

Programação de Máquinas

Machine Scheduling

Prof. Gustavo Peixoto Silva

Departamento de Computação

Univ. Federal de Ouro Preto

3 modelos

M7.1 - Sequenciamento em máquinas paralelas e iguais

Suponha que precisamos realizar 6 tarefas e temos 3 máquinas. Cada tarefa pode ser executada em qualquer ordem e em qualquer máquina, com o mesmo tempo de processamento. O tempo gasto para realizar cada tarefa é de:

Tarefa	1	2	3	4	5	6
Tempo de maq.	6	4	5	4	7	8

Elabore um modelo de PL para minimizar o tempo total para a execução de todas as tarefas. Ou seja, minimizar o maior tempo de execução dentre as 3 máquinas.

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
M ₁	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1	0/1
M ₂	...					
M ₃						0/1

$X_{ij} = 1$ se a máquina i fizer a tarefa j e 0 caso contrário.

Minimizar o maior atraso! Espremer o tempo total das máquinas com uma mesma variável e minimizar esta variável.

Problema de gargalo – *Bottleneck problem*

M7.1 - Sequenciamento em máquinas paralelas e iguais

$X_{ij} = 1$ se a máquina i fizer a tarefa j e 0 caso contrário.

Espremer o tempo total das máquinas com uma mesma variável e minimizar esta variável.

$Min Fo = z$ // este é o nosso “espremedor”!

$$6X_{11} + 4X_{12} + 5X_{13} + 4X_{14} + 7X_{15} + 8X_{16} \leq z \quad (\text{espremendo o tempo da maq1})$$

$$6X_{21} + 4X_{22} + 5X_{23} + 4X_{24} + 7X_{25} + 8X_{26} \leq z \quad (\text{espremendo o tempo da maq2})$$

$$6X_{31} + 4X_{32} + 5X_{33} + 4X_{34} + 7X_{35} + 8X_{36} \leq z \quad (\text{espremendo o tempo da maq3})$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1 \quad X_{14} + X_{24} + X_{34} = 1$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1 \quad X_{15} + X_{25} + X_{35} = 1$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1 \quad X_{16} + X_{26} + X_{36} = 1$$

$X_{ij} \in \{0, 1\}$, $z \geq 0$ (z será sempre inteiro, não precisa impor)

Tarefa	1	2	3	4	5	6
Tempo de maq.	6	4	5	4	7	8

M7.2 - Balanceamento da Produção

Um produto é montado com três peças diferentes. As peças idênticas podem ser fabricadas por dois departamentos a diferentes taxas de produção, conforme tabela abaixo. Determine o número máximo de unidades completas que podem ser produzidas.

Depart.	Taxa de produção (unid/h)			Capacidade (hs)
	Peça 1	Peça 2	Peça 3	
1	8	5	10	100
2	6	12	4	200

Max $z = \text{Min}\{x_1, x_2\}$ é equivalente a Max z sujeito a $x_1 \geq z$ e $x_2 \geq z$

```
Maximize fo:  z
Subject To
r1(1): + 1/8 x11 + 1/5 x12 + 1/10 x13 ≤ 100
r1(2): + 1/6 x21 + 1/12 x22 + 1/4 x23 ≤ 200

r2(1): + x11 + x21 ≥ z
r2(2): + x12 + x22 ≥ z
r2(3): + x13 + x23 ≥ z
      xij ≥ e inteiros
```

```

param qt_partes, integer, >=0;
param qt_dep, integer, >=0;

set P := 1 .. qt_partes;
set D := 1.. qt_dep;

param matriz{i in D, j in P}, >=0;
param cap{i in D}, >= 0;

var x{j in P}, integer >= 0;
var z, integer, integer >=0;
maximize fo: z;

s.t. r1{i in D}: sum{j in P} (matriz[i,j]*x[j]) <= cap[i];
s.t. r2{i in P}: x[i] >= z;
solve;
data;
param qt_partes := 3;
param qt_dep := 2;
param matriz: 1 2 3 :=
                1 1/8 1/5 1/10
                2 1/6 1/12 1/4;
param cap := 1 100
              2 200;

end;

```

M7.3 - Sequenciamento de Tarefas

Temos 1 máquina para realizar 3 tarefas.

Determinar a sequência de execução das tarefas que minimiza a multa pelo atraso em relação à data de entrega das 3 tarefas.

Tarefa	Processamento em dias	Prazo de entrega	Multa atraso \$/dia
1	5	25	19
2	20	22	12
3	15	35	34

X_j = dia de início da tarefa j

Restrições:

- duas tarefas não podem ser feitas ao mesmo tempo
- prazo de entrega

Duas tarefas i e j com tempos de execução P_i e P_j não serão feitas ao mesmo tempo se $X_i \geq X_j + P_j$ ou $X_j \geq X_i + P_i$ dependendo da tarefa que for executada primeiro. Para situações deste tipo “isto ou aquilo”, considere a variável auxiliar

$Y_{ij} = 1$ se a tarefa i preceder a tarefa j

= 0 caso contrário, e as duas restrições com a const. M suficiente^{te} grande

$$MY_{ij} + (X_i - X_j) \geq P_j$$

$$M(1 - Y_{ij}) + X_j - X_i \geq P_i$$

Assim, se $Y_{ij} = 1$ temos $M + X_i \geq X_j + P_j \rightarrow X_j + P_j \leq \infty$ o que é sempre verdade e $X_j - X_i \geq P_i \rightarrow X_j \geq X_i + P_i$, que é a relação desejada.

O mesmo ocorre c/ $Y_{ij} = 0$.

Sequenciamento de Tarefas

Tarefa	Processamento em dias	Prazo de entrega	Multa atraso \$/dia
1	5	25	19
2	20	22	12
3	15	35	34

Prazo de execução: se D_j é o prazo de execução da tarefa j , seja S_j variável irrestrita tal que

$$X_j + P_j + S_j = D_j \quad (1)$$

Se $S_j \geq 0$ então o prazo foi cumprido.

Se $S_j < 0$ então houve atraso e deve ser paga a multa proporcional.

Seja $S_j = A_{dj} - A_{tj}$, com A_{dj} e $A_{tj} \geq 0$. Substituindo em (1) temos

$$X_j + P_j + A_{dj} - A_{tj} = D_j \text{ ou } X_j + A_{dj} - A_{tj} = D_j - P_j$$

Assim, o custo da multa é proporcional a A_{tj} e o modelo fica:

Min $19A_{t1} + 12A_{t2} + 34A_{t3}$ s.a

$$X_1 - X_2 + MY_{12} \geq 20$$

$$-X_1 + X_2 - MY_{12} \geq 5 - M$$

$$X_1 - X_3 + MY_{13} \geq 15$$

$$-X_1 + X_3 - MY_{13} \geq 5 - M$$

$$X_2 - X_3 + MY_{23} \geq 15$$

$$-X_2 + X_3 - MY_{23} \geq 20 - M$$

$$X_1 + A_{d1} - A_{t1} = 25 - 5$$

$$X_2 + A_{d2} - A_{t2} = 22 - 20$$

$$X_3 + A_{d3} - A_{t3} = 30 - 15, \dots$$

Minimize

$$\text{multa: } + 19 \text{ At}(1) + 12 \text{ At}(2) + 34 \text{ At}(3)$$

Subject To

$$\text{precedencia}(1,2): - x(2) + x(1) + 9999 y(1,2) \geq 20$$

$$\text{precedencia}(1,3): + x(1) - x(3) + 9999 y(1,3) \geq 15$$

$$\text{precedencia}(2,1): + x(2) - x(1) + 9999 y(2,1) \geq 5$$

$$\text{precedencia}(2,3): + x(2) - x(3) + 9999 y(2,3) \geq 15$$

$$\text{precedencia}(3,1): - x(1) + x(3) + 9999 y(3,1) \geq 5$$

$$\text{precedencia}(3,2): - x(2) + x(3) + 9999 y(3,2) \geq 20$$

$$\text{precedencia1}(1,2): + x(2) - x(1) - 9999 y(1,2) \geq 5 - 9999$$

$$\text{precedencia1}(1,3): - x(1) + x(3) - 9999 y(1,3) \geq 5 - 9999$$

$$\text{precedencia1}(2,1): - x(2) + x(1) - 9999 y(2,1) \geq 20 - 9999$$

$$\text{precedencia1}(2,3): - x(2) + x(3) - 9999 y(2,3) \geq 20 - 9999$$

$$\text{precedencia1}(3,1): + x(1) - x(3) - 9999 y(3,1) \geq 15 - 9999$$

$$\text{precedencia1}(3,2): + x(2) - x(3) - 9999 y(3,2) \geq 15 - 9999$$

$$\text{entrega}(1): - \text{At}(1) + \text{Ad}(1) + x(1) = 20$$

$$\text{entrega}(2): - \text{At}(2) + \text{Ad}(2) + x(2) = 2$$

$$\text{entrega}(3): - \text{At}(3) + \text{Ad}(3) + x(3) = 20$$

Sequenciamento de Tarefas

Tarefa	Processamento em dias	Prazo de entrega	Multa atraso \$/dia
1	5	25	19
2	20	22	12
3	15	35	34

O modelo genérico para T tarefas fica da seguinte forma:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^T C_i A t_i \quad \text{sujeito a}$$

$$M Y_{ij} + (x_i - x_j) \geq P_j, \quad \forall i, j \in T$$

$$M(1 - Y_{ij}) + (x_j - x_i) \geq P_i, \quad i \neq j$$

$$x_j + A d_j - A t_j = D_j - P_j, \quad \forall j \in T$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall i \in T$$

$$Y_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i, j \in T$$