Tranformada de Fourier II

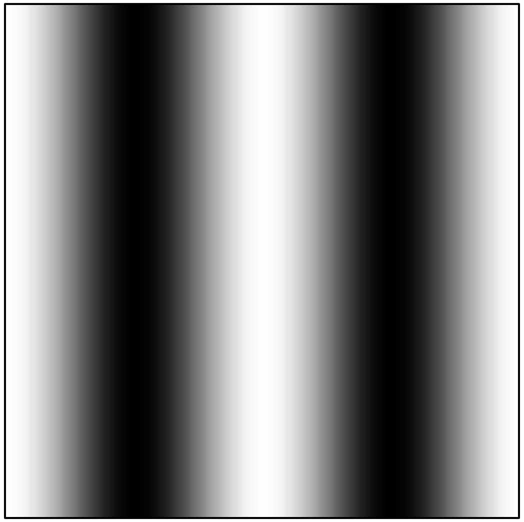
Guillermo Cámara-Chávez

Principios básicos

- A teoria de Fourier diz que qualquer sinal, em nosso caso as imagens, podem ser expressadas como uma soma de senóides.
- No caso das imagens, são variações senóides do brilho na imagem.

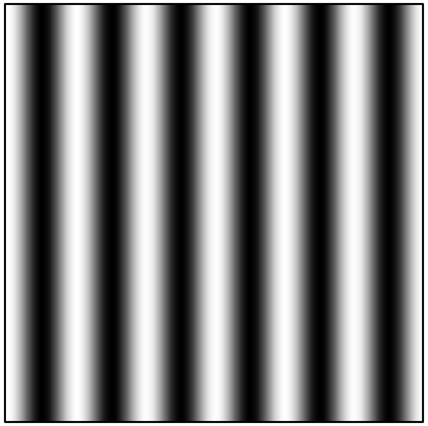
Principios básicos

- Por exemplo o seguinte padrão senóide pode ser capturado por um único termo de Fourier com a seguintes informações: 1) a freqüência espacial, 2) a magnitude (positiva ou negativa), 3) a fase



Principios básicos

- Esses três valores capturam toda a informação sobre a imagem senóide.
  - Freqüência espacial: é a freqüência através do espaço (eixo x neste caso) em que o brilho modula
- A seguinte imagem apresenta uma freqüência maior

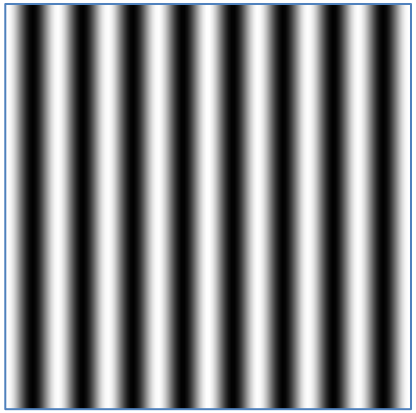


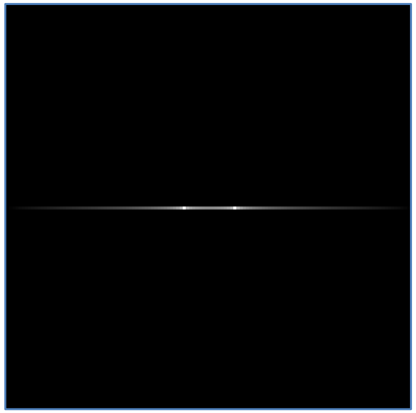
Principios básicos

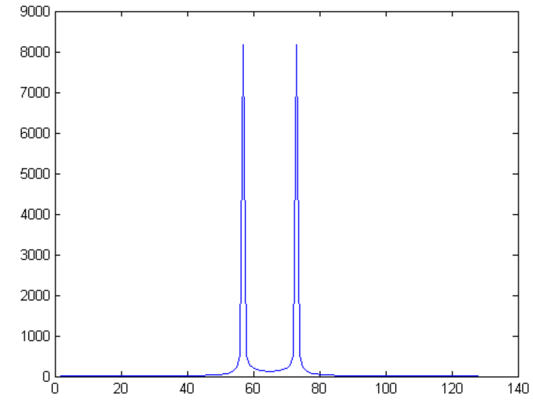
- A magnitude corresponde ao contraste (diferenças entre valores escuros e claros)
- A fase representa a forma como a onda é transladada

Principios básicos

cosseno horizontal de 8 ciclos



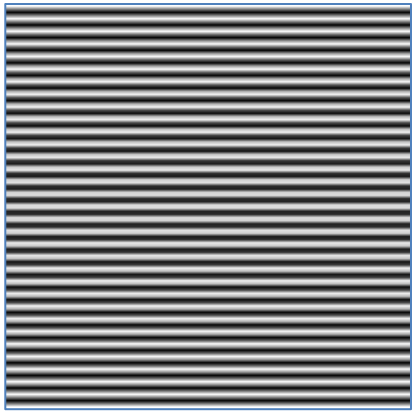


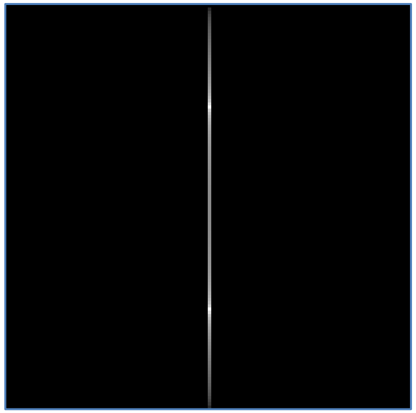


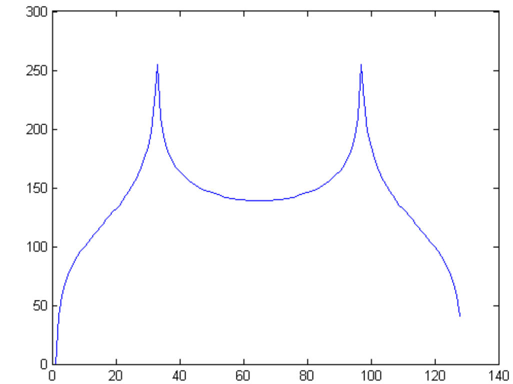
Espectro

Perfil de lin/col

cosseno vertical de 32 ciclos







Transformada de Fourier 2D

- A transformada de Fourier de ambas imagens tem uma única componente.
- Essa componente está representada por 2 valores "pontos" brilhantes simetricamente localizados em relação a parte central da imagem da TF.
- O centro da imagem é a origem do sistema de coordenadas da freqüência.

Transformada de Fourier 2D

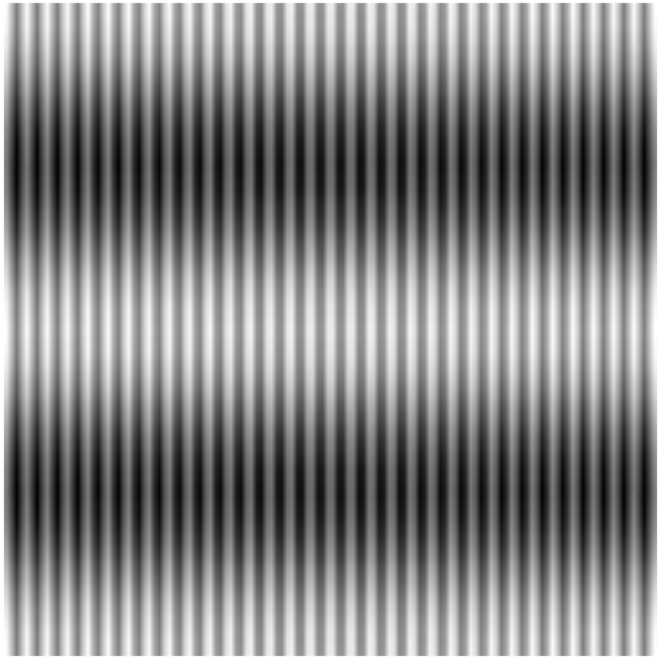
- O componente DC está situada na origem do sistema de coordenadas
- O componente DC, F(0,0), corresponde à soma ou média dos valores de f(x, y)

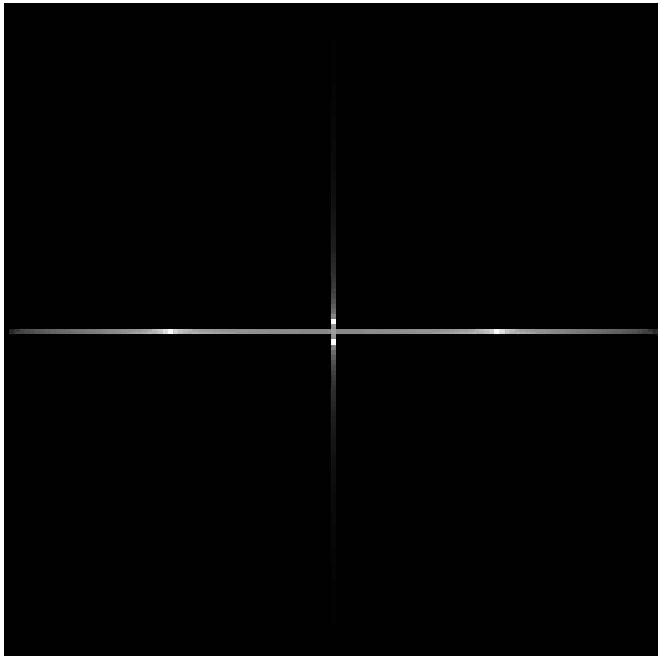
$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(0x/M + 0y/N)}$$

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{0}$$

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y).1$$

Transformada de Fourier 2D





cos(32*x) cos(2*y)

Transformada de Fourier 2D

- A transformada discreta de Fourier 2-D (DFT) é dada por

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

onde *f(x,y)* é uma imagem digital de tamanho *MxN*.

- Dada a transformada *F(u,v)*, podemos obter *f(x,y)* usando a transformada inversa discreta de Fourier (IDFT):

$$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

Transformada de Fourier 2D

- O multiplicador *1/MN* às vezes aparece na frente da transformada inversa
- Outras vezes (não é comum) as duas equações podem ser multiplicados por $1/\sqrt{MN}$
- A localização do multiplicador não é importante.
- Se dois multiplicadores são utilizados, a única condição é que o produto seja igual a *1/MN*

Transformada de Fourier 2D

- A transformada discreta de Fourier e sua inversa sempre existem
- A transformada de Fourier pode ser vista como uma “prisma matemático” que separa uma função em vários componentes de freqüência

Espectro de Fourier e ângulo de fase

- Pode ser expresso em forma polar:

$$F(u,v) = |F(u,v)| e^{j\Phi(u,v)}$$

- onde a magnitude é chamada de espectro de Fourier, ou espectro de frequência, e

$$|F(u,v)| = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

- é o ângulo de fase.

$$\Phi(u,v) = \arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

- Finalmente o espectro de potência é definido como

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

Espectro de Fourier e ângulo de fase

- A transformada de Fourier é representada pela magnitude e a fase.
- A magnitude diz "quanto" de uma certo componente de freqüência está presente
- A fase diz "onde" que o componente está presente
- Resulta difícil interpretar a imagem da fase

Transformada de Fourier 2D

- A transformada de Fourier de uma função real é conjugada simétrica

$$F^*(u,v) = F(-u, -v)$$

- portanto o espectro também tem simetria sobre a origem

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

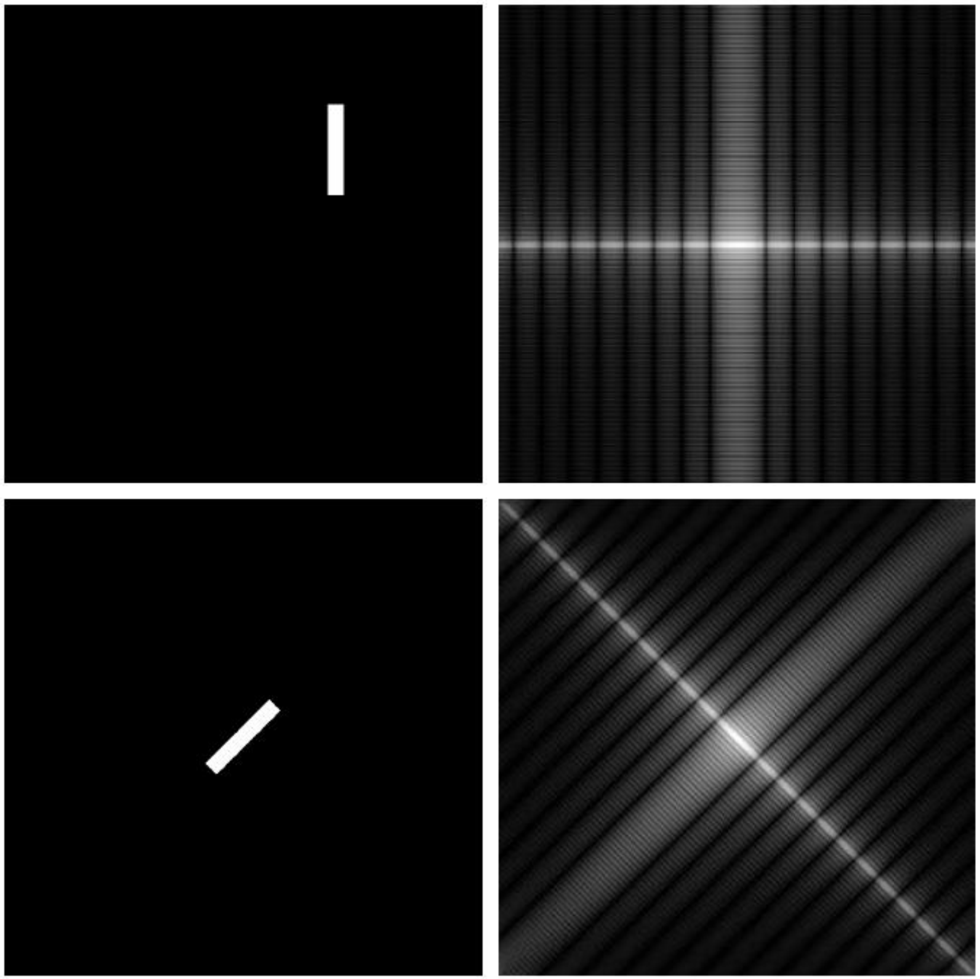
- O ângulo de fase exibe a seguinte simetria ímpar sobre a origem

$$F(u,v) = - F(-u,-v)$$

Para centrar o espectro, multiplicamos a imagem por $(-1)^{x+y}$

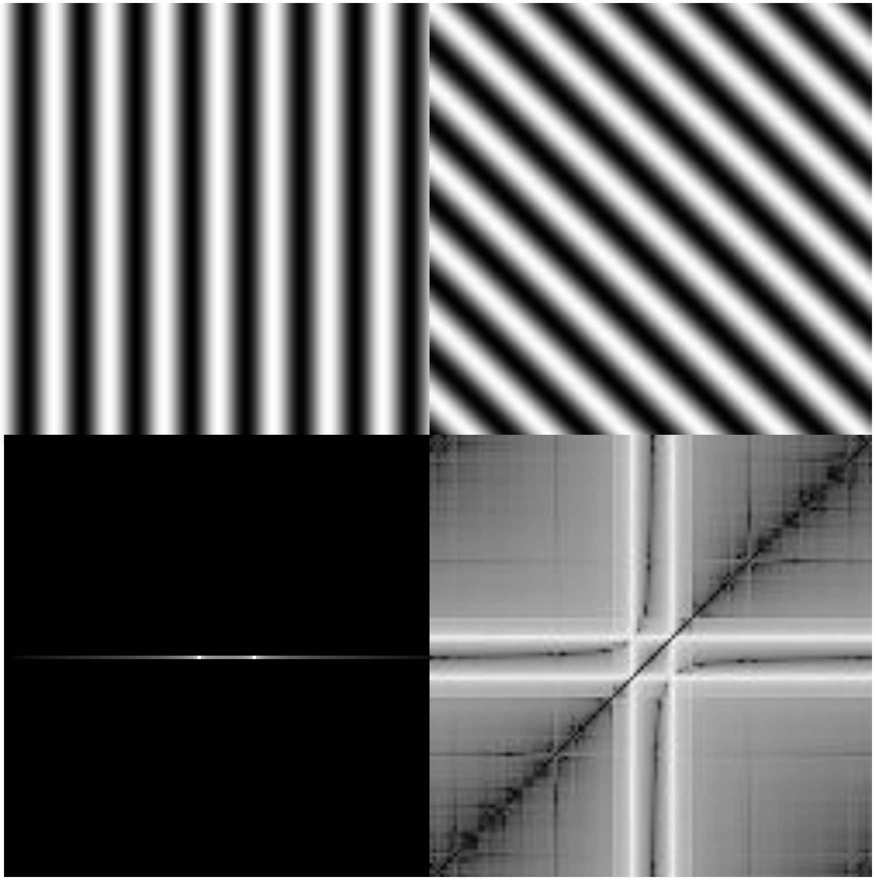
Rotação e efeitos das bordas

- A rotação de uma imagem resulta também na rotação da correspondente transformada de Fourier



Rotação e efeitos das bordas

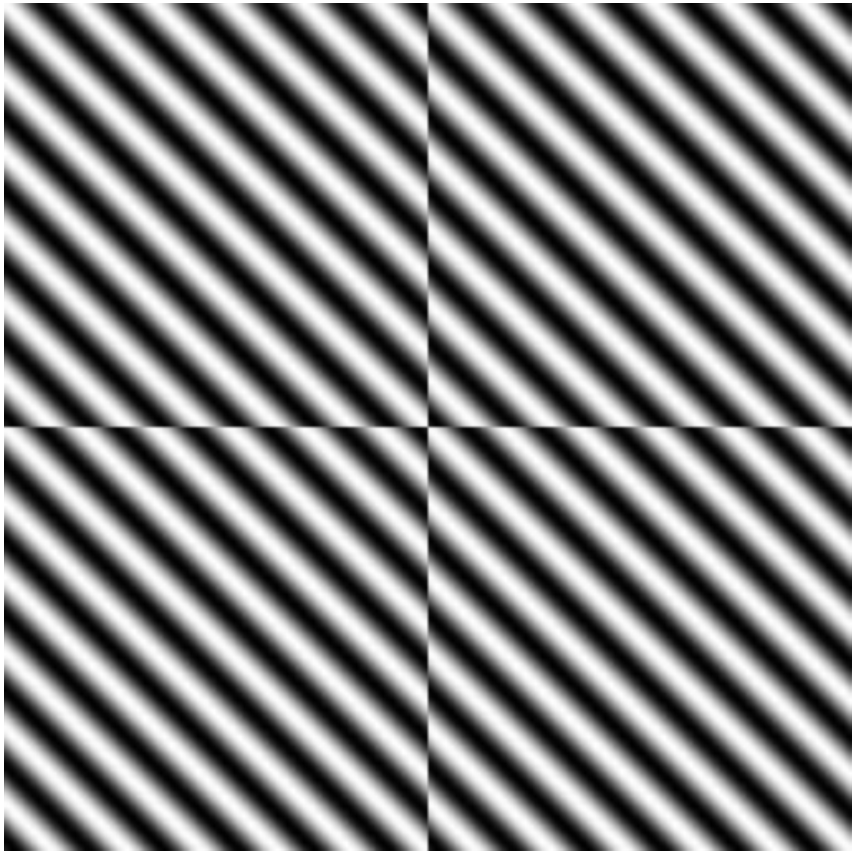
- O cosseno horizontal tem um FT normal e simples
- O cosseno rotacionado tem um FT complexo, com um componente diagonal forte e também um componente horizontal e vertical



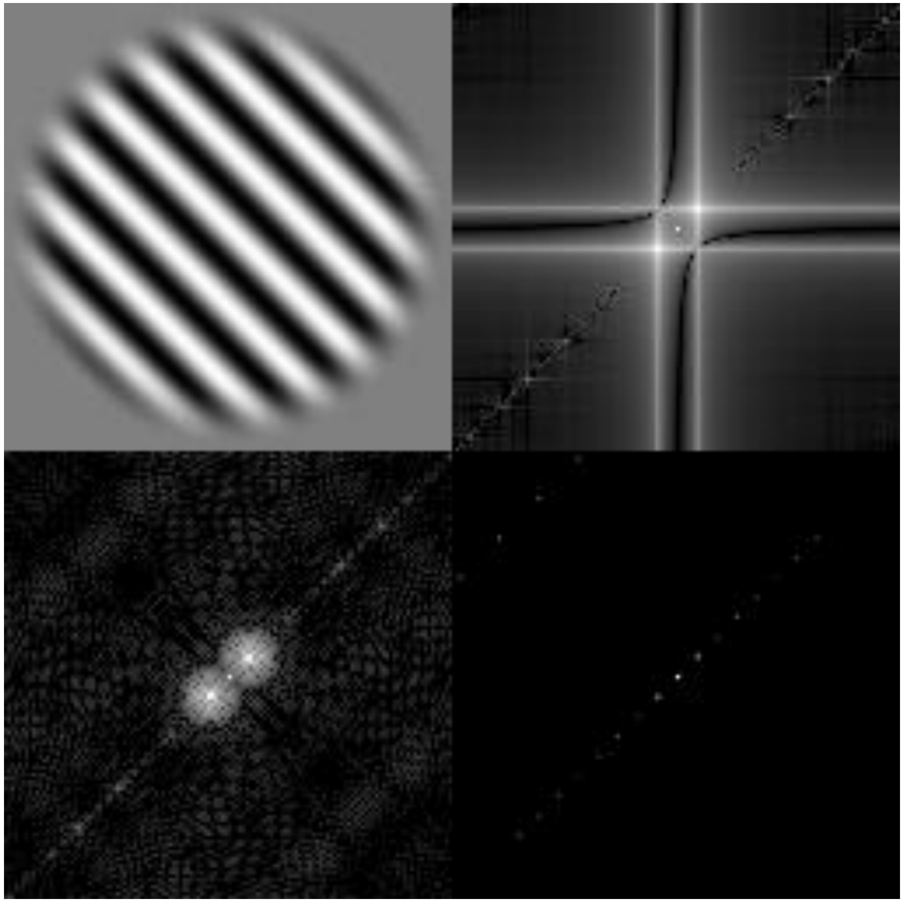
Rotação e efeitos das bordas

- De onde que vêm os componentes verticais e horizontais?
- A TF sempre trata a imagem como se fosse parte de um vetor replicado periodicamente de imagens idênticas estendendo-os vertical e horizontalmente ao infinito.

Rotação e efeitos das bordas



Rotação e efeitos das bordas

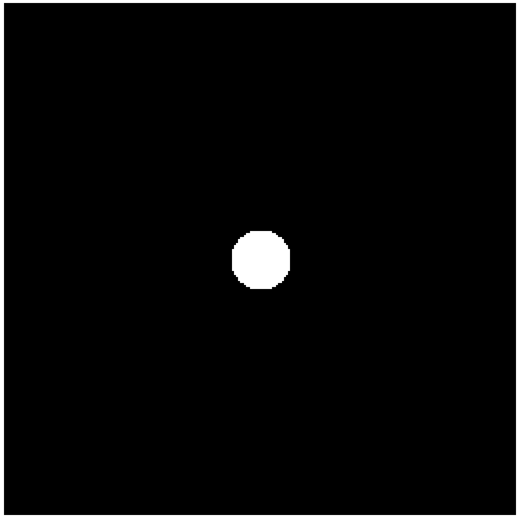


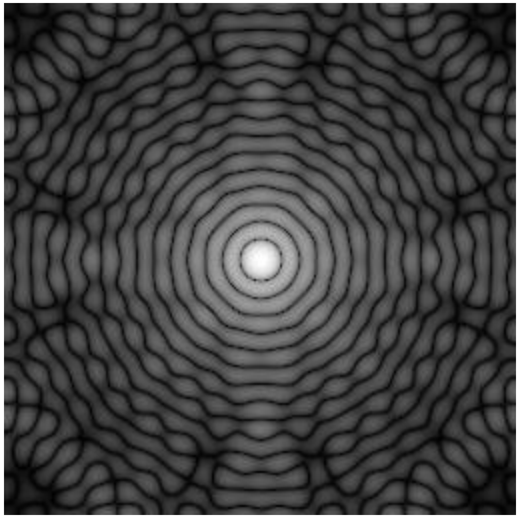
Rotação e efeitos das bordas

- Criando um pequeno círculo e calculando sua TF

```
[x, y] = meshgrid(-128:127, -128:127);
z = sqrt(x^2 + y^2);
c = (z < 15);
cf = fftshift(fft2(c));
imshow(log(abs(cf)+1), []);
```

Rotação e efeitos das bordas

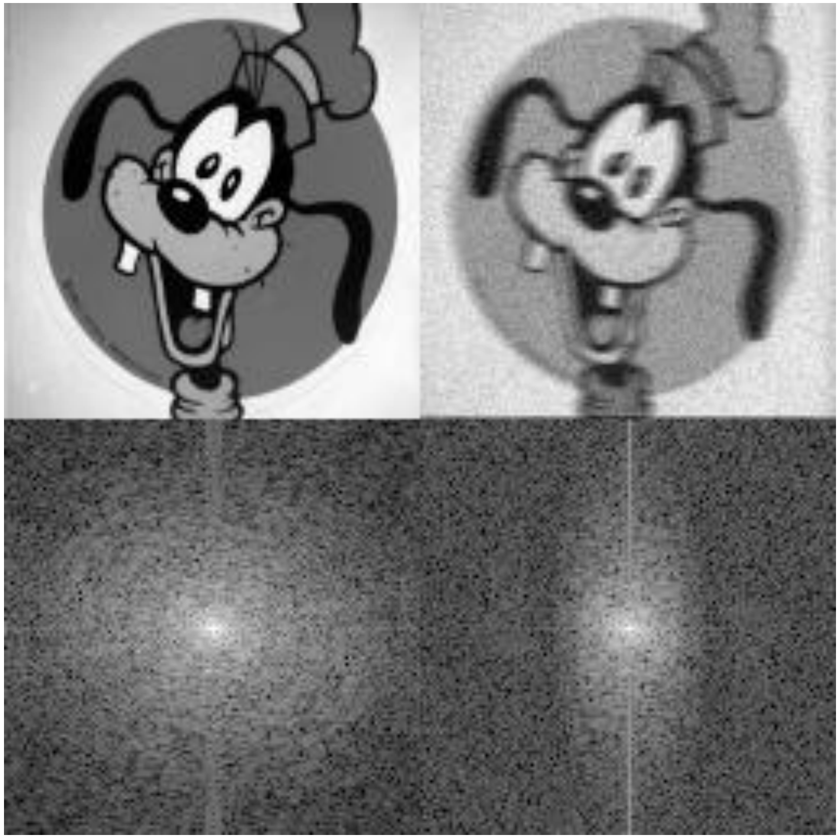




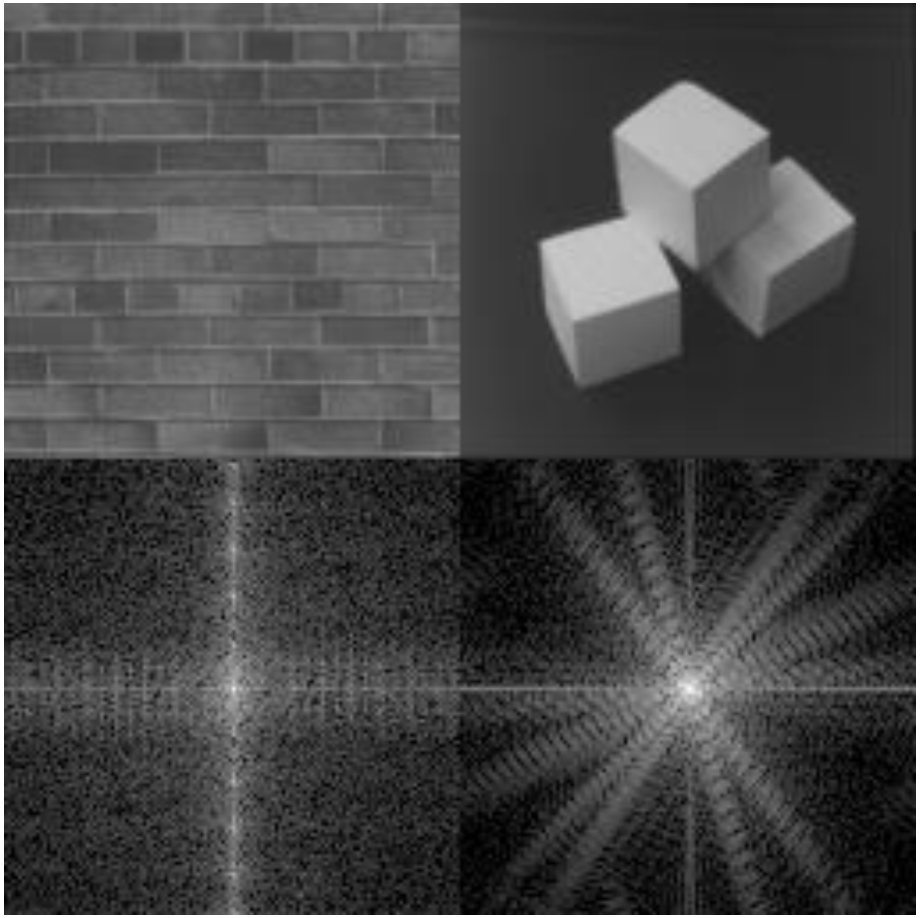
- "Artifacts" gerados por uma definição não suavizada do círculo.
- Podemos usar um corte mais suave

```
b = 1 ./ (1 + (z./15).^2)
```

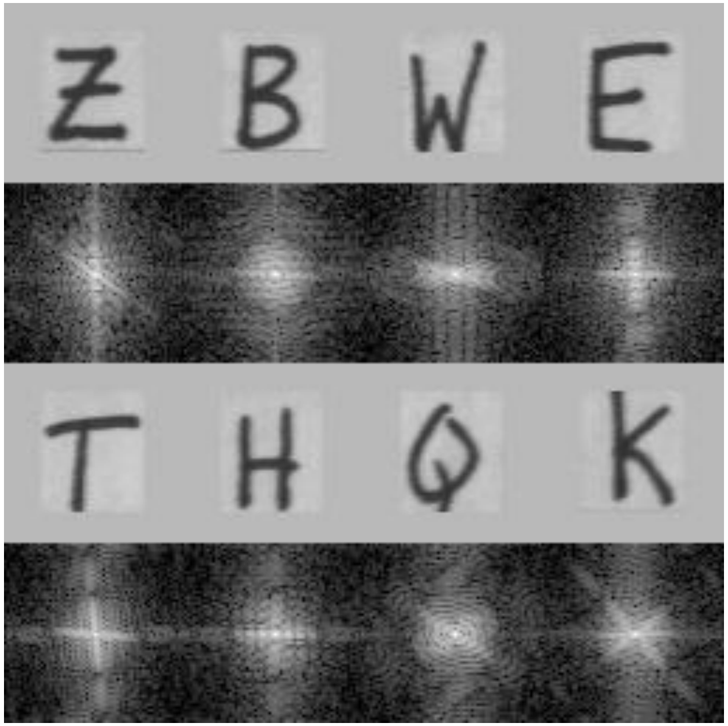
Transformadas de Imagens



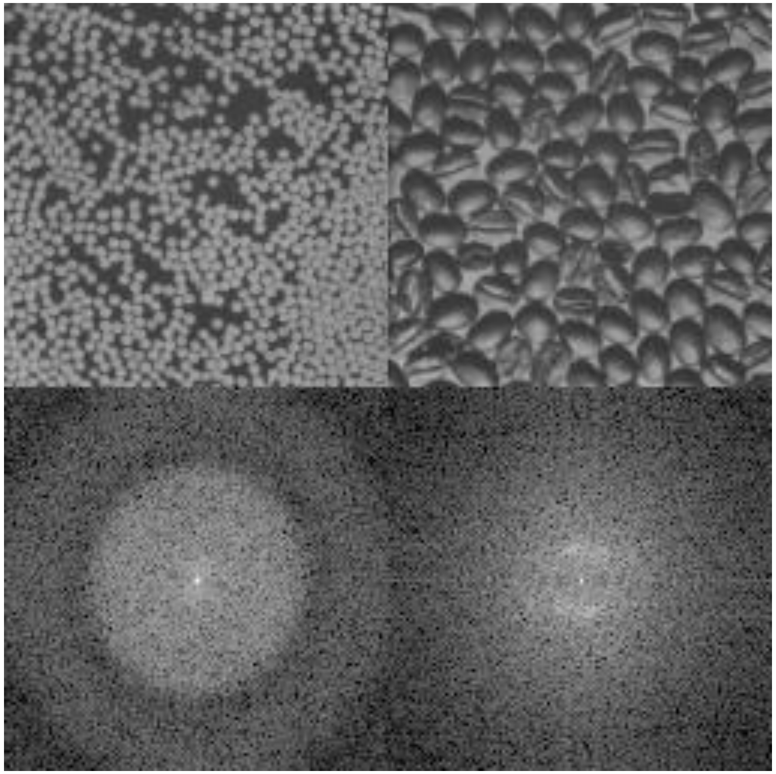
Transformadas de Imagens



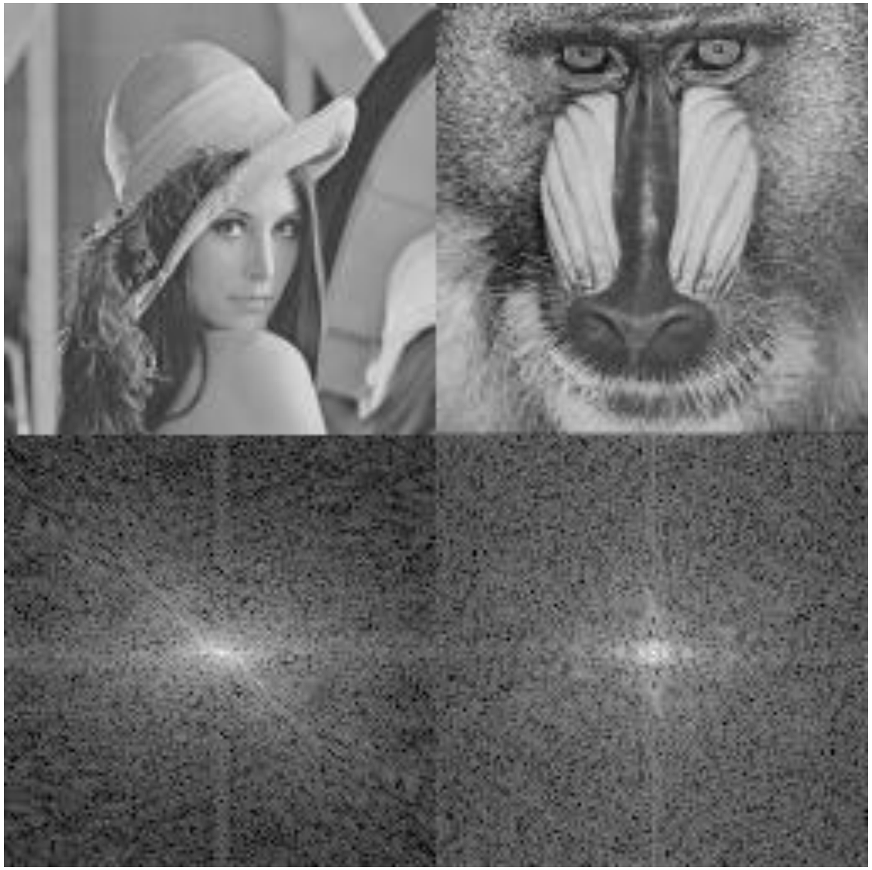
Transformadas de Imagens



Transformadas de Imagens

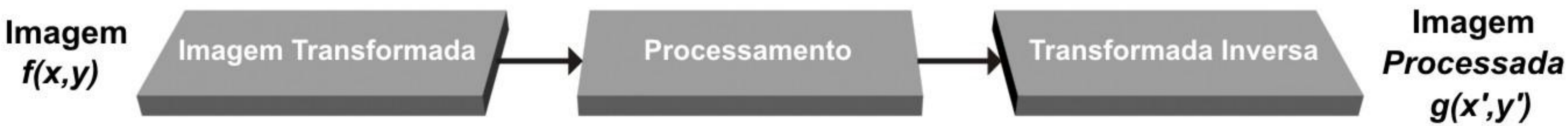


Transformadas de Imagens



Filtragem no DF

Como filtrar uma imagem no domínio da frequência?



Esquema geral de processamento no domínio da freqüência.

Filtragem no DF

SUAVIZAÇÃO DA IMAGEM USANDO FILTROS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

- Três tipos de filtros de suavização (low pass filter):
  - ideal,
  - Butterworth e
  - Gaussiano.

Filtragem no DF

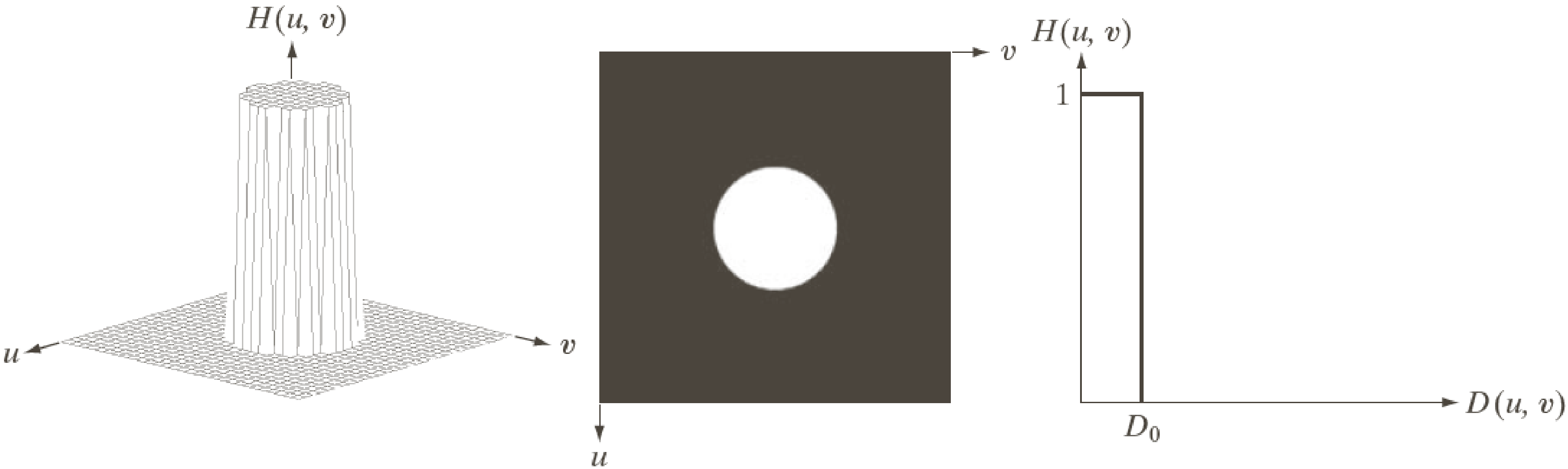
FILTROS DE PASSA BAIXA IDEAIS

- Um filtro 2-D que passa sem atenuação todas as frequências dentro de um círculo de raio D_0 da origem, e corta todas as frequências fora dessa circunferência é um filtro de passa baixa ideal (ILPF, *Ideal Low Pass Filter*).
- É especificado pela função $$H(u,v) = \begin{cases} 1 & se\ D(u,v) \le D_0 \\ 0 & se\ D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

  onde D_0 é uma constante positiva e $D(u,v)$ é a distância de um ponto (u,v) no domínio da frequência ao centro do retângulo de frequência; isto é

$$D(u,v) = \left[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2\right]^{1/2}$$

Filtragem no DF



a b c

FIGURE 4.40 (a) Perspective plot of an ideal lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.

Filtragem no DF

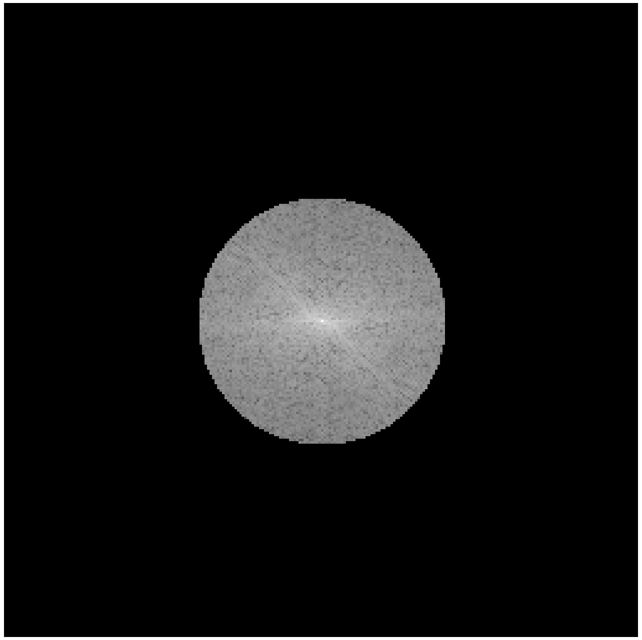
```
function nimg = passBaixa(img, raio)
[row, col] = size(img);
[x, y] = gridFourier(row, col);
z = sqrt(x.^2 + y.^2);
mask = (z < raio);
nimg = img .* mask;
```

Filtragem no DF

```
function [U, V] = gridFourier(M, N)
u = 0 : M-1;
v = 0 : N-1;

u = u - floor(M/2);
v = v - floor(N/2);
[U, V] = meshgrid(u, v);
```

Filtragem no DF



Filtragem no DF

BUTTERWORTH LOW PASS FILTERS

- A função de transformação de um filtro de passa baixa Butterworth (BLPF) de ordem *n*, e com frequência de corte a uma distância D_0 da origem, é definido por

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[D(u,v) / D_0 \right]^{2n}}$$

onde $D(u,v)$ é a distância euclidiana

Filtragem no DF

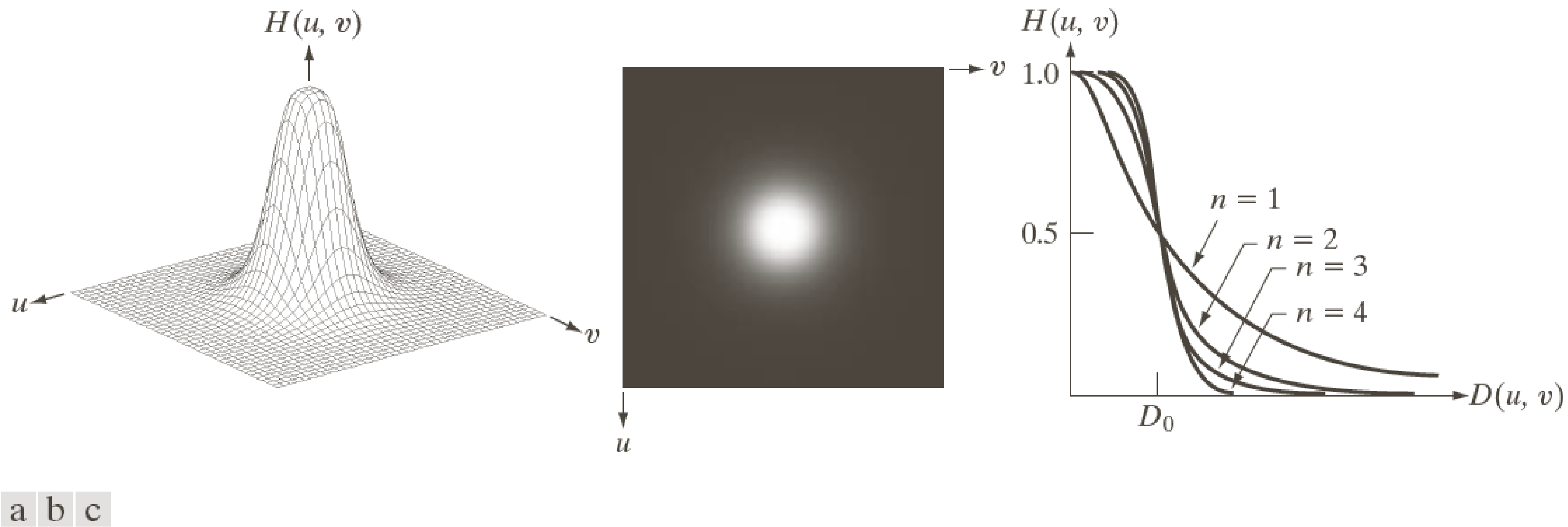
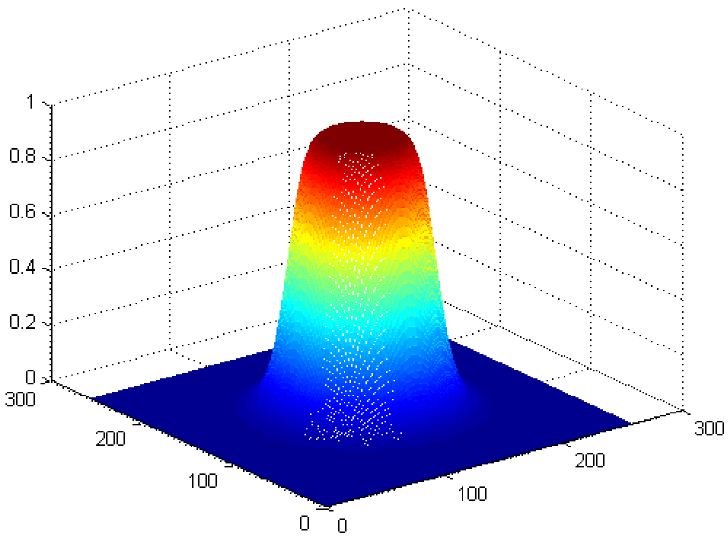
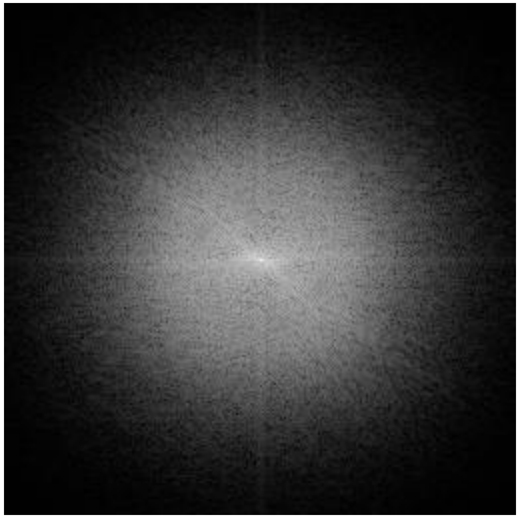


FIGURE 4.44 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

Filtragem no DF





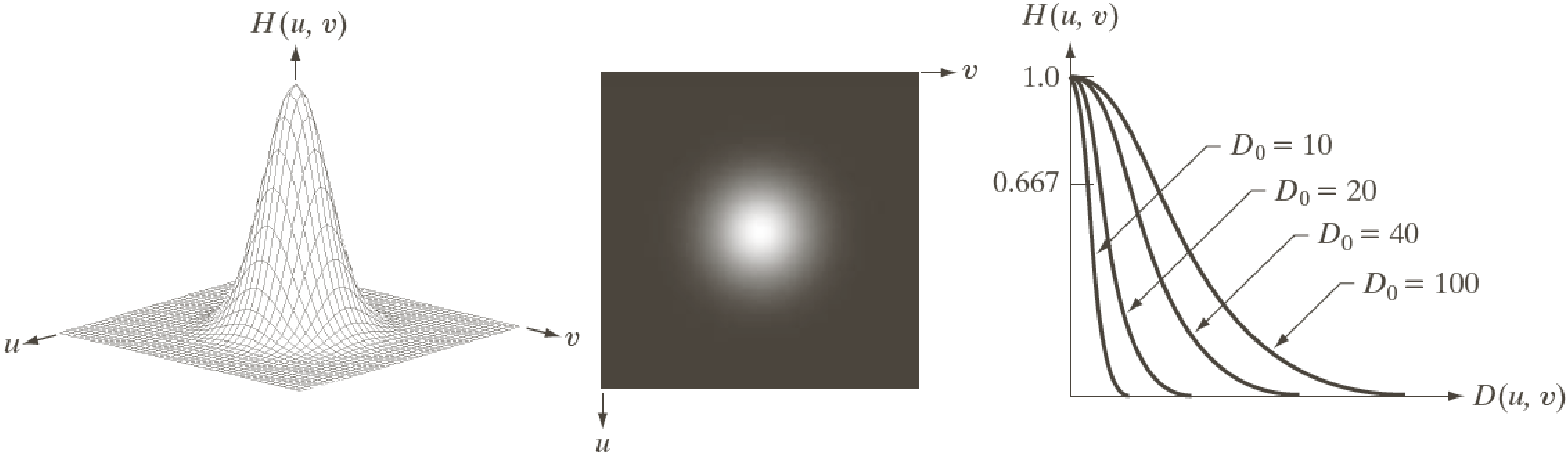
Filtragem no DF

FILTROS DE PASSA BAIXA GAUSSIANOS

- Os filtros de passa baixa Gaussianos (GLPF) são dados por $H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$

  onde *D(u,v)* é a distância
- Se fizermos $\sigma = D_0$, frequência de corte, a notação fica compatível com os outros filtros

Filtragem no DF



a b c

FIGURE 4.47 (a) Perspective plot of a GLPF transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections for various values of D_0.

Filtragem no DF

TABLE 4.4
Lowpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u,v) \le D_0 \\ 0 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$	$H(u,v) = \dfrac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$	$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

Filtragem no DF

SHARPENING DE IMAGENS USANDO FILTROS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

- Um filtro de passa alta que efetiva o efeito de *sharpening*, contrário à suavização, é obtido de um dado filtro de passa baixa pela equação

$$H_{HP}(u,v) = 1 - H_{LP}(u,v)$$

- Nessa seção serão considerados o filtro ideal, Butterworth e Gaussiano para filtragem passa alta.

Filtragem no DF

FILTROS IDEAIS DE PASSA ALTA (SHARPENING)

- Um filtro 2-D ideal de passa alta (IHPF, ideal highpass filter) é definido por

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 \;\; se \; D(u,v) \leq D_0 \\ 1 \;\; se \; D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

onde D_0 é a frequência de corte de D(u,v)

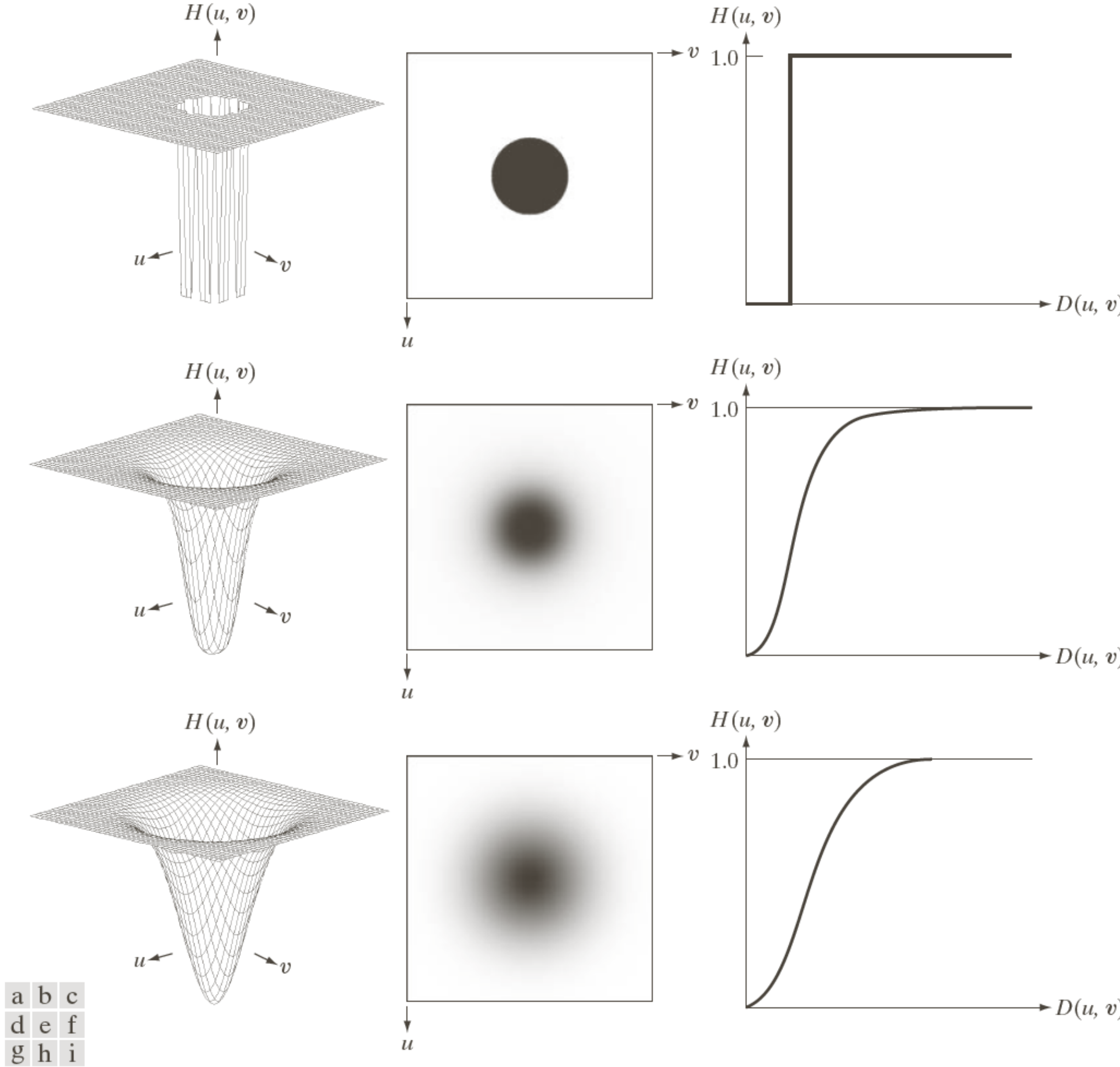


FIGURE 4.52 Top row: Perspective plot, image representation, and cross section of a typical ideal highpass filter. Middle and bottom rows: The same sequence for typical Butterworth and Gaussian highpass filters.

Filtragem no DF

FILTROS DE BUTTERWORTH DE PASSA ALTA

- A função de transformação de um filtro de passa alta Butterworth (BHPF) de ordem *n*, e com frequência de corte a uma distância D_0 da origem, é definido por

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[D_0 / D(u,v)\right]^{2n}}$$

onde *D(u,v)* é a distância euclidiana

Filtragem no DF

FILTROS GAUSSIANOS DE PASSA ALTA

- A função de transferência do filtro Gaussiano passa alta com frequência de corte e uma distância D_0 do centro do retângulo de frequência é dada por

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

onde *D(u,v)* é a distância euclidiana

Filtragem no DF

TABLE 4.5
Highpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u,v) \le D_0 \\ 0 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$	$H(u,v) = \dfrac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}}$	$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$