Fluxo em Redes - 01

Prof. Gustavo Peixoto Silva

2 modelos

1. Otimização em Redes

- É um caso particular da Programação Linear, onde pretende-se **minimizar uma função de custo** que depende do **fluxo que passa pelos arcos** de uma rede.

- Os modelos de fluxo em redes apresentam muitas aplicações, associados tanta ao **fluxo de material físico**, como o **fluxo de informações**, **atribuição de tarefas**, **designação de locais**, entre outros.

- Devido à estrutura de rede, temos **algoritmos especializados** com grandes **vantagens computacionais**.

- A geometria de uma rede, que relaciona as entidades envolvidas no problema, sempre pode ser desenhada no plano, permitindo fácil compreensão do problema estudado.

- **Nem sempre é possível** representar um problema, mesmo que seja de uma rede real, como um problema de Otimização em Redes!

2. Alguns sistemas abordados como redes:

- Sistemas de produção/distribuição
- Sistemas logísticos militares
- Sistemas de tráfego urbano
- Sistemas de rodovias (transporte)
- Sistemas de comunicação
- Sistema de localização
- Sistema de roteamento e programação de vc.
- Redes elétricas
- Rede de dutos/tubulações
- Redes de relacionamento, entre outras.

- Alguns exemplos de redes

3. Notação e Definições

- Um **grafo direcionado** *G = (N, A)* apresenta um conjunto *N* de nós e um conjunto *A* de arcos. Os arcos são pares ordenados de nós distintos.

- **Arcos** – ligações unidirecionais de transporte de produtos, informações ou outra entidade qualquer.

- **Nós** – locais de produção/consumo, terminais de conexão, etc.

- Uma **rede direcionada** é um grafo direcionado com valores associados aos seus nós e arcos.
- **Arcos** – custos , fluxo, quant. min, capacidade etc.

- **Nós** – oferta/demanda, custo/lucro marginal.

- Normalmente utilizamos ***n*** para denotar o número de nós e ***m*** para denotar o número de arcos em *G*, ou seja, $|N| = n$ e $|A| = m$.

- Uma rede pode ser armazenada em uma matriz $n \times m$ sendo uma linha para cada nó, e uma coluna para cada arco, dita **matriz de incidência nó-arco**.
- A coluna correspondente ao arco (*i, j*) tem apenas dois elementos não nulos, + 1 na linha do nó *i* e − 1 na linha do nó *j.*

Min cx (1) sujeito a

Ax = b (2)

$0 \leq x \leq u$, (3) ou $l \leq x \leq u$ (3.1)

- c = vetor de custos nos **arcos**
- x = vetor de fluxo nos **arcos** (incógnita)
- A = matriz de incidência **nó-arco**
- b = vetor de demanda nos **nós**
- u = vetor de capacidade dos **arcos**
- l = quantidade mínima de fluxo no **arco**

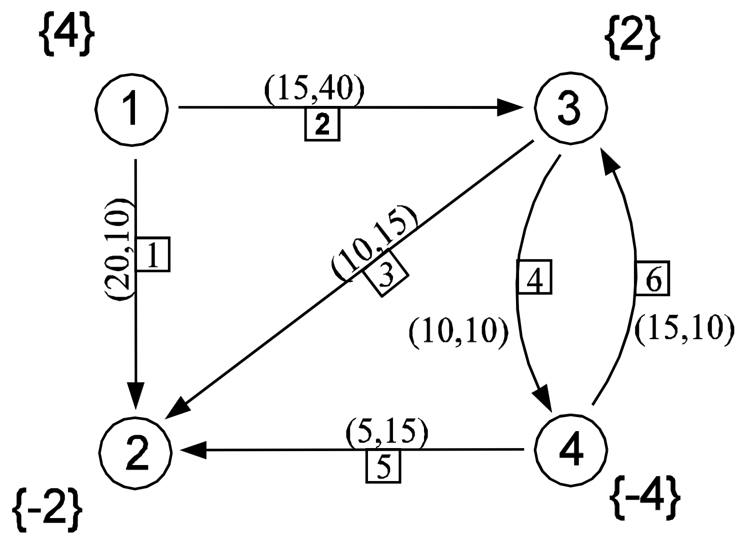
Min cx (1) sujeito a

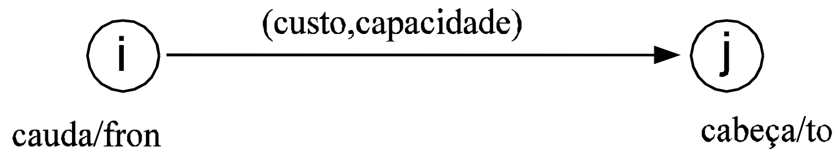
Ax = b (2)

$0 \leq x \leq u$ ou $l \leq x \leq u$ (3)

- A equação (1) minimizar o custo devido ao fluxo através dos arcos da rede.
- A equação (2) garante o equilíbrio de fluxo em cada nó da rede.
- E a restrição (3) assegura que o fluxo não ultrapasse a capacidade limite de cada arco (e seja >= quant. minima)

- Para cada nó *i* temos:
- Se *bi* > 0 então *i* é um **nó produtor**.
- *bi* < 0 então *i* é um **nó consumidor**.
- *bi* = 0 então *i* é um **nó de transbordo**.





$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \\ (1,2) & (1,3) & (3,2) & (3,4) & (4,2) & (4,3) \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}, \quad
\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}
$$

A coluna do arco (i , j) é representado com 1 na linha i, -1 na linha j e 0 na demais posições.

Assim o modelo que otimiza o fluxo na rede da Figura1 é:

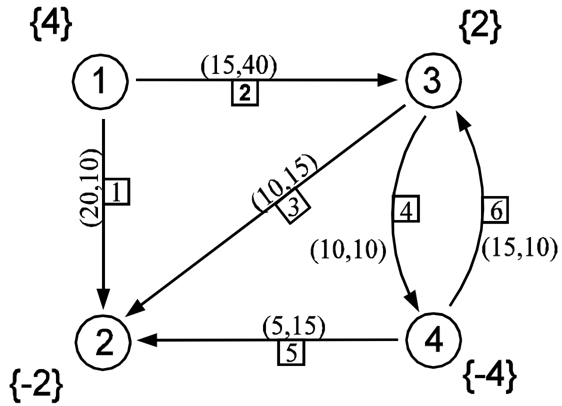
$$Min \quad 20X_1 \quad +15X_2 \quad +10X_3 \quad +10X_4 \quad +5X_5 \quad +15X_6$$

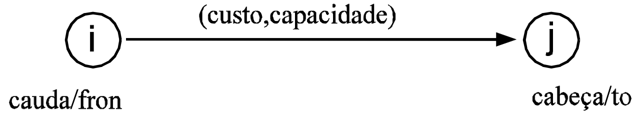
$$\begin{array}{l} nó1 \\ nó2 \\ nó3 \\ nó4 \end{array} \left\{ \begin{array}{rrrrrrcr} X_1 & +X_2 & & & & & = & 4 \\ -X_1 & & -X_3 & & -X_5 & & = & -2 \\ & -X_2 & +X_3 & +X_4 & & -X_6 & = & 2 \\ & & & -X_4 & +X_5 & +X_6 & = & -4 \end{array} \right.$$

$$0 \leq X_1 \leq 10 \qquad 0 \leq X_2 \leq 40 \qquad 0 \leq X_3 \leq 15$$

$$0 \leq X_4 \leq 10 \qquad 0 \leq X_5 \leq 15 \qquad 0 \leq X_6 \leq 10$$

Obs.: A matriz tem apenas *2m* elementos não nulos entre as *n×m* posições. Esta matriz, que tem apenas +1 e -1 é dita **unimodular**, de importância teórica, pois garante a existência de algoritmos mais eficientes na resolução de problemas de otimização associados a ela.





O = vetor origem, D = vetor destino, C = vetor de custos, a rede pode ser armazenada assim:

arco	*O*	*D*	*C*	*U*
1	1	2	20	10
2	1	3	15	40
3	3	2	10	15
4	3	4	10	10
5	4	2	5	15
6	4	3	15	10

Os Problema de Fluxo em Redes podem ser formulado como:

$$Min \quad \sum_{(i,j)\in A} CijXij \qquad \text{sujeito a}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} Xij \quad - \quad \sum_{j:(j,i)\in A} Xji \quad = bi \qquad \forall\, i \in N$$

(fluxo sai de i) - (fluxo entra em i) = (fluxo disponível em i)

$$0 \le Xij \le Uij \qquad \forall\, (i, j) \in A$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} bi = 0}$$

Assim temos as seguintes **leis** para modelar um problema de fluxo em redes :

1. Lei de conservação de fluxo nos nós: ∑ fluxo entra + $b_{nó}$ = ∑ fluxo sai do nó

2. Lei de equilíbrio de fluxo na rede: ∑ oferta de fluxo = ∑ demanda de fluxo

DEFINIÇÕES

Grafos e redes direcionados

Grafo *G=(N, A)* , Rede *R=(N, A, c, l, u, b, x)* onde *N* é um conjunto de nós e A é um conjunto de arcos que são pares ordenados de nós distintos.

Graus de entrada de um nó é igual ao número de arcos que chagam no nó.

Grau de saída de um nó, é igual ao número de arcos que saem do nó.

Lista de adjacência (de saída)

Lista de arcos adjacentes *A(i)* de um nó *i* é o conjunto de arcos que saem de *i*.

$$A(i) = \{(i, j) \in A \mid j \in N\}$$

Propriedade: $\sum_{i \in N} | A(i) | = m$

Como nossa definição não permite arcos "paralelos" nem "laços", temos
$m < n(n - 1) < n^2$

Um grafo é **esparso** se m = O(n) e **denso** se m = O(n^2).

Caminho
Caminho é uma seqüência alternada contínua de nós e arcos, sem repetições. Pode ter arcos no sentido direto ou no sentido oposto do caminho.

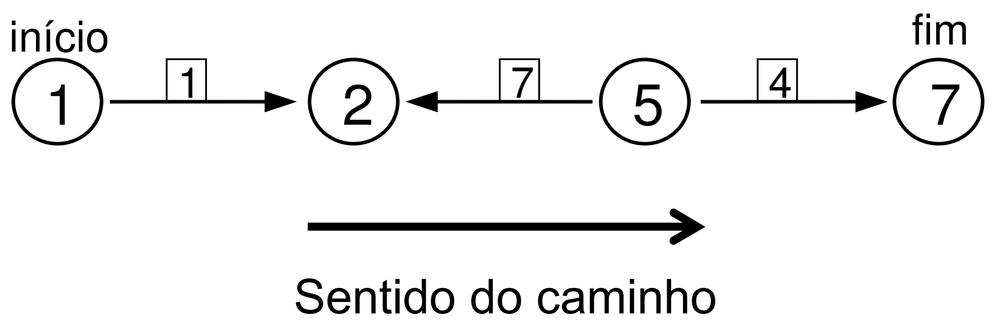
Caminho direcionado ou Cadeia
É um caminho com todos os arcos orientados no sentido direto.

Observação: Podemos armazenar um caminho definindo um índice (vetor) predecessor *pred(i)* para todo nó *i* do caminho.

Se *i* e *j* são nós consecutivos segundo a orientação do caminho, então *pred(j)=i*.

Na figura a seguir temos: *Pred(7)=5, pred(5)=2, pred(2)=1* e *pred(1)= 0*

Caminho



**Ciclo - ** É um caminho fechado

**Circuito - ** É uma cadeia fechada

**Grafo Conectado - ** Existe um caminho conectando qualquer par de nós

**Grafo Fortemente Conectado - ** Existe uma cadeia (caminho direcionado) conectando qualquer par de nós

Árvore - É um grafo conectado sem ciclos

**Árvore Geradora - ** É uma árvore e um subgrafo gerador (contém todos nós)

**Corte - ** É uma partição dos nós de N em duas partes, S e $\overline{S}$ = N – S.
Cada corte define um conjunto de arcos a um extremo em S e outro em $\overline{S}$.
Estes arcos são denotados por [S, $\overline{S}$].

A capacidade de um corte é dada pela **soma da capacidade** dos arcos que ligam nós se S a nós de $\overline{S}$ menos a **soma do limite inferior** dos arcos que ligam nós de $\overline{S}$ aos nós de S.

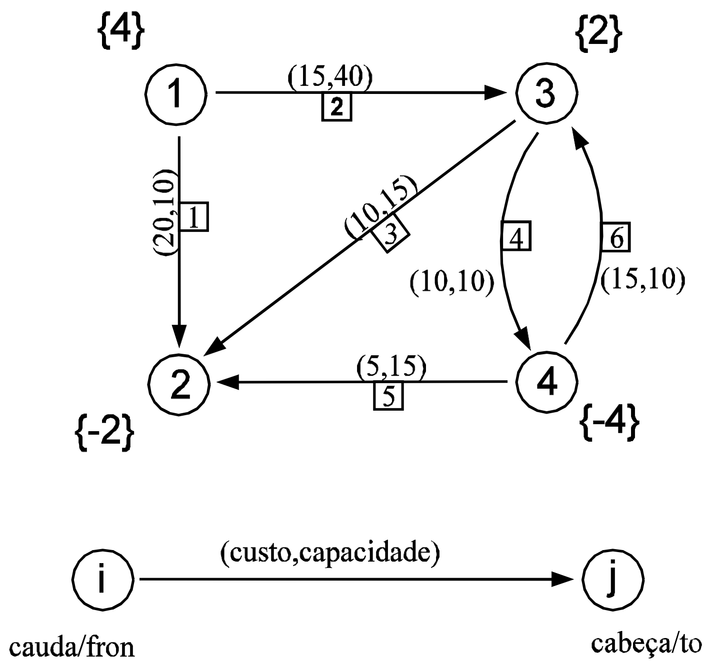
Um vetor de fluxo X é dito **factível** se satisfaz as condições:

$$\sum_{j:(i,j)\in A} Xij \quad - \sum_{i:(j,i)\in A} Xji \quad = bi \qquad \forall\, i \in N$$

(fluxo sai de i) - (fluxo entra em i) = (fluxo disponível em i)

$$0 \leq Xij \leq Uij \qquad \forall\, (i, j) \in A$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} bi = 0}$$



Armazenamento de uma rede

Nós trabalharemos com os vetores O[ ], D[ ], C[ ], etc.
Teremos também um vetor de listas adj_saida[ ] com os índices dos arcos adjacentes de saída (e de entrada) do nó i.
adj_saida[1] = {1, 2}, adj_saida [2] = { }, adj_saida [3] ={3, 4} , adj_saida [4] = {5, 6}

PROBLEMAS CLÁSSICOS DE OTIMIZAÇÃO EM REDES

Problema do Caminho Mínimo (PCM): Qual é a melhor forma de percorrer uma rede indo de um dado **ponto origem** a um outro **ponto destino**, com o menos custo possível?
Condições

Problema de Fluxo Máximo (PFM): Qual é o máximo de fluxo que pode-se enviar de um dado **ponto origem** a outro **ponto destino** da rede, respeitando a capacidade dos arcos? Como é feito este envio?
Condições

Problema de Fluxo com Custo Mínimo(PFCM): Considerando que

1. é conhecido o custo por unidade de fluxo que passa em cada arco da rede,
2. que os arcos podem ser podem ser capacitados,
3. e que precisamos enviar unidades de fluxo alocados em determinados nós (oferta/produção) para outros nós (demanda/consumo),

Devemos responder como fazer este envio pela rede com o menor custo possível tal que toda a demanda seja devidamente atendida?

M12.1 Problema de Transporte

Formule o problema e use o Gusek para resolvê-lo.

Existem 3 escolas públicas em três bairro da cidade de Busville. O número de estudantes negros e brancos em cada bairro é mostrado na tabela abaixo. A corte suprema da cidade impõe que a distribuição racial dos estudantes seja balanceada. Assim, cada escola deve ter exatamente 300 estudantes e cada escola deve ter o mesmo número de estudantes negros. A distância entre os bairros também é dado na tabela. Formule um problema de transporte para alocar os estudantes às escolas com a menor distância percorrida e que atenda à determinação judicial. Considere que os estudantes que forem alocados ao bairro onde moram percorrem distância 0 de suas casas até à escola.

M12.2 Problema de produção e distribuição

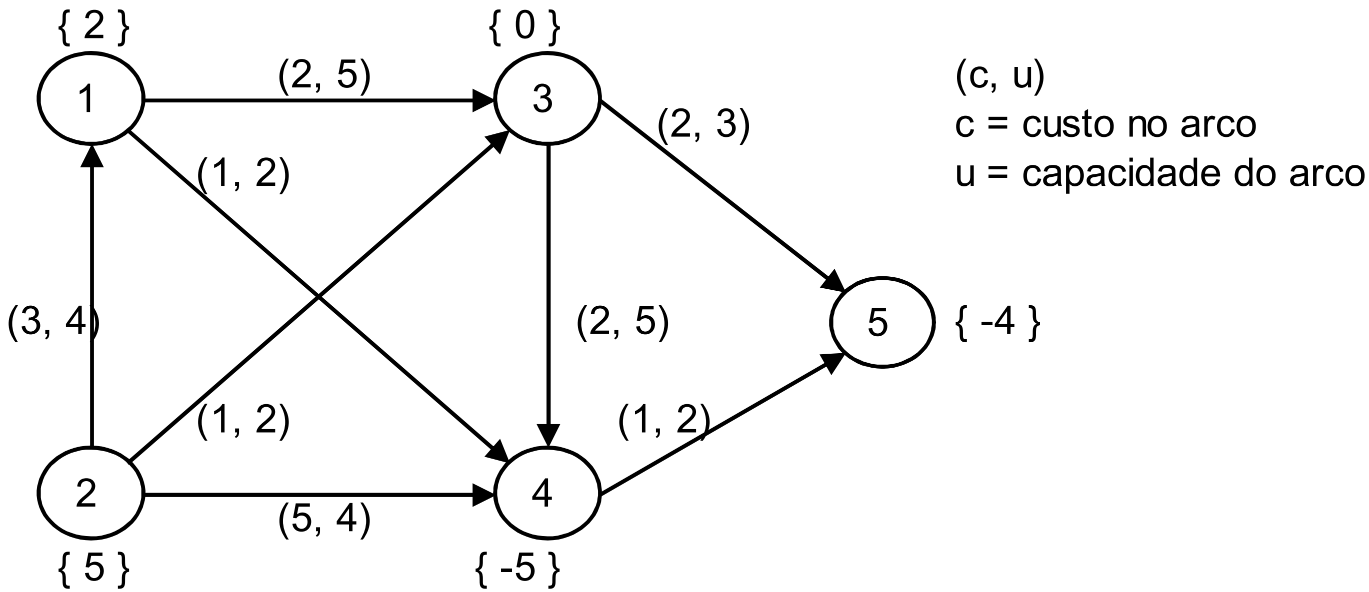
Clientes	Pedidos
1	2.840
2	2.800
3	2.600 -------- 8.240

Fábricas	Capacidade	Custo/veículo
Detroit, Michigan	4.000	2.100
Freemont, Cal.	4.500	2.000
Arlington, Texas	2.700	1.600
Atlanta, Georgia	3.000 ------- 14.200	1.700

	Detriot		Freemont		Arlington		Atlanta	
Cli	$/vc	Cap	$/vc	Cap	$/vc	Cap	$/vc	Cap
1	0	0	200	3000	500	1000	0	0
2	600	2000	400	2000	0	0	400	1000
3	300	2000	0	0	200	1000	400	1000

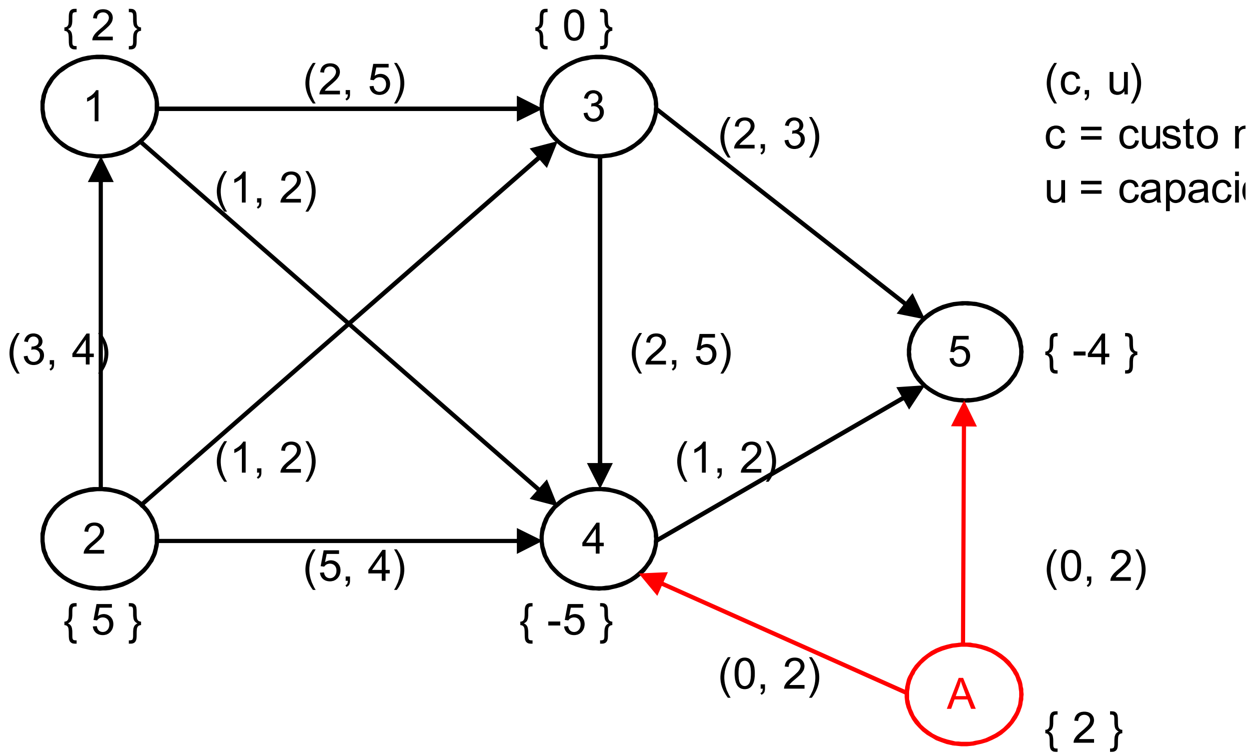
Custo e capacidade de transporte
Montar A REDE que representa o modelo de transporte
Equilibrado para este problema.

Equilibrando uma rede genérica de fluxo com custo mínimo



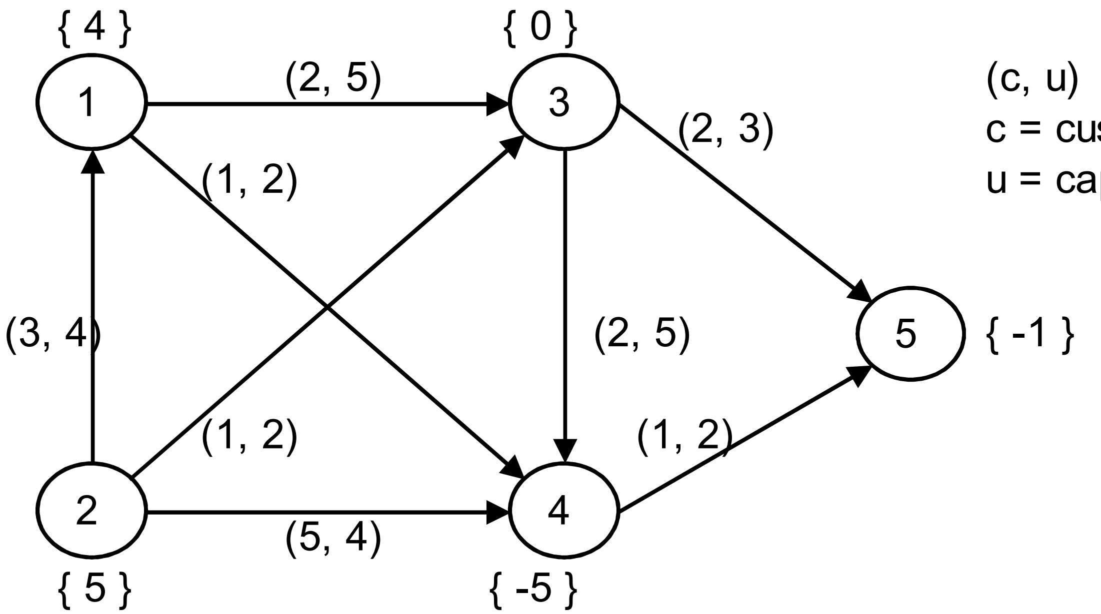
Total de oferta: 7 e total de demanda: - 9

Equilibrando uma rede genérica de fluxo com custo mínimo



custo nos arcos artificais são iguais a 0
ou iguais ao custo por unidade de demanda não atendida no nó destino.

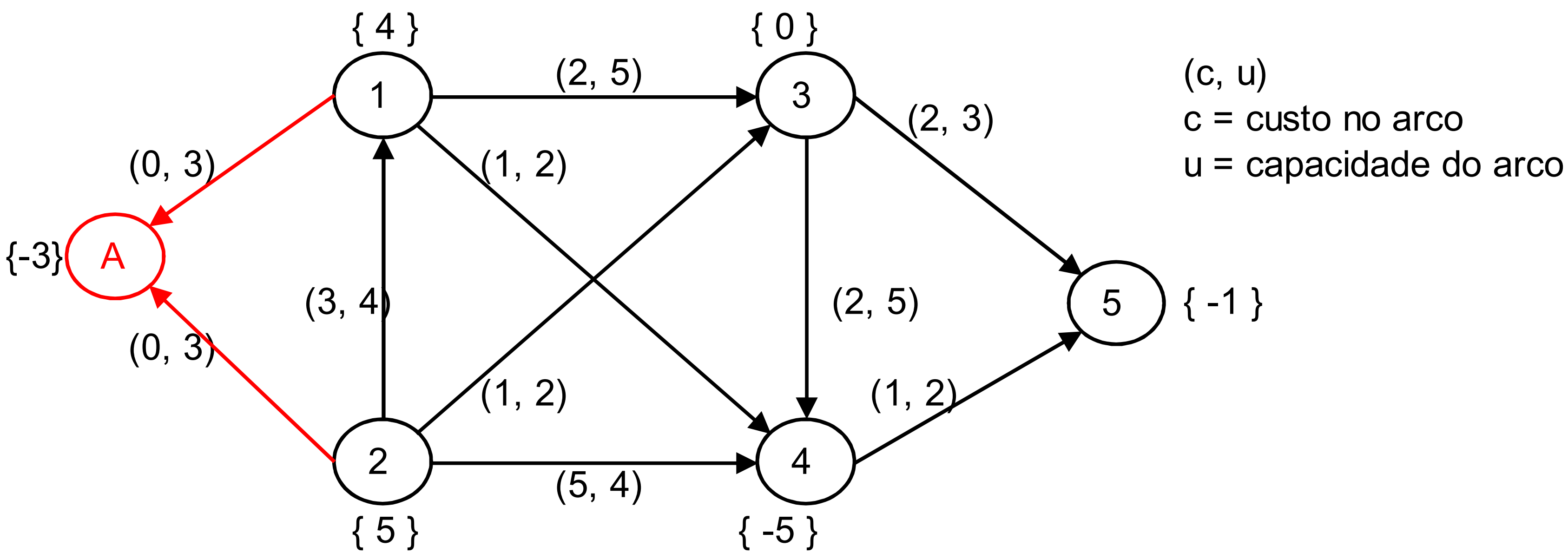
Equilibrando uma rede genérica de fluxo com custo mínimo



(c, u)
c = custo no arco
u = capacidade do arco

Total de oferta: 9 e total de demanda: - 6

Equilibrando uma rede genérica de fluxo com custo mínimo



custo nos arcos artificiais são iguais a 0
ou iguais ao custo por unidade de produção ociosa no nó origem.