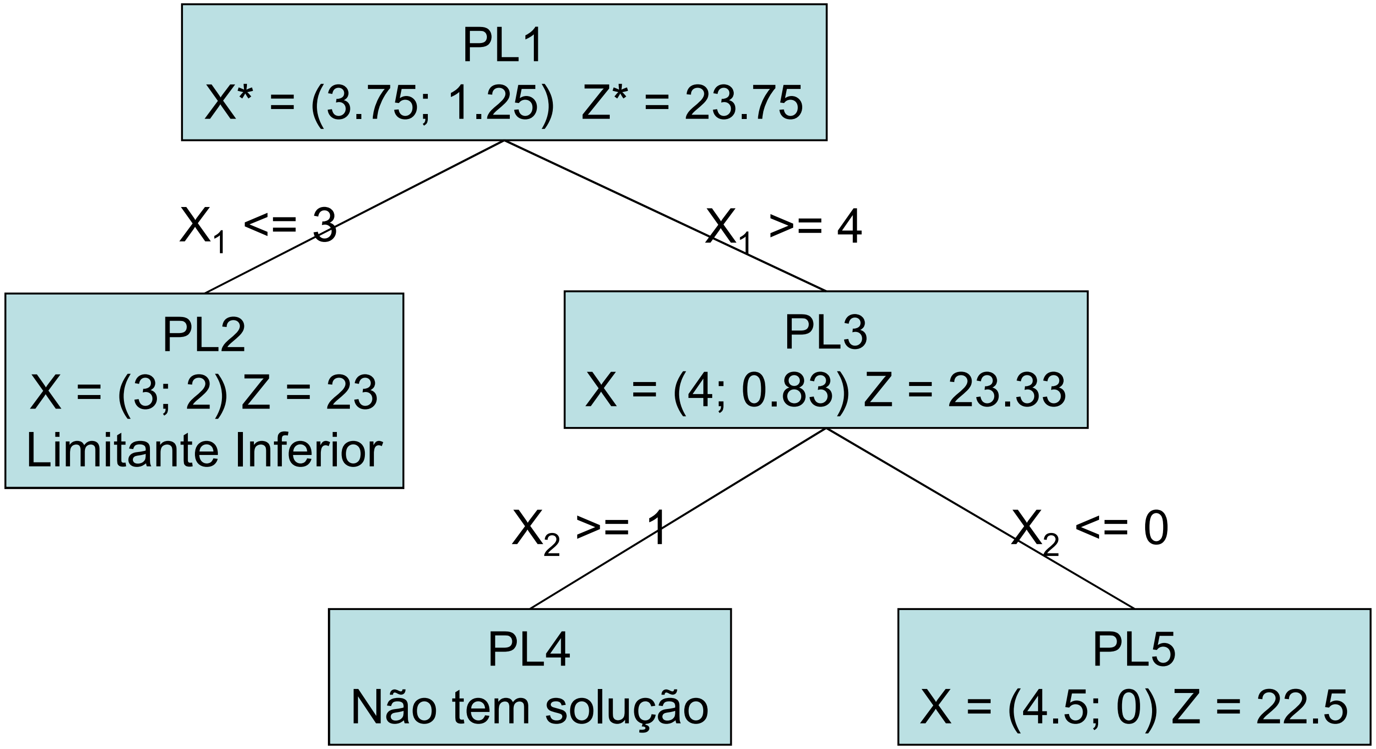
$$X_2 <= 0$$

$$X_1 \text{ e } X_2 >= 0$$

COM SOLUÇÃO X* = (4.5 ; 0) E Z* = 22.5

A solução não é completamente inteira. Este problema dever ser pesquisado/aprofundado? Justifique a resposta.

Árvore B&B



Assim, a busca é interrompida e mesmo resolvendo o PL5 podemos chegar à mesma conclusão.

Ou seja, a solução do PL2 é ótima pois para "eliminar o valor fracionário" 0.5 da variável X_1,no PL5, o valor da FO tende a pior ou na melhor das hipóteses permanecer o mesmo, perdendo para o valor do PL2.

Obs. Quanto mais restrito o problema, pior será o valor objetivo da solução ótima.

Branch and Bound

Assim, o algoritmo está completo pois todos os ramos foram examinados.

E o problema original :

(PL1) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

X_1, X_2 inteiros não negativos

tem como solução inteira ótima : $X^* = (3; 2)$ e $Z^* = 23$.

Branch and Bound

Mas poderíamos ter escolhido a variável X_2 para iniciar a ramificação, ou examinar o subproblema PL3 antes do PL2.

Nesta caso teríamos uma outra história!!!

(PL1) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a ===> Problema original

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

X_1, X_2 Inteiros não negativos

Como $X^* = (3.75; 1.25)$ $Z^* = 23.75$

Vamos examinar primeiro o PL3 = PL1 + a restrição $X_1 >= 4$

Resolvendo primeiro o PL3

(PL3) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ SA

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

$$X_1 >= 4$$

Com solução $X^* = (4; 0.83)$ $Z^* = 23.33$

Como $X_2 = 0.83$ não é inteira, o PL3 deve continuar a ser examinado.

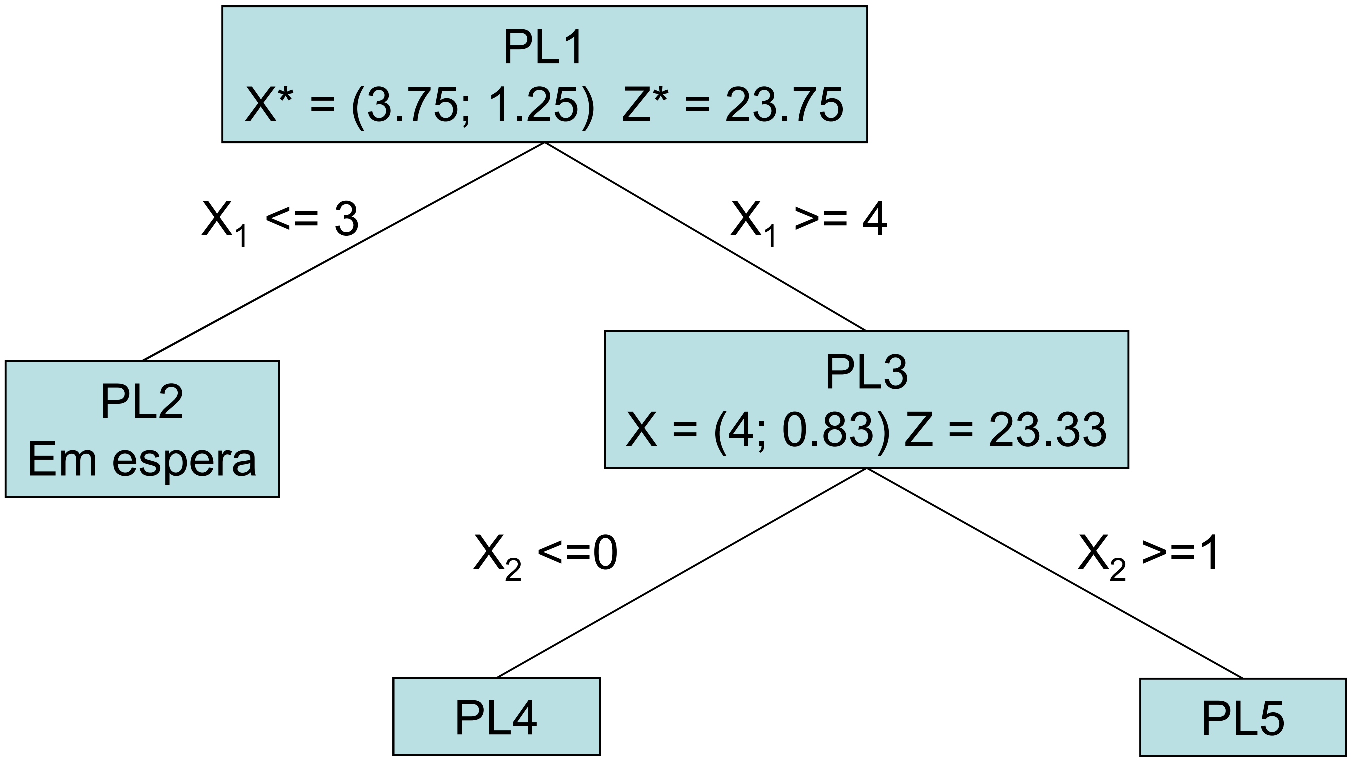
Criamos agora outros dois subproblemas que devem ser examinados:

PL4 = PL3 + $X_2 <= 0$ e

PL5 = PL3 + $X_2 >= 1$

A árvore que representa o problema é dada por:

Árvore B&B



Examinaremos agora o PL5 e depois o PL4

Resolvendo o PL5

(PL5) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ SA

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

$$X_1 >= 4$$

$$X_2 >= 1$$

Este problema não tem solução viável, logo chegamos ao final deste ramo.

Examinaremos agora o PL4 = PL3 + $X_2 <= 0$, ou seja $X_2 = 0$

Resolvendo o PL4

(PL4) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ SA

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

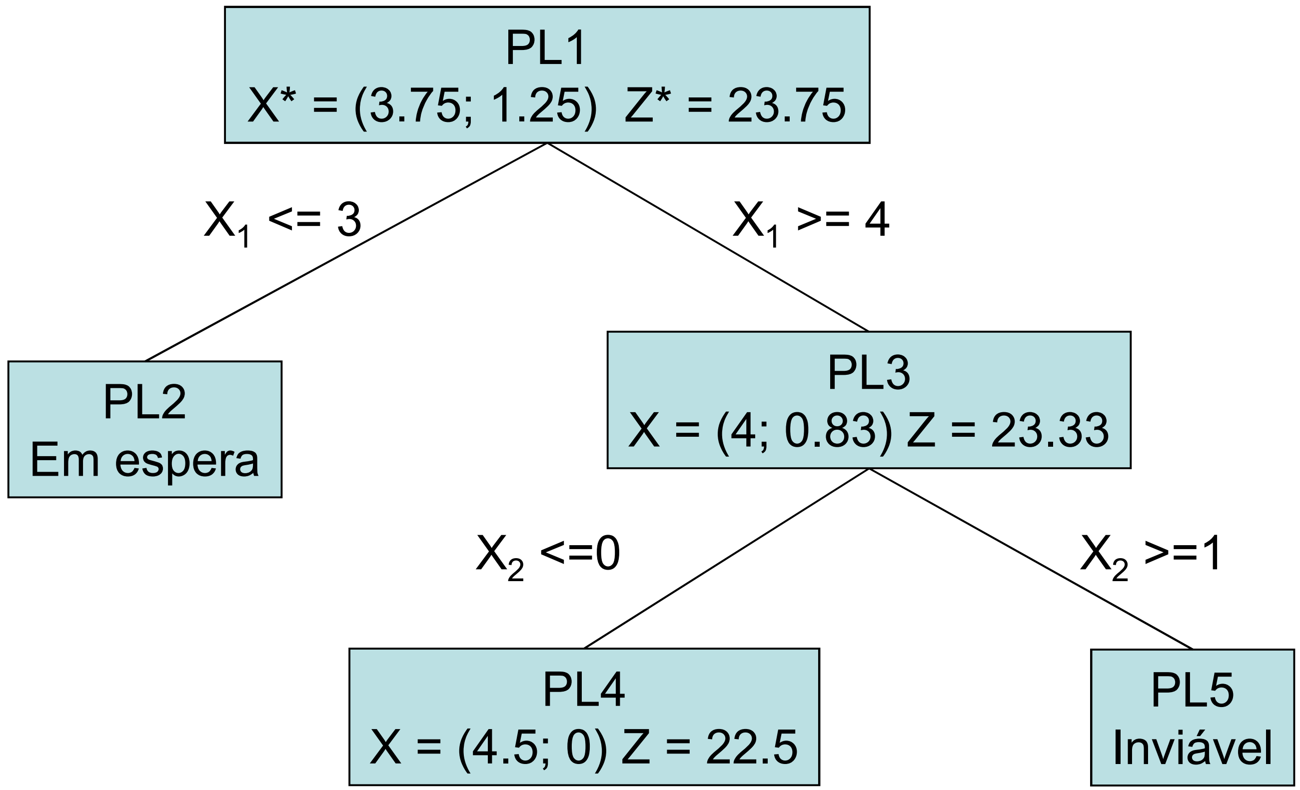
$$X_1 >= 4$$

$$X_2 <= 0$$

Com solução $X^* = (4.5; 0)$ E $Z^* = 22.5$

Este problema ainda não tem solução inteira e portanto devemos continuar a busca!!!

Árvore B&B


PL1
X* = (3.75; 1.25) Z* = 23.75
X1 <= 3
X1 >= 4
PL2
Em espera
PL3
X = (4; 0.83) Z = 23.33
X2 <=0
X2 >=1
PL4
X = (4.5; 0) Z = 22.5
PL5
Inviável

Ramificando X_1 no PL4

(PL4) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ SA

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

$$X_1 >= 4$$

$$X_2 <= 0$$

COM SOLUÇÃO $X^* = (4.5; 0)$ E $Z^* = 22.5$

Como $X_1 = 4.5$ não é inteira, o PL4 deve ser examinado.

Criamos outros dois subproblemas:

PL6 = PL4 + $X_1 <= 4$ e

PL7 = PL4 + $X_1 >= 5$

Examinaremos agora o PL7 e depois o PL6.

Resolvendo o PL7 e o PL6

(PL7) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ SA

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

$$X_1 >= 4 \leftarrow$$

$$X_2 <= 0$$

$$X_1 >= 5 \leftarrow$$

Não tem solução viável. Chegamos ao final deste ramo.

(PL6) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ SA

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

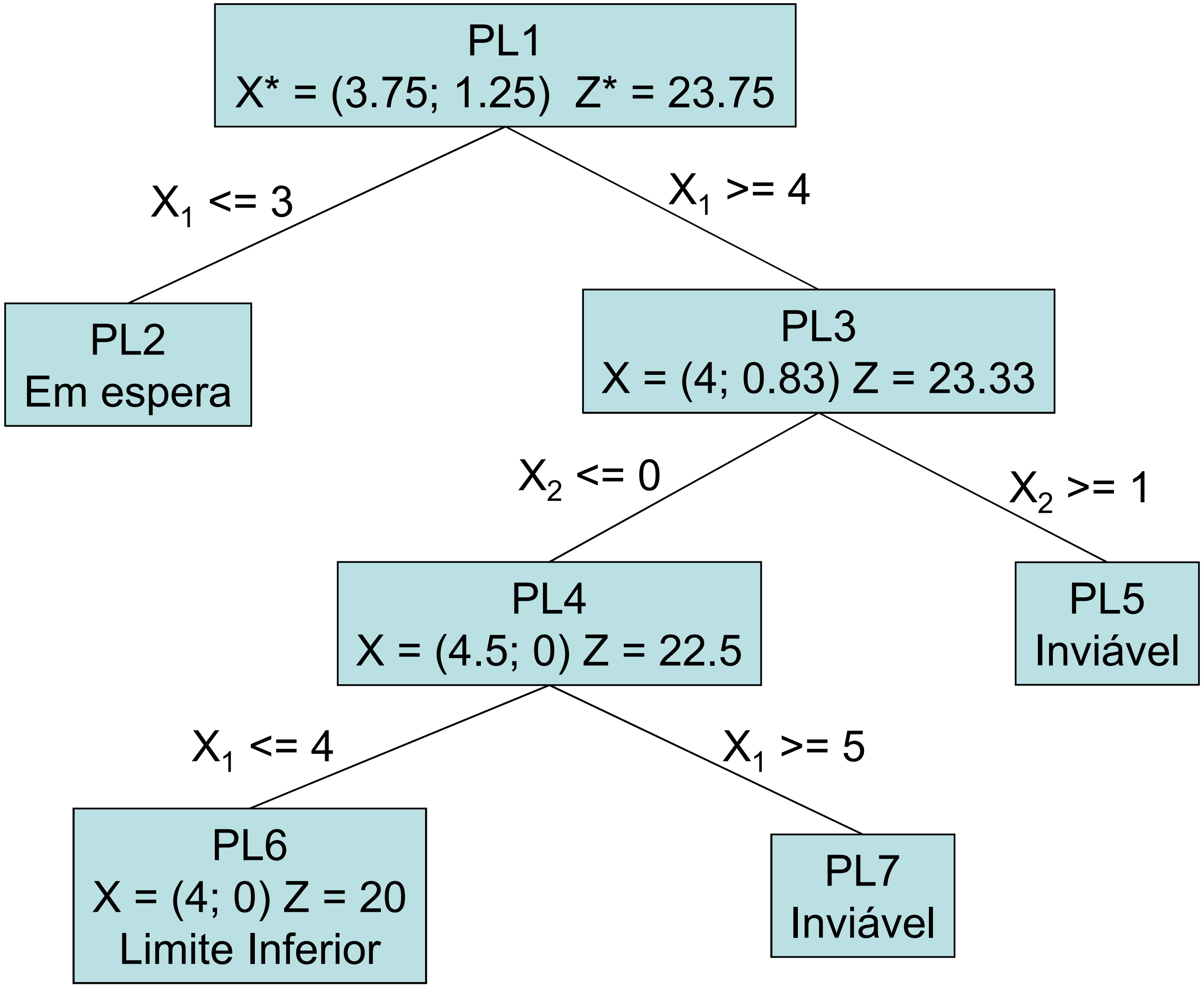
$$X_1 >= 4 \leftarrow$$

$$X_2 <= 0$$

$$X_1 <= 4 \leftarrow$$

Solução $X^* = (4; 0)$ E $Z^* = 20$. Chegamos ao final deste ramo e agora temos um limitante inferior.

Árvore B&B


PL1
X* = (3.75; 1.25) Z* = 23.75
X1 <= 3
X1 >= 4
PL2
Em espera
PL3
X = (4; 0.83) Z = 23.33
X2 <= 0
X2 >= 1
PL4
X = (4.5; 0) Z = 22.5
PL5
Inviável
X1 <= 4
X1 >= 5
PL6
X = (4; 0) Z = 20
Limite Inferior
PL7
Inviável

Resolvendo o PL2

(PL2) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ SA

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$

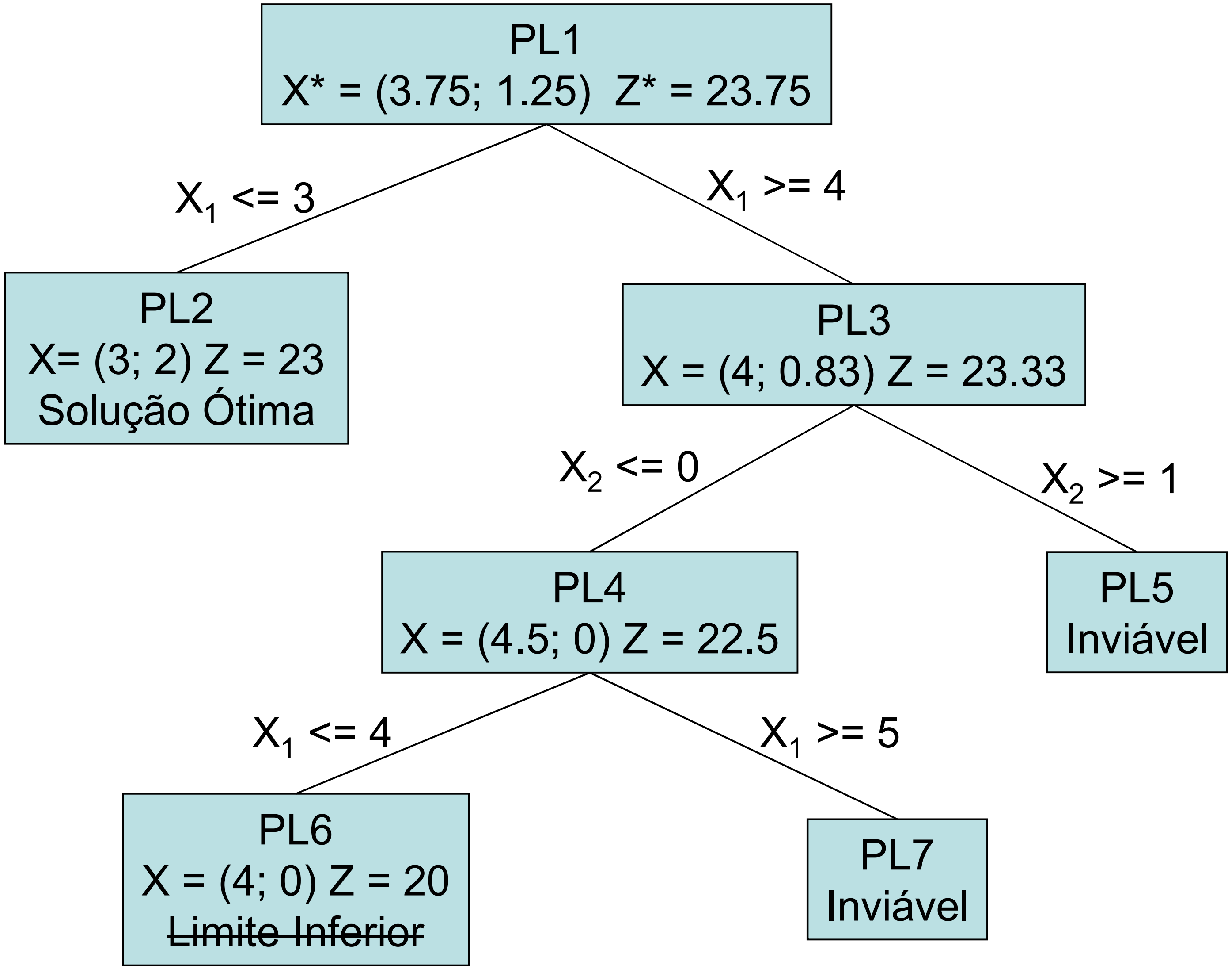
$$X_1 <= 3$$

COM SOLUÇÃO $X^* = (3; 2)$ $Z^* = 23$

Satisfaz a condição de integralidade, tem valor objetivo Z melhor do que o limitante inferior Z = 20 obtido no PL6. Portanto encerra-se o algoritmo com o ótimo:

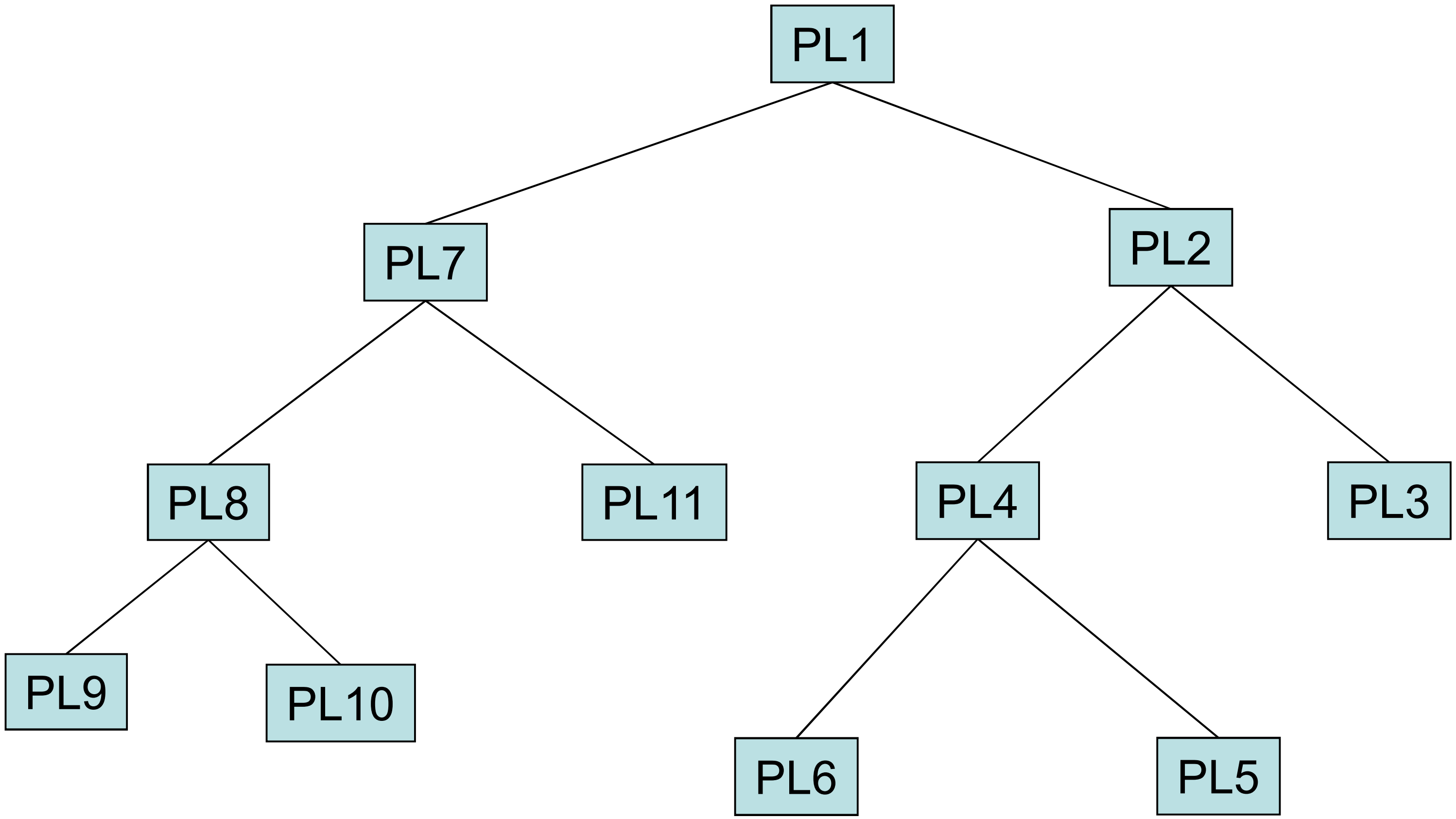
$X^* = (3; 2)$ e $Z^* = 23$

Árvore B&B

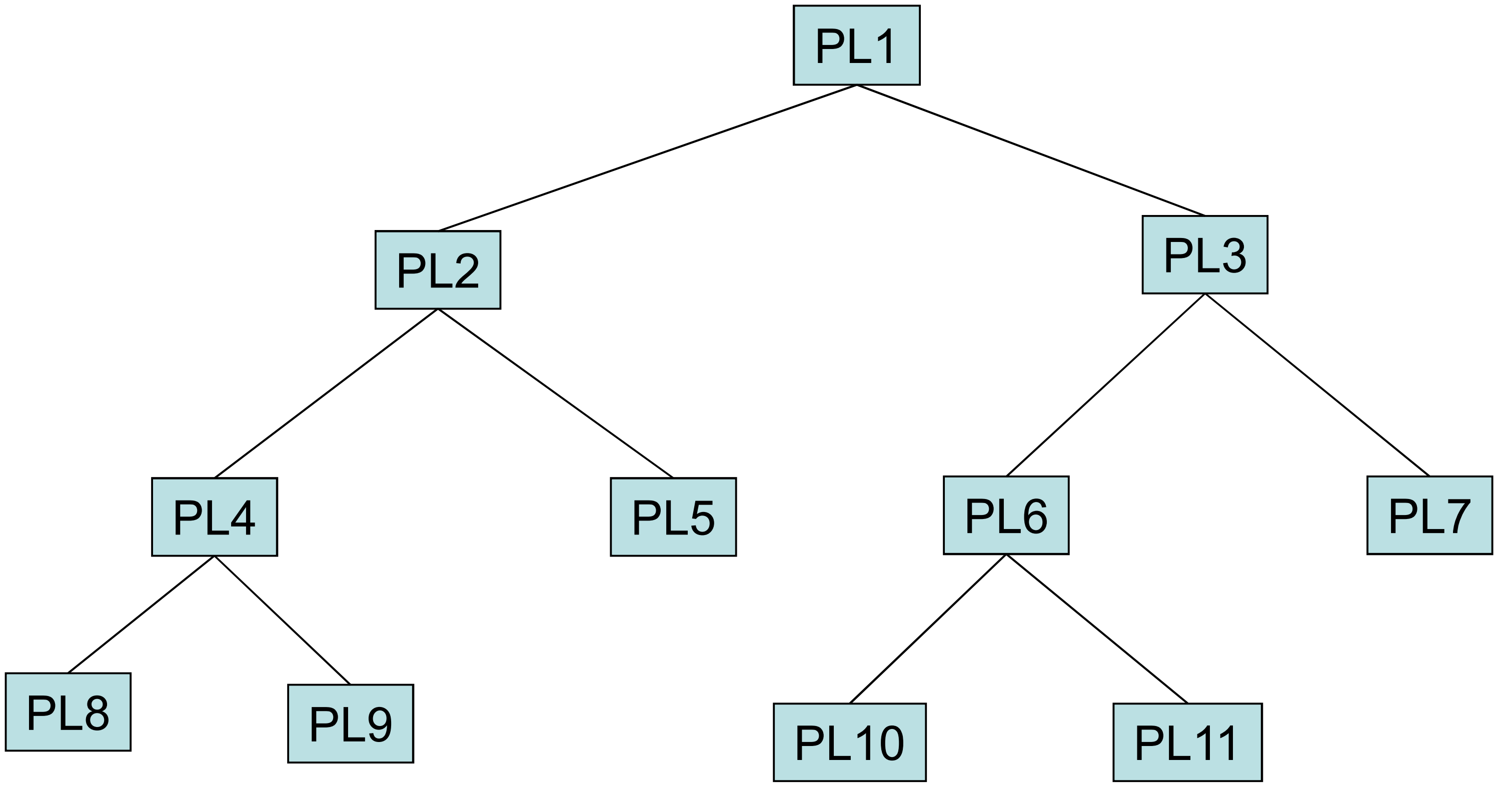


PL1
X* = (3.75; 1.25) Z* = 23.75
X1 <= 3
X1 >= 4
PL2
X= (3; 2) Z = 23
Solução Ótima
PL3
X = (4; 0.83) Z = 23.33
X2 <= 0
X2 >= 1
PL4
X = (4.5; 0) Z = 22.5
PL5
Inviável
X1 <= 4
X1 >= 5
PL6
X = (4; 0) Z = 20
~~Limite Inferior~~
PL7
Inviável

Árvore B&B (profundidade)



Árvore B&B (amplitude)

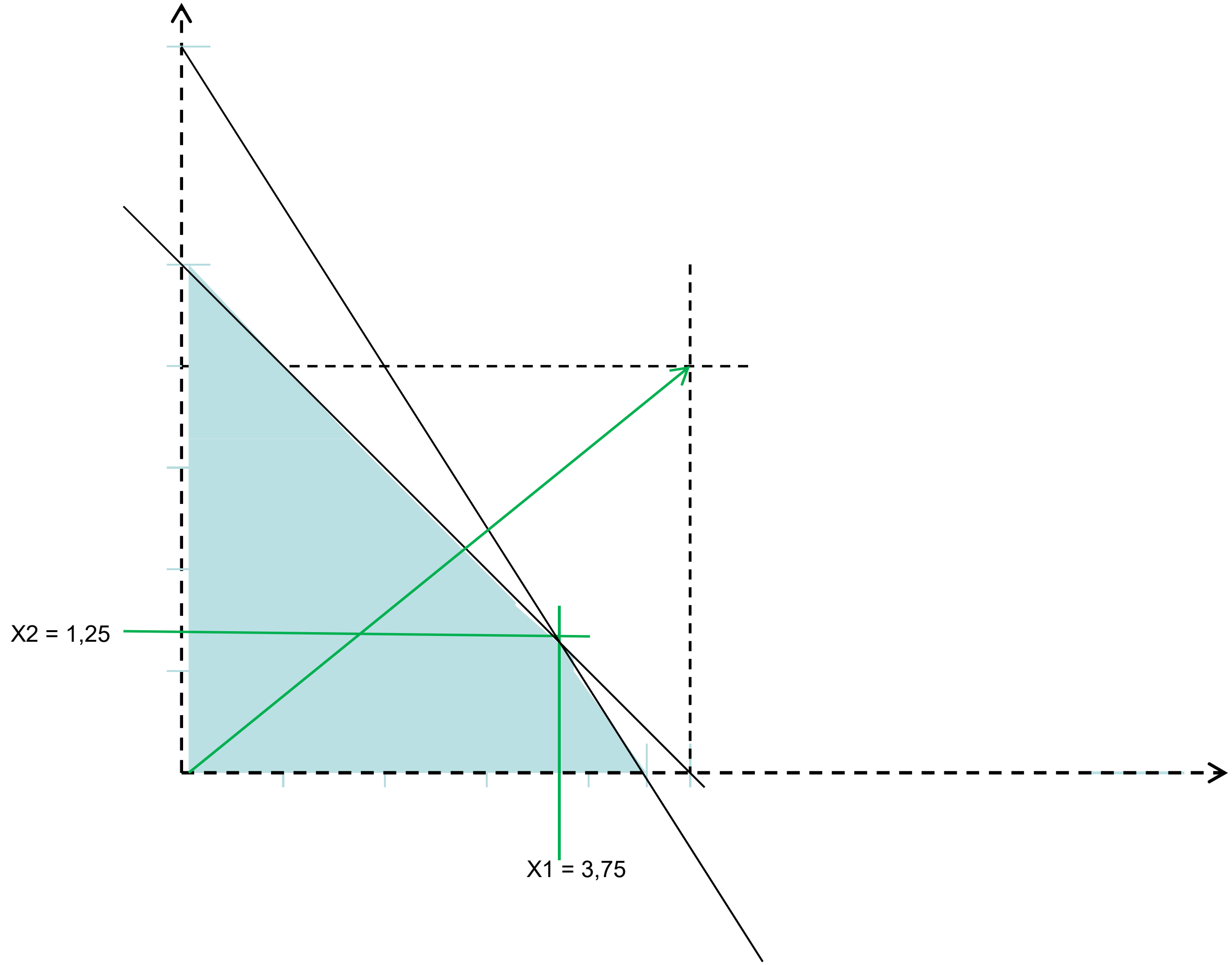


Geometricamente temos:

(PL1) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$10X_1 + 6X_2 <= 45$$



(PL2) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$X_1 + X_2 <= 5$

$10X_1 + 6X_2 <= 45$

$X_1 <= 3$

X_1 e $X_2 >= 0$

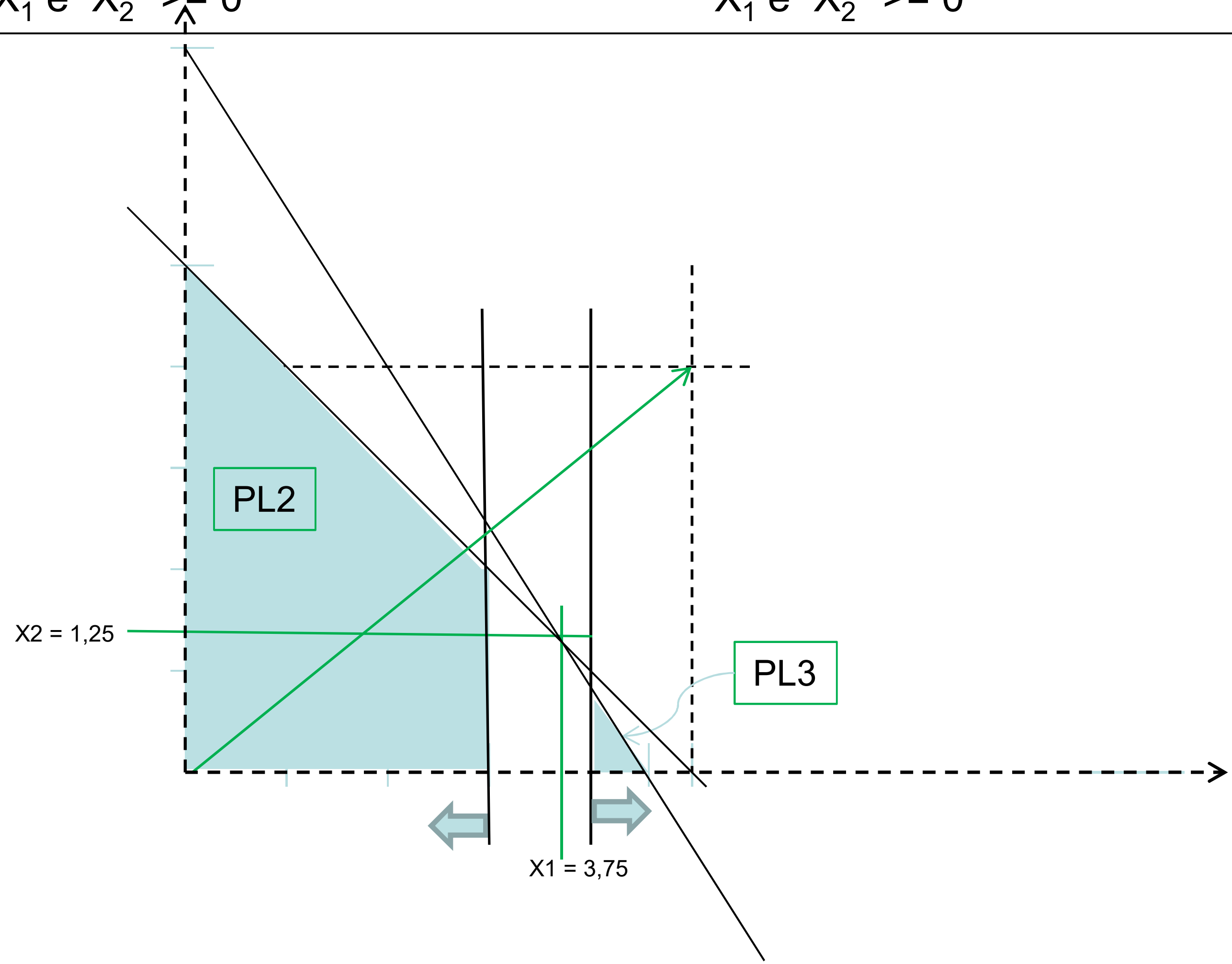
(PL3) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

$X_1 + X_2 <= 5$

$10X_1 + 6X_2 <= 45$

$X_1 >= 4$

X_1 e $X_2 >= 0$



(PL3) MAX $Z = 5X_1 + 4X_2$ s. a

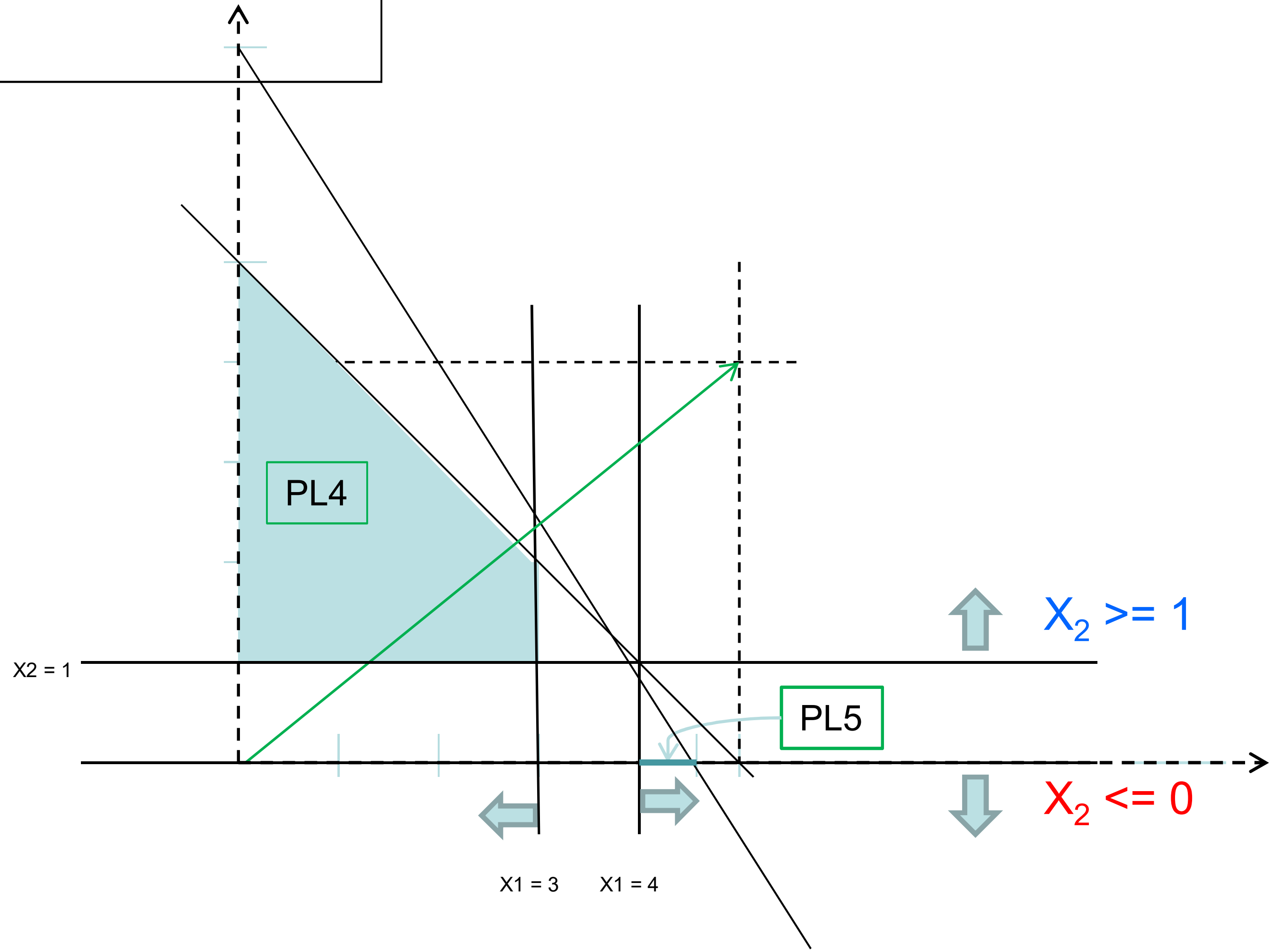
$X_1 + X_2 <= 5$

$10X_1 + 6X_2 <= 45$

$X_1 >= 4$

X_1 e $X_2 >= 0$

- Resolver o PL4 = Restrições do PL3 + a restrição $X_2 >= 1$
- Resolver o PL5 = Restrições do PL3 + a restrição $X_2 <= 0$



Exercício

Resolva os problemas abaixo para X_1 e X_2 variáveis inteiras pelo método Branch-and-Bound. **Usar o Gusek para resolver cada Simplex**

Ex. 1) MAX $Z = 3X_1 + 2X_2$ sa

$$2X_1 + 5X_2 <= 9$$

$$4X_1 + 2X_2 <= 9$$

Ex. 2) MAX $Z = 2X_1 + 3X_2$ sa

$$5X_1 + 7X_2 <= 35$$

$$4X_1 + 9X_2 <= 36$$

Ex. 3) MAX $Z = 3X_1 + 3X_2$ sa

$$X_1 + 4X_2 <= 12$$

$$6X_1 + 4X_2 <= 24$$

Construir as árvores do branch and bound e os respectivos problemas de PL resolvidos. Alternar entre amplitude e profundidade