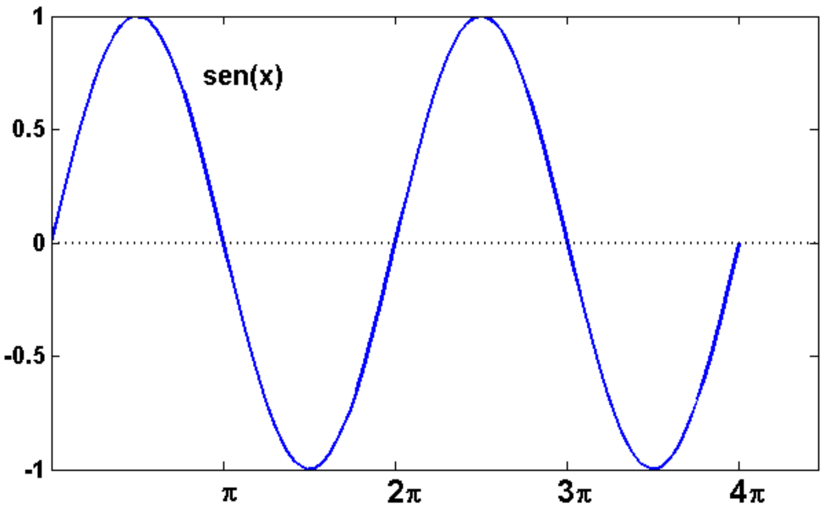
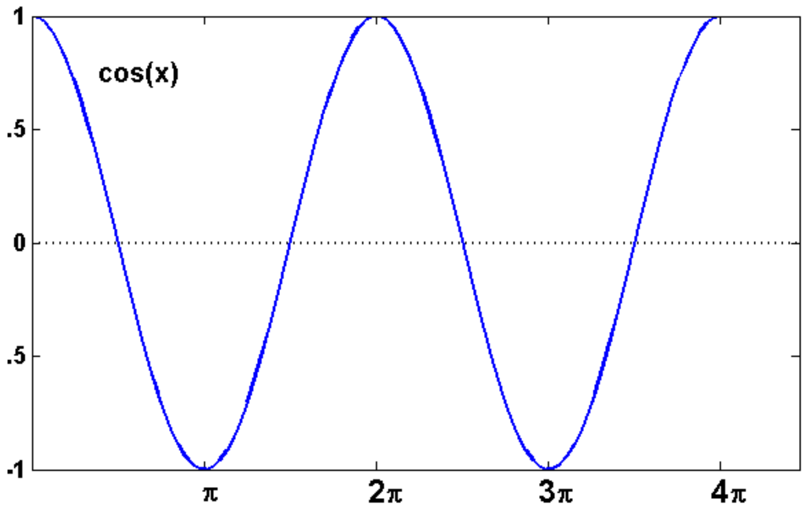
Tranformada de Fourier

Guillermo Cámara-Chávez

O que é uma série de Fourier

- Todos conhecemos as funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, etc.





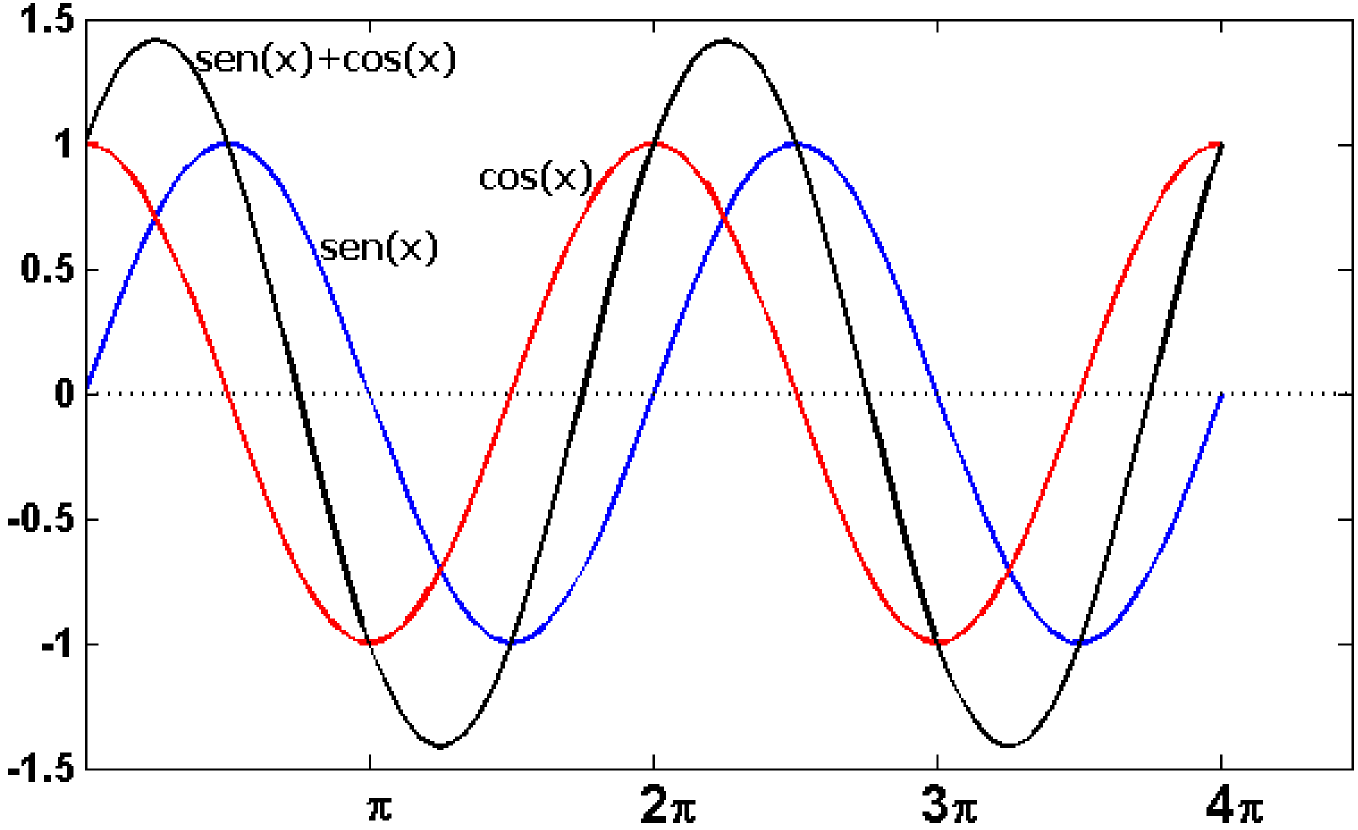
O que é uma série de Fourier

- Essa função é **periódica,** i.e., sua forma se repete a cada **período**.
- No caso da função seno se repete a cada período de 2π.
- O valor máximo da função, chamado de amplitude, é 1.

O que é uma série de Fourier

- A função cosseno também é periódica, com o mesmo período e amplitude que o seno, mas é deslocada em π/2.
- As funções seno e cosseno diferem na fase e a diferença de fase entre elas é de π/2

O que é uma série de Fourier



O que é uma série de Fourier

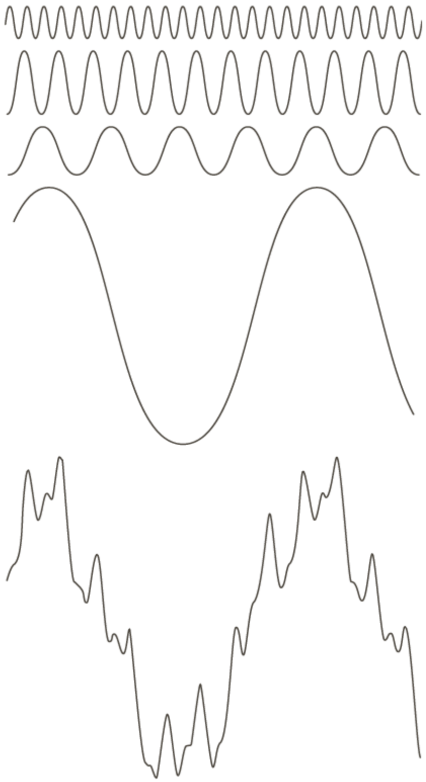


FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

Essa função é a soma das quatro funções acima.

O que é uma série de Fourier

- Freqüência (f): é o número de oscilações que ocorrem na unidade de tempo
- Período (T): tempo necessário para que um ponto qualquer da onda percorra uma distância igual a um comprimento de onda

O que é uma série de Fourier

- **Jean Baptiste Joseph Fourier** descobriu, no início do século 19 que:
  - qualquer função, por mais complicada que seja, pode ser representada como a soma de várias funções seno e cosseno com amplitudes, fases e períodos escolhidos convenientemente

O que é uma série de Fourier

- Fourier apresentou um artigo em 1807 ao Instituto de França, onde afirma que qualquer sinal periódico pode ser representando como uma soma de ondas sinusoidais.
- Entre os revisores do artigo tinha dos matemáticos famosos: **Joseph Louis Lagrange** e **Pierre Simon de Laplace**

O que é uma série de Fourier

- Laplace e outros revisores votaram para publicar o artigo, mas Lagrange foi contra.
- Lagrange insistia que essa abordagem não pode ser utilizado para representar sinais com *quinas* (ondas quadradas)
- Somente baseado no parecer do Lagrangre, o Instituto de França rejeitou o artigo.
- O artigo foi publicado depois da morte do Lagrange

O que é uma série de Fourier

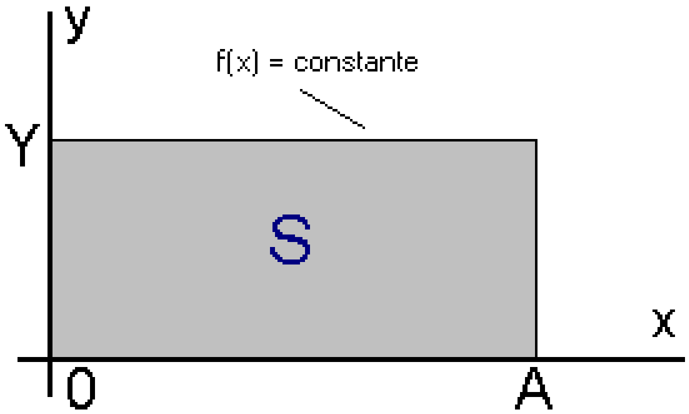
- Em resumo, qualquer função pode ser escrita na forma da soma de uma série de funções seno e cosseno

$$f(x) = a_0 + a_1 sen(x) + a_2 sen(2x) + a_3 sen(3x) + \cdots + b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + b_3 \cos(3x) + \cdots$$

- Basta calcular os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2$
- Esses coeficientes são as amplitudes de cada onda

Valores médios de funções

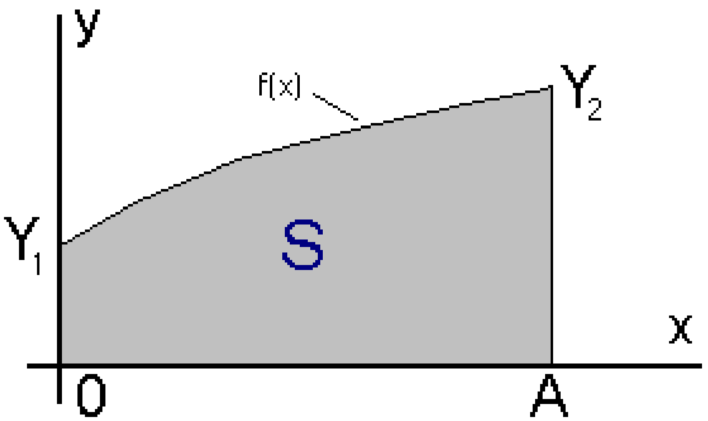
- Calcular a área embaixo de uma função é fácil quando ela é uma constante



- A área S é o produto da base pela altura

Valores médios de funções

- Se a função não for uma constante o cálculo não é tão simples pois envolve uma integral da função no trecho considerado.



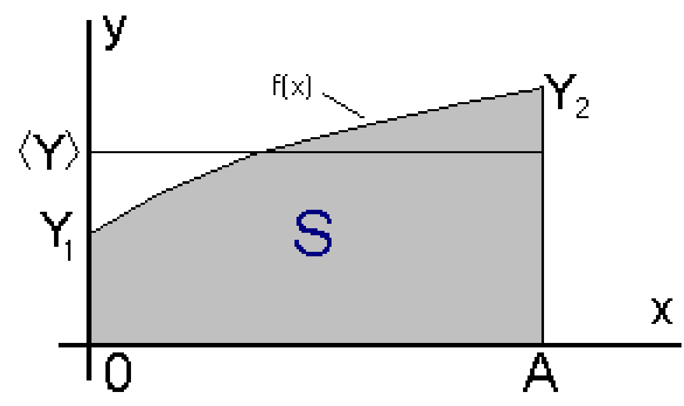
- A área S é definida por $S = \int_{0}^{A} f(x)d(x)$

Valores médios de funções

- Uma vez conhecido a área S, sempre é possível achar um retângulo de base A com a mesma área.
- O valor <Y> da altura desse retângulo (tal que S = A<Y>) é o **valor médio** da função f(x)

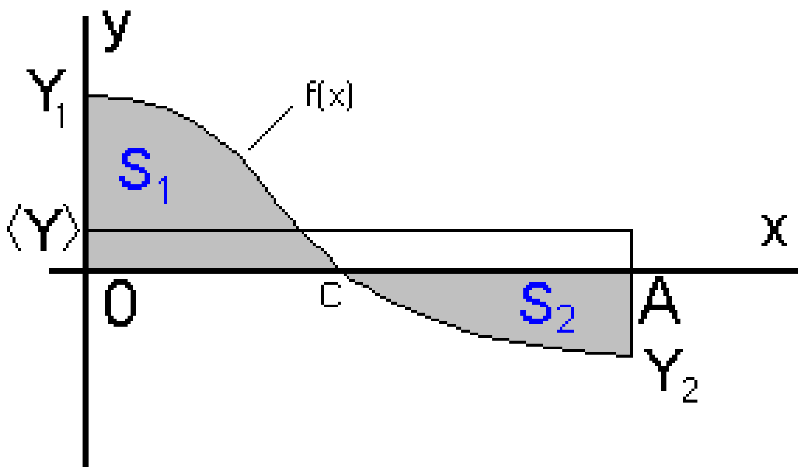
$$\langle Y \rangle = S/A$$

$$\langle Y \rangle = \frac{\int_0^A f(x)dx}{A}$$



Valores médios de funções

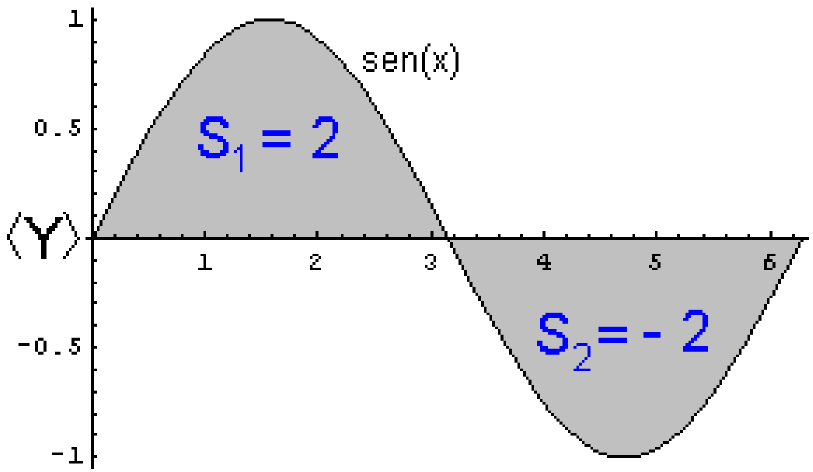
- A função *f(x)* pode ter valores positivos e negativos.
- Nesse caso a área *S* é dada por $S = S_1 - S_2$ e o valor médio é $<Y> = (S_1 - S_2)/A$



Valores médios de funções

- No caso da função *sen(x)* a área da parte positiva é igual à área da parte negativa.
- Portanto, S é nula e o valor médio em um período é zero.
- O mesmo ocorre com a função *cos(x)*

$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)dx = 2$$



Valores médios de funções

$$\int sen(x)dx = -\cos(x) + c$$

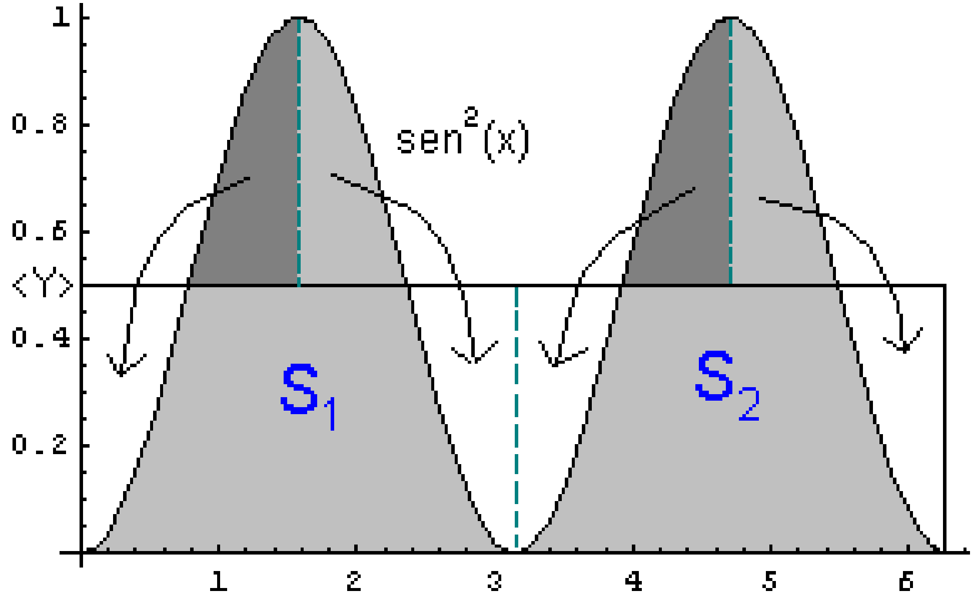
$$\int \cos(x)dx = sen(x) + c$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} sen(x)dx &= [-\cos(x)]_0^{\pi} \\
&= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\
&= -(-1) + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Valores médios de funções

- No caso da função f(x)=$sen^2(x)$, S_1 e S_2 são positivos e têm o mesmo valor.
- O valor média da função é: <$sen^2(x)$> = 1/2

$$< sen^2(x) >= \frac{\int_0^{2\pi} sen^2(x)dx}{2\pi} = \frac{1}{2}$$



Valores médios de funções

$$\int sen^2(x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right) + c$$

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \sin(x)\cos(x)\right) + c$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} sen^2(x)dx &= \frac{\frac{1}{2}\left(x - sen(x)\cos(x)\right)_0^{2\pi}}{2\pi} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(2\pi - sen(2\pi)\cos(2\pi)\right) - \frac{1}{2}\left(0 - sen(0)\cos(0)\right)}{2\pi} \\
&= \pi/(2\pi) \\
&= 1/2
\end{aligned}$$

Calculando os coeficientes de uma série de Fourier

- A função f(x) pode ser expandida em uma séria de Fourier aproximada pela soma de senos e cossenos

$$f(x) = a_0 + a_1 sen(x) + a_2 sen(2x) + a_3 sen(3x) + \cdots + b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + b_3 \cos(3x) + \cdots$$

- Suponha que vamos achar o coeficiente a_3

Calculando os coeficientes de uma série de Fourier

- Primeiro multiplicamos os dois lados da equação por sen(3x)

$$f(x)sen(3x) = a_0 sen(3x) + a_1 sen(x)sen(3x) + a_2 sen(2x)sen(3x) + a_3 sen^2(3x) + \cdots + b_1 \cos(x)sen(3x) + \cdots$$

- E aí surge algo fantástico: **todas as médias do lado direito da equação são nulas, menos a média do termo correspondente a a_3**!

  $<f(x)sen(3x)>=1/2\ a_3$

Calculando os coeficientes de uma série de Fourier

- Isso acontece porque cada termo da esquerda (menos a_3) contém a média de um seno ou cosseno, que é zero.
- O termo de a_3 contém a média de $sen^2(3x)$, que vale ½. Portanto:

$$a_3 = 2<f(x)sen(3x)>$$

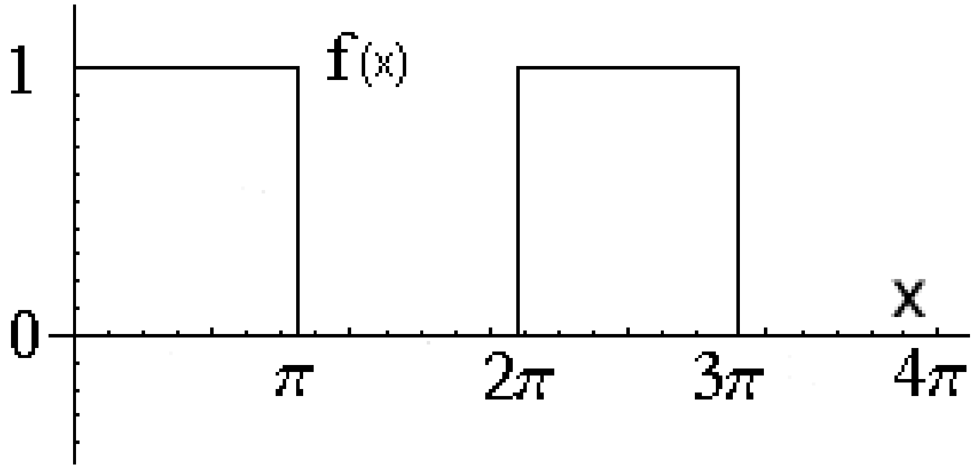
Calculando os coeficientes de uma série de Fourier

- Fazendo o mesmo para todos os valores de **n** em **sen(nx)** e **cos(nx)**, verificamos, portanto, que:

  $a_0 = < f(x) > =$ média de $f(x)$.
  $a_n = 2 < f(x)\, \mathrm{sen}(nx) >$
  $b_n = 2 < f(x) \cos(nx) >$

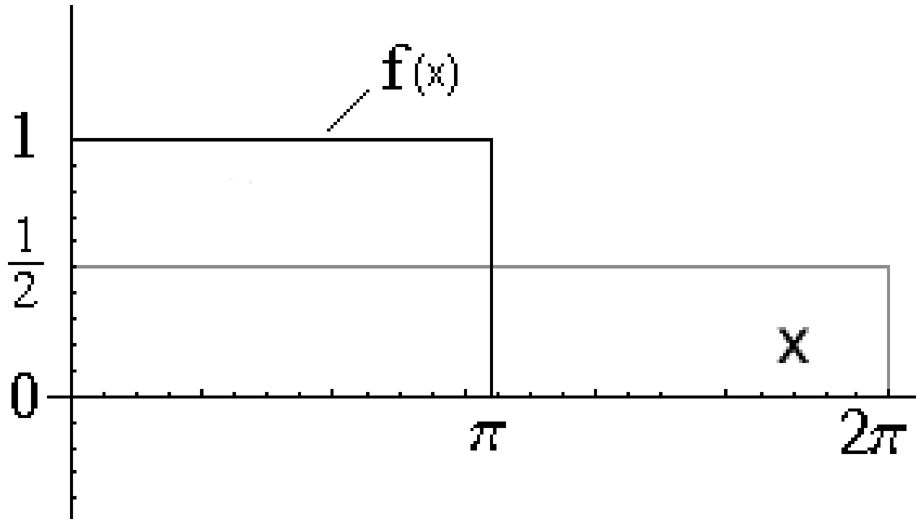
Exemplo Prático

- Desenvolvimento em série de Fourier de uma função periódica simples (onda quadrada ou função grau)



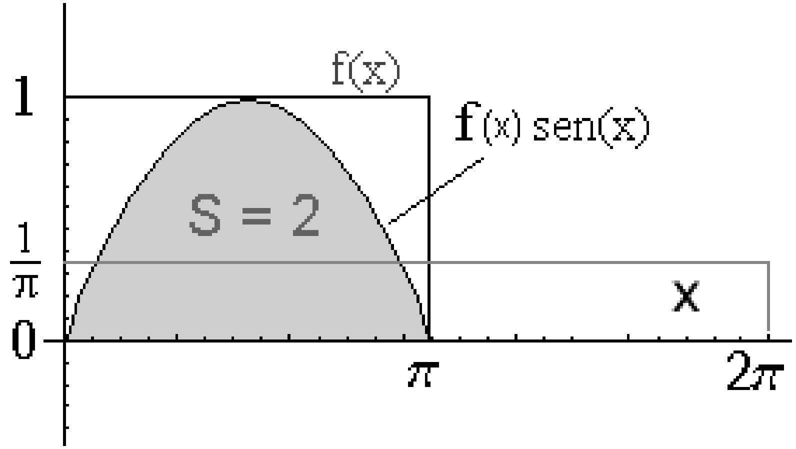
Exemplo Prático

- O primeiro coeficiente, a_0, é a média de f(x) no período.
- Pela figura o valor médio é ½
- $a_0 = 1/2$



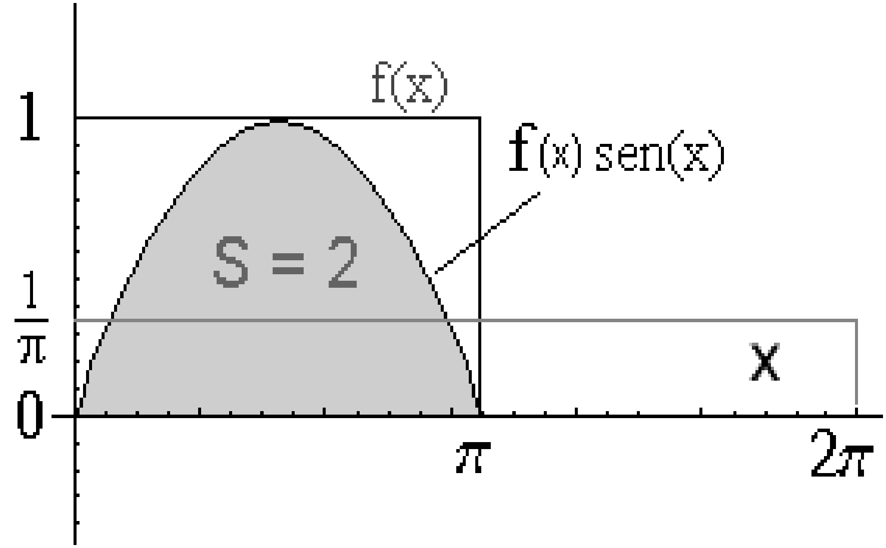
Exemplo Prático

- Para obter o coeficiente a_1, multiplicamos *f(x)* por *sen(x)*.
- Obtemos uma meia onda de uma senóide.
- Já vimos que essa méia onda é *S=2*.



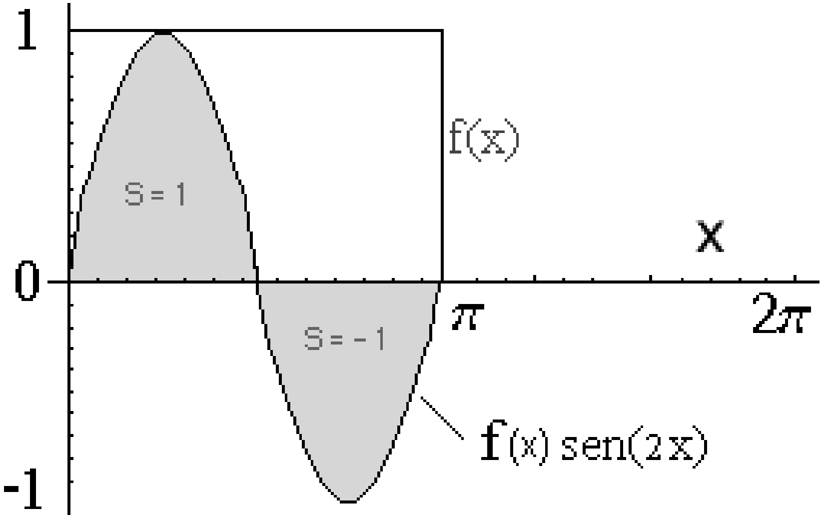
Exemplo Prático

- A altura do retângulo é o valor médio do produto *f(x)sen(x)*, deve ser $1/\pi$
- Portanto: $a_1=2\langle f(x)sen(x)\rangle=2/\pi$



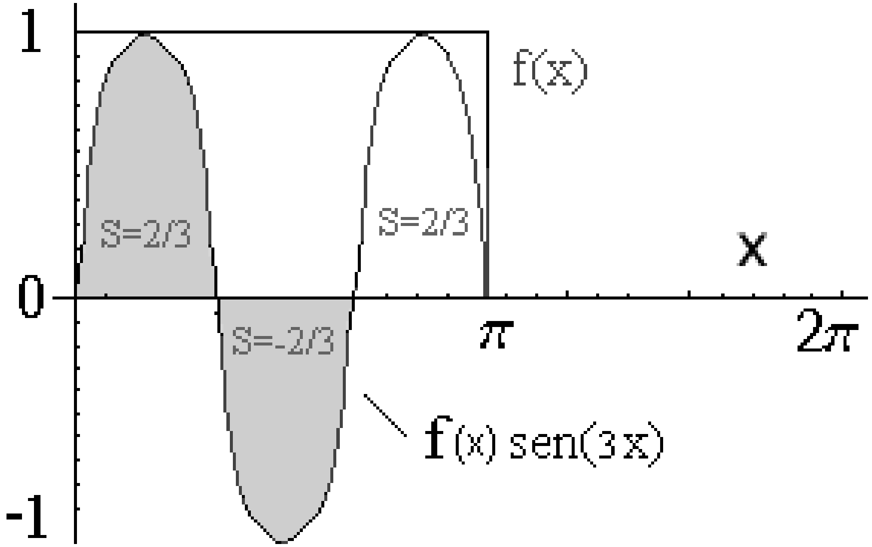
Exemplo Prático

- Para obter o coeficiente a_2, multiplicamos *f(x)* por *sen(2x)*.
- É claro, pela figura, que esse valor médio é zero.
- $a_2=0$



Exemplo Prático

- Para obter o coeficiente a_3, multiplicamos $f(x)$ por $sen(3x)$.
- Logo, o valor médio do produto vale 1/3π
- a_3=2/3 π



Exemplo Prático

- Continuando com esse processo para os demais coeficientes, logo fica claro que o resultado total é o seguinte:

  $a_0 = 1/2$;

  $a_n = 0$ - para todo *n* PAR;

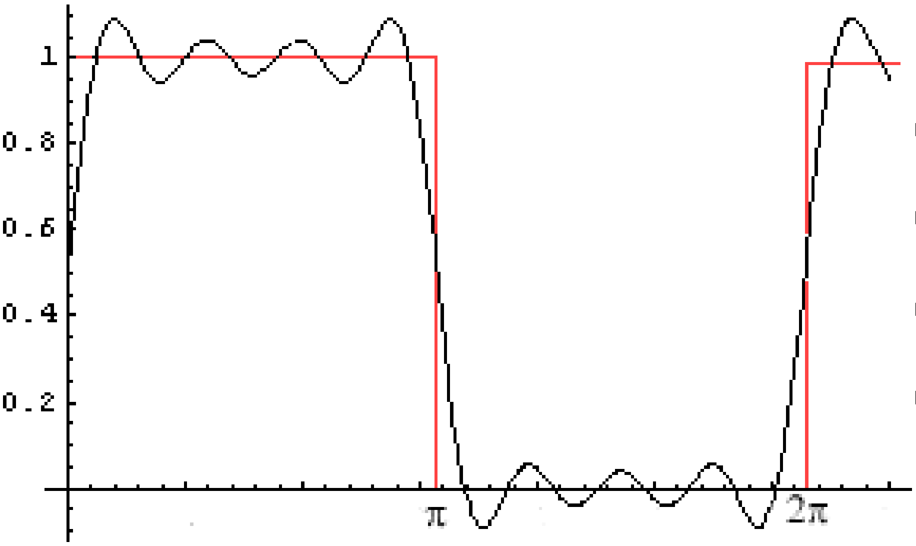
  $a_n = 2/\pi n$ - para todo *n* ÍMPAR.

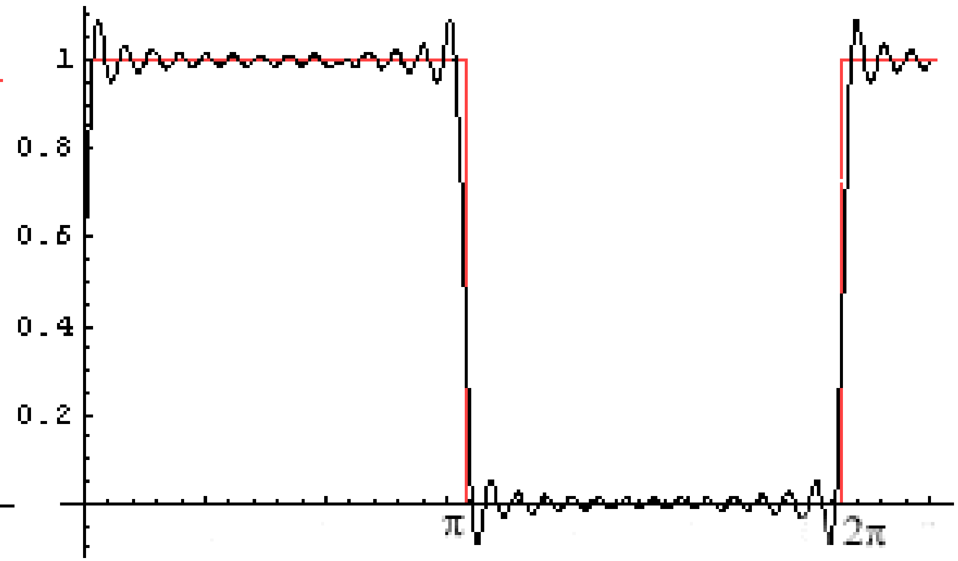
Exemplo Prático

- Os coeficientes dos termos em cos(x), i.e., b_n, são nulos.
- Portanto, a série de Fourier para a onda quadrada é:

$$f(x) = 1/2 + (2/\pi)sen(x) + (2/(3\pi))sen(3x) + (2/(5\pi))\sin(5x) + (2/(7\pi))\sin(7x) + \cdots$$

Exemplo Prático





5 termos

15 termos

Soma de senos

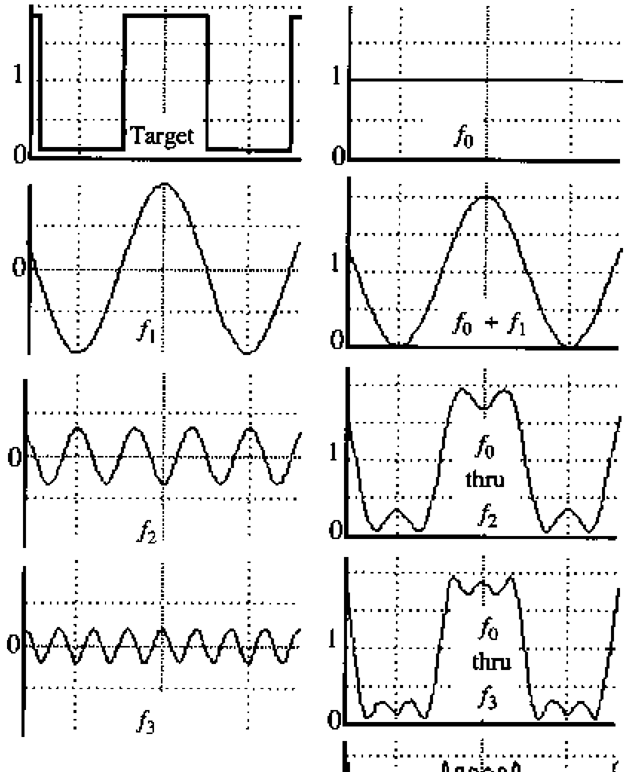
Bloco de construção:

$$A\sin(\mu t+\theta)$$

A: amplitude

μ: freqüência angular

θ: ângulo da fase ou
deslocamento



f(target)=
$f_1 + f_2 + f_3 ... + f_n + ...$

Transformada de Fourier

- Mesmo funções não periódicas, mas cuja área sob a curva é finita, podem ser expressas como integral de senos e /ou cossenos multiplicados por uma função peso. A formulação neste caso é a transformada de Fourier.
- O advento dos computadores digitais e a formulação do algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT) no início dos anos 1960 revolucionaram o campo de processamento de imagens e sinais.

Tranformada de Fourier

- CONCEITOS PRELIMINARES
  - Números complexos: Um número complexo C é definido como

    $$C = R + jI$$

    onde *R* e *I* são números reais e *j* é um número imaginário igual a raiz quadrada de -1, ou seja, $j = \sqrt{-1}$
  - O conjugado de um número complexo *C*, denotado *C**, é definido como

    $$C^* = R - jI$$

Transformada de Fourier

– *As vezes representamos os números complexos em coordenadas polares*

$$C = |C| \, (\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$$

onde $|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$

– *Usando a fórmula de Euler* $e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$

temos a representação familiar em coordenadas

$$C = |C| e^{j\theta}$$

Transformada de Fourier

- SÉRIE DE FOURIER
  - Como anteriormente descrito, uma função f(t) de uma variável contínua t que é periódica com período T, pode ser expressa como a soma de senos e cossenos multiplicados por coeficientes apropriados. Essa soma, chamada série de Fourier, tem a forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

onde

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}dt \qquad para \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

são os coeficientes.

Transformada de Fourier

A TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÕES CONTÍNUAS DE UMA VARIÁVEL (Scary MATH!!!)

- A transformada de Fourier de uma função contínua f(t) , é definida pela equação

$$F(\mu) = \Im\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi \mu t} dt$$

onde μ é também uma variável contínua.

- Dada F(μ), podemos obter f(t) usando a transformada inversa de Fourier

$$f(t) = \Im^{-1}\{F(\mu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi \mu t} d\mu$$

Transformada de Fourier

Not so scary!!

- Usando a fórmula de Euler $e^{j\theta} = \cos\theta + j sen\theta$
- oculta a nossa velha conhecida $A\sin(\mu t + \theta)$

$$P\cos(x) + Q\cos(x) = A\sin(x + \theta)$$

- podemos expressar

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\cos(2\pi\mu\, t) - j\sin(2\pi\mu\, t)\right]dt$$

Transformada de Fourier

- Transformada de Fourier da função da Fig.4.4a

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-W/2}^{W/2} A e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$= \frac{-A}{j2\pi\mu} \left[e^{-j2\pi\mu t} \right]_{-W/2}^{W/2} = \frac{-A}{j2\pi\mu} \left[e^{-j\pi\mu W} - e^{j\pi\mu W} \right]$$

$$= \frac{A}{j2\pi\mu} \left[e^{j\pi\mu W} - e^{-j\pi\mu W} \right]$$

$$= AW \frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)}$$

onde a identidade $\sin\theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) / 2j$ foi usada

- E o resultado é uma função sinc: $\mathrm{sinc}(m) = \dfrac{\sin(\pi m)}{(\pi m)}$

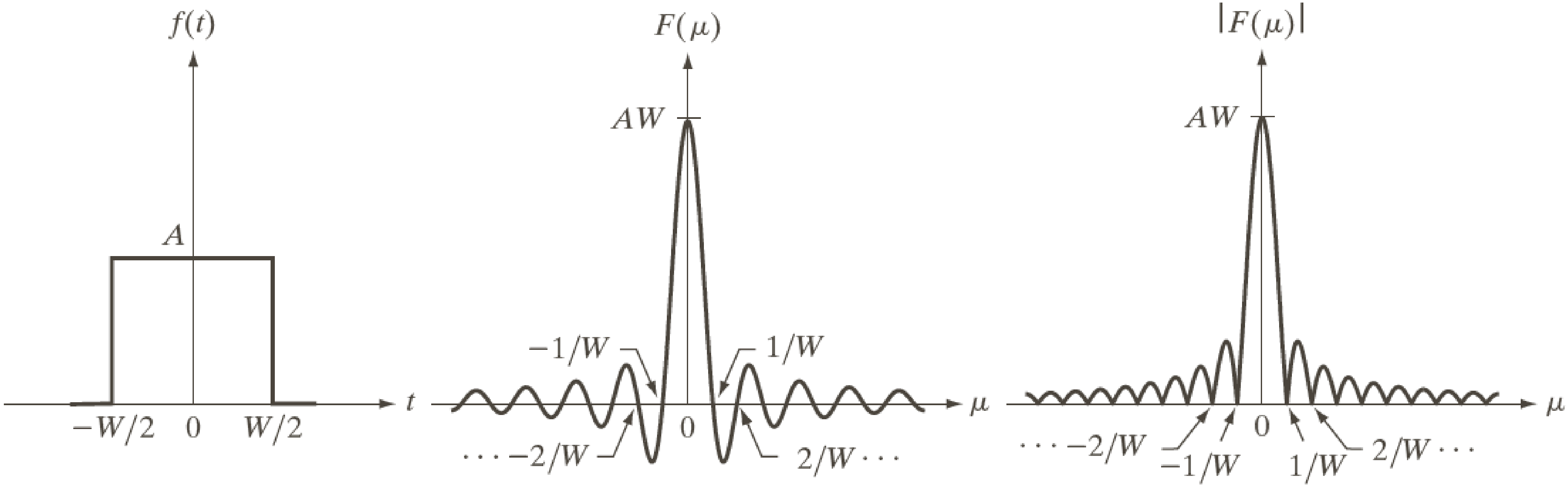
Transformada de Fourier

- Em processamento digital de sinais, a função normalizada **sinc** é definida como

$$\mathrm{sinc}(m) = \frac{\sin(\pi\, m)}{(\pi\, m)}$$

- É definida como normalizada porque a integral da função sobre todo x é 1. A tranformada de Fourier da função sinc normalizada é uma função quadrada sem escala

Transformada de Fourier



a b c

FIGURE 4.4 (a) A simple function; (b) its Fourier transform; and (c) the spectrum. All functions extend to infinity in both directions.

Transformada de Fourier

TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA 2-D E INVERSA

- A transformada discreta de Fourier 2-D (DFT) é dada por

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

onde f(x,y) é uma imagem digital de tamanho MxN.

- Dada a transformada F(u,v), podemos obter f(x,y) usando a transformada inversa discreta de Fourier (IDFT):

$$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

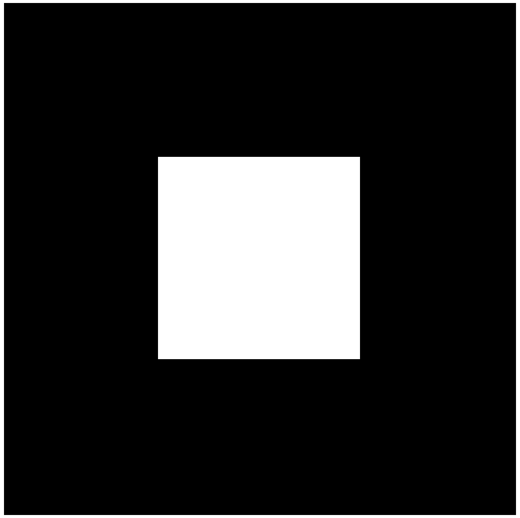
Transformada de Fourier

- Transformada de Fourier em Matlab
  - fft: calcula a DFT de um vetor
  - ifft: calcula a inversa da DFT de um vetor
  - fft2: DFT de uma matriz
  - ifft2: inversa da DFT de uma matriz
  - fftshift: desloca a DFT
- Para visualizar o espectro de Fourier usamos a função log

Transformada de Fourier

```
a=zeros(256,256);
a(78:178,78:178)=1;
imshow(a)
af=fftshift(fft2(a));
figure;
imshow(log(abs(af)+1),[]);
```

Transformada de Fourier



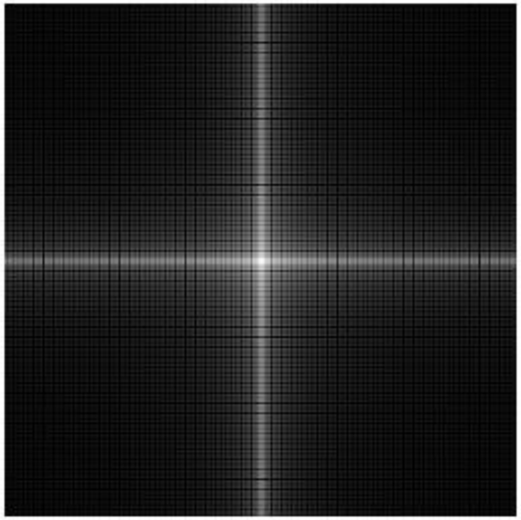


Tabela de Integrais

$$\int \cos(x)d(x) = \sin(x) + c$$

$$\int \sin(x)d(x) = -\cos(x) + c$$

$$\int \sin^2(x)d(x) = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + c$$

$$\int \cos^2(x)d(x) = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + c$$