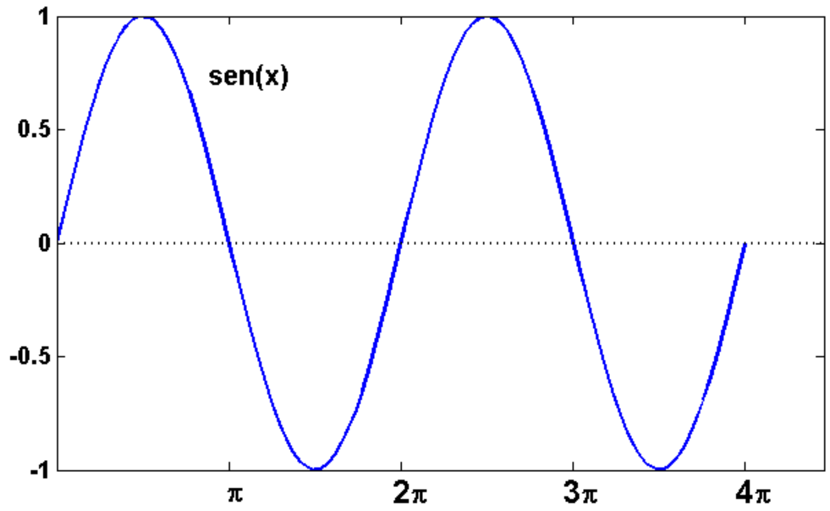
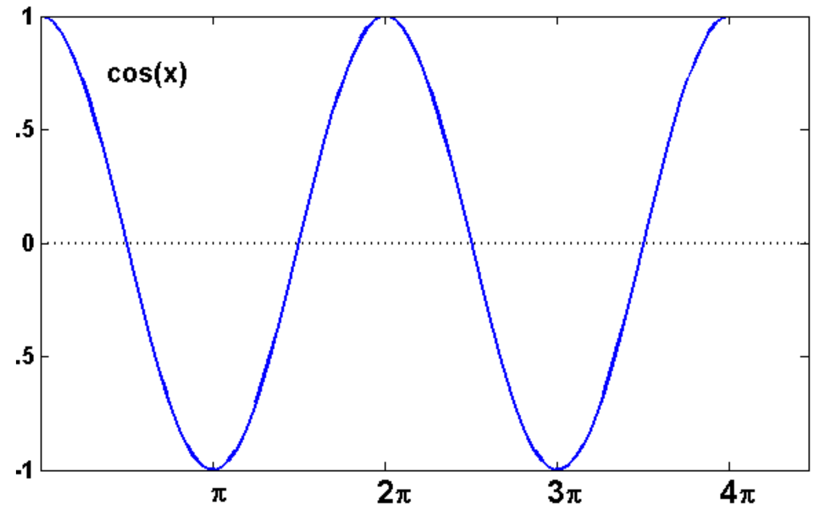
Series e Transformada de Fourier

Guillermo Cámara-Chávez

O que é uma série de Fourier

- Todos conhecemos as funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, etc.





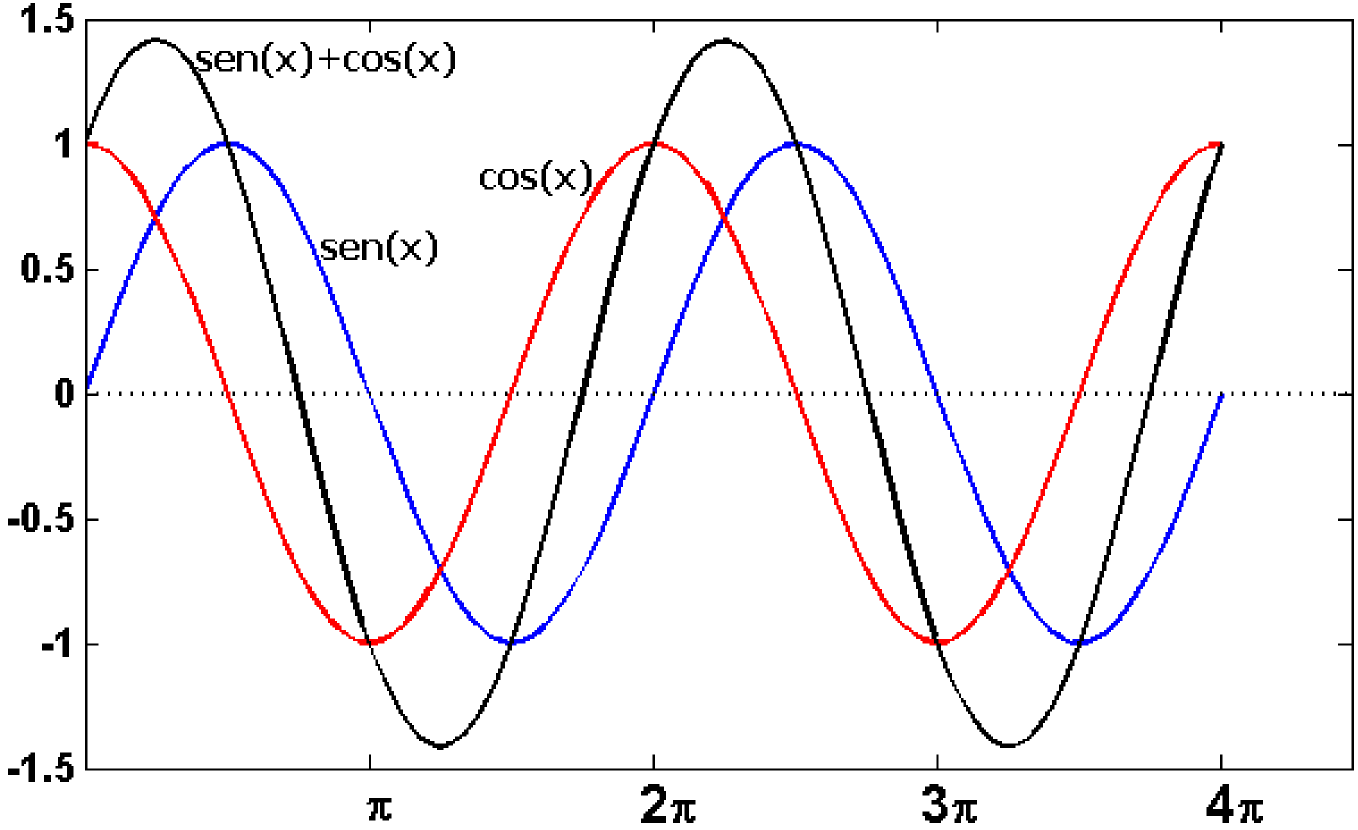
O que é uma série de Fourier

- Essa função é **periódica,** i.e., sua forma se repete a cada **período**.
- No caso da função seno se repete a cada período de 2π.
- O valor máximo da função, chamado de amplitude, é 1.

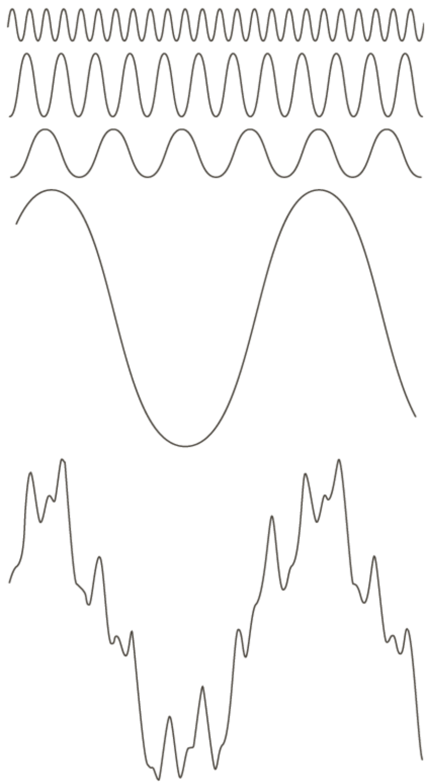
O que é uma série de Fourier

- A função cosseno também é periódica, com o mesmo período e amplitude que o seno, mas é deslocada em π/2.
- As funções seno e cosseno diferem na fase e a diferença de fase entre elas é de π/2

O que é uma série de Fourier



O que é uma série de Fourier



Essa função é a soma
das quatro funções acima.

FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

O que é uma série de Fourier

- Freqüência (f): é o **número de oscilações** que ocorrem na unidade de tempo

- Período (T): tempo necessário para que um ponto qualquer da onda percorra uma distância igual a um comprimento de onda

O que é uma série de Fourier

- **Jean Baptiste Joseph Fourier** descobriu, no início do século 19 que:
  - qualquer função, por mais complicada que seja, pode ser representada como a soma de várias funções seno e cosseno com **amplitudes, fases** e **períodos** escolhidos convenientemente

O que é uma série de Fourier

- Fourier apresentou um artigo em 1807 ao Instituto de França, onde afirma que qualquer sinal periódico pode ser representando como uma soma de ondas sinusoidais.
- Entre os revisores do artigo tinha dos matemáticos famosos: **Joseph Louis Lagrange** e **Pierre Simon de Laplace**

O que é uma série de Fourier

- Laplace e outros revisores votaram para publicar o artigo, mas Lagrange foi contra.
- Lagrange insistia que essa abordagem não pode ser utilizado para representar sinais com *quinas* (ondas quadradas)
- Somente baseado no parecer do Lagrangre, o Instituto de França rejeitou o artigo.
- O artigo foi publicado depois da morte do Lagrange

O que é uma série de Fourier

- Em resumo, qualquer função pode ser escrita na forma da soma de uma série de funções seno e cosseno

$$f(x) = a_0 + a_1 sen(x) + a_2 sen(2x) + a_3 sen(3x) + ... + b_1 \cos(x) + b_2 \cos(2x) + b_3 \cos(3x) + ...$$

- Basta calcular os coeficientes $a_0, a_1, a_2, ..., b_1, b_2$
- Esses coeficientes são as amplitudes de cada onda

O que é uma série de Fourier

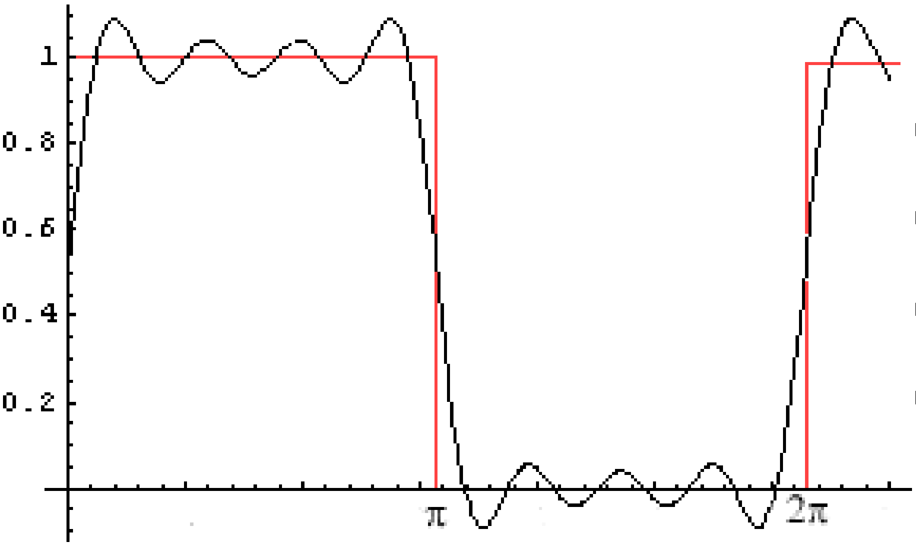
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T f(x)dx$$

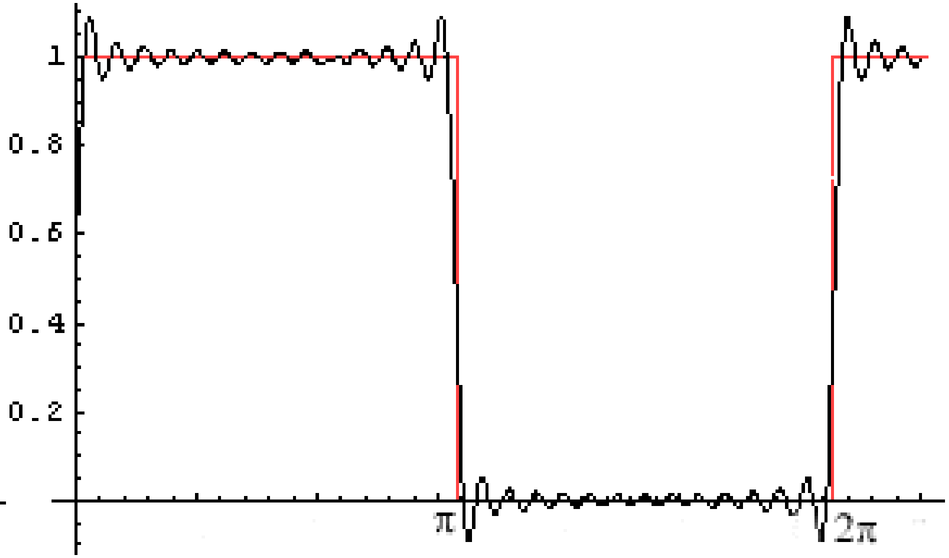
$$a_n = \frac{1}{T}\int_T f(x)\cos(n\pi x)dx, \ n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_T f(x)\sin(n\pi x)dx, \ n = 1,2,\ldots$$

Exemplo Prático

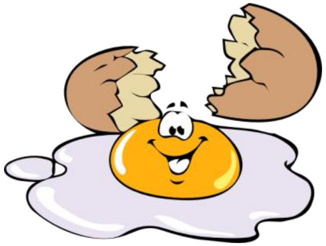


5 termos

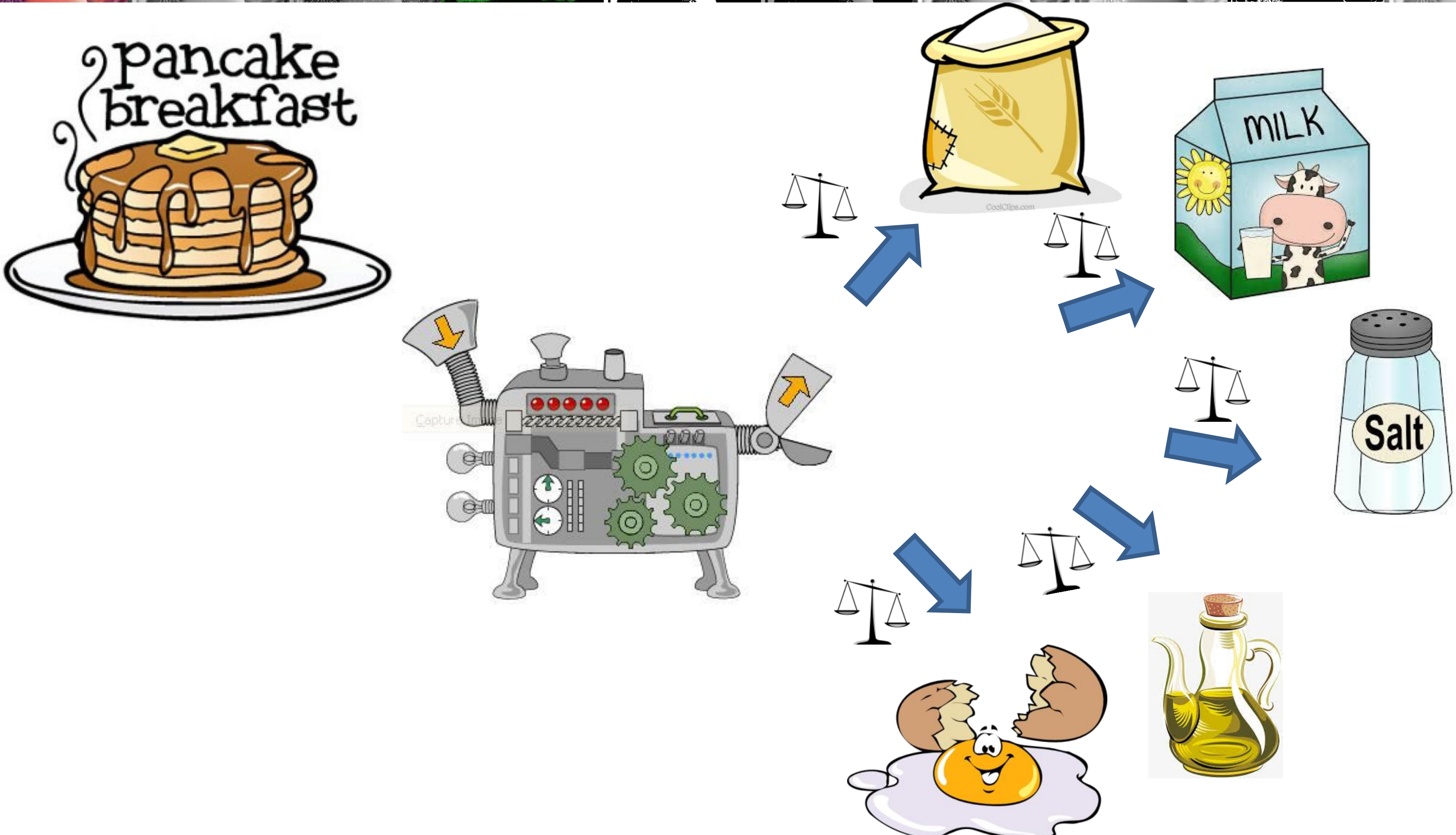


15 termos

Transformada de Fourier



Transformada de Fourier



Transformada de Fourier

TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA 2-D E INVERSA

- A transformada discreta de Fourier 2-D (DFT) é dada por

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

onde f(x,y) é uma imagem digital de tamanho *M* x *N*.

Fórmula de Euler $e^{j\theta}=\cos\theta+jsen\theta$

- Dada a transformada F(u,v), podemos obter f(x,y) usando a transformada inversa discreta de Fourier (IDFT):

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

Transformada de Fourier

Frequency recipe = Add up Contributions to this frequency, from each time spike

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i2\pi kn/N}$$

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{i2\pi kn/N}$$

Time point = Add up Contributions to this time point, from each frequency

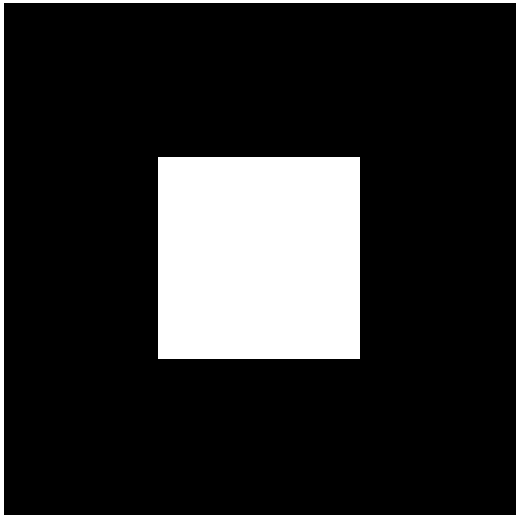
Transformada de Fourier

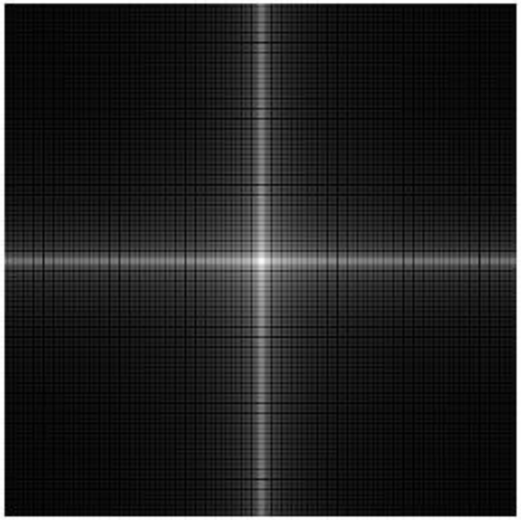
- Transformada de Fourier em Matlab
  - fft: calcula a DFT de um vetor
  - ifft: calcula a inversa da DFT de um vetor
  - fft2: DFT de uma matriz
  - ifft2: inversa da DFT de uma matriz
  - fftshift: desloca a DFT
- Para visualizar o espectro de Fourier usamos a função log

Transformada de Fourier

```
a=zeros(256,256);
a(78:178,78:178)=1;
imshow(a)
af=fftshift(fft2(a));
figure;
imshow(log(abs(af)+1),[]);
```

Transformada de Fourier





Espectro de Fourier e ângulo de fase

- A transformada de Fourier é representada pela magnitude e a fase.
- A magnitude diz “quanto” de uma certo componente de freqüência está presente
- A fase diz “onde” que o componente está presente
- Resulta difícil interpretar a imagem da fase

Transformada de Fourier 2D

- A transformada de Fourier de uma função real é conjugada simétrica

$$F^*(u,v) = F(-u, -v)$$

- portanto o espectro também tem simetria sobre a origem

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

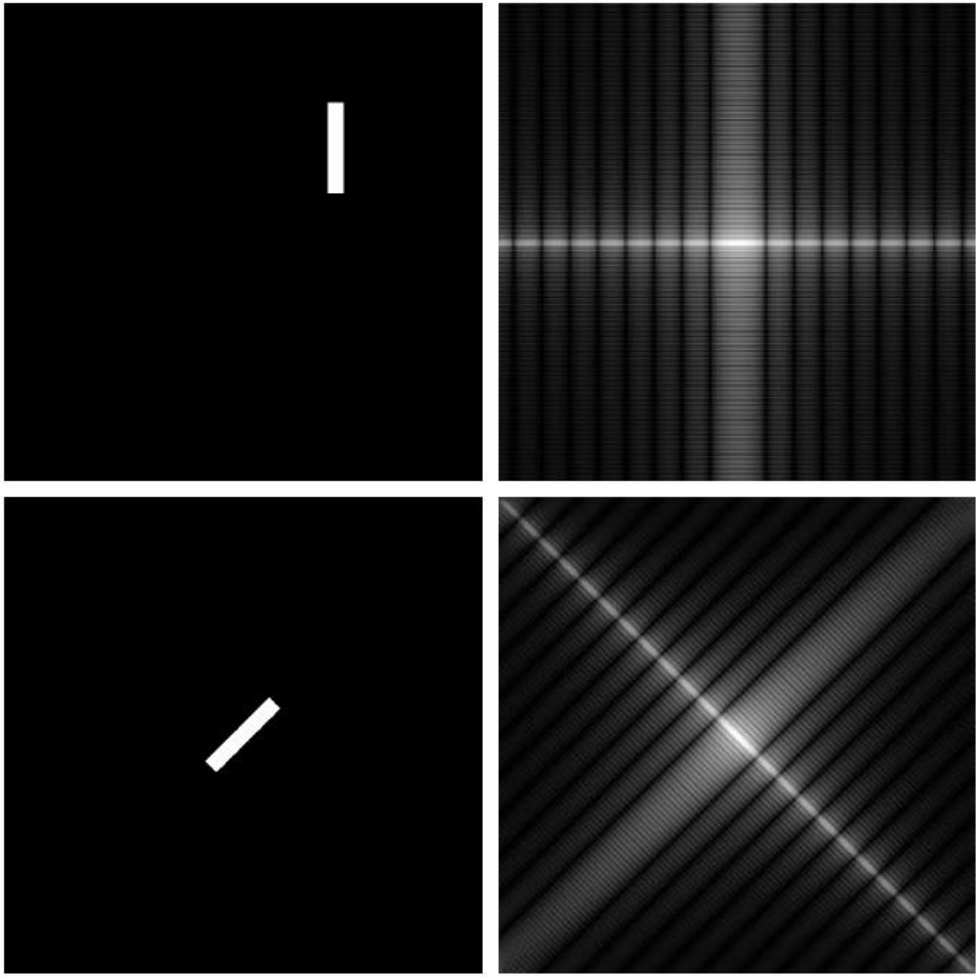
- O ângulo de fase exibe a seguinte simetria ímpar sobre a origem

$$F(u,v) = - F(-u,-v)$$

Para centrar o espectro, multiplicamos a imagem por $(-1)^{x+y}$

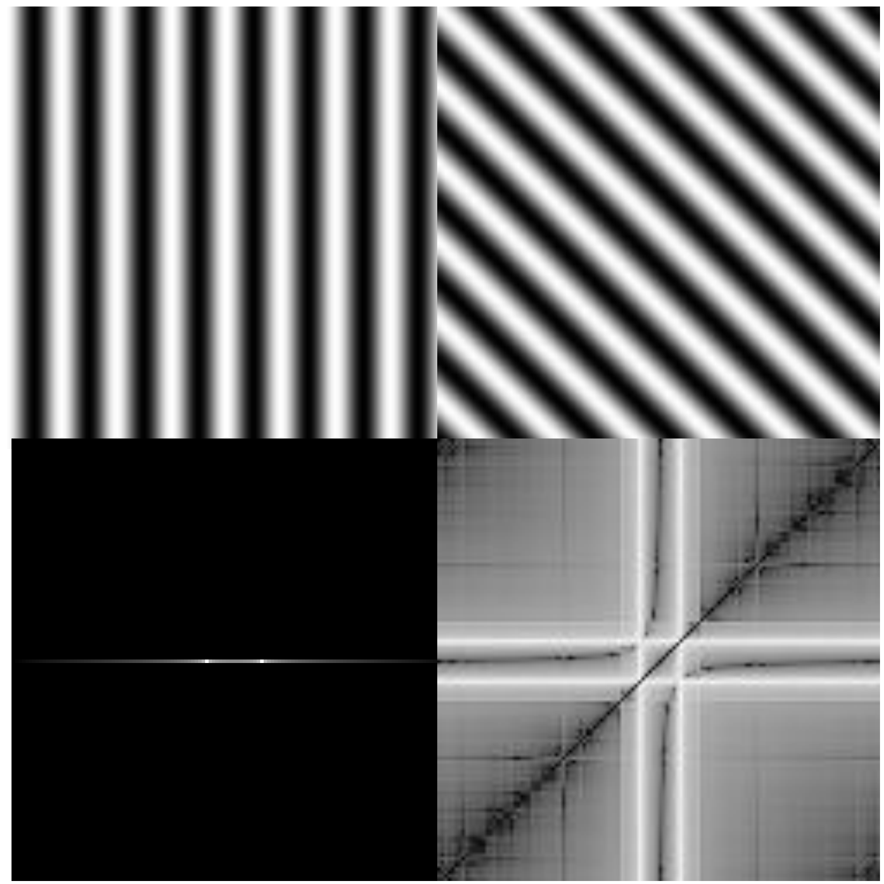
Rotação e efeitos das bordas

- A rotação de uma imagem resulta também na rotação da correspondente transformada de Fourier



Rotação e efeitos das bordas

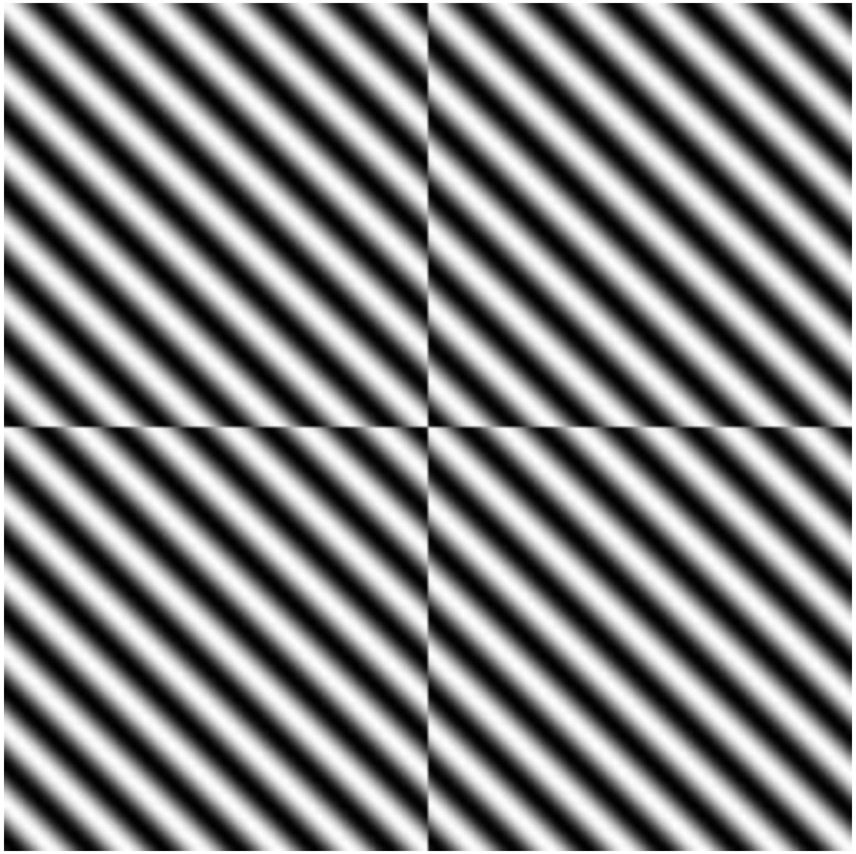
- O cosseno horizontal tem um FT normal e simples
- O cosseno rotacionado tem um FT complexo, com um componente diagonal forte e também um componente horizontal e vertical



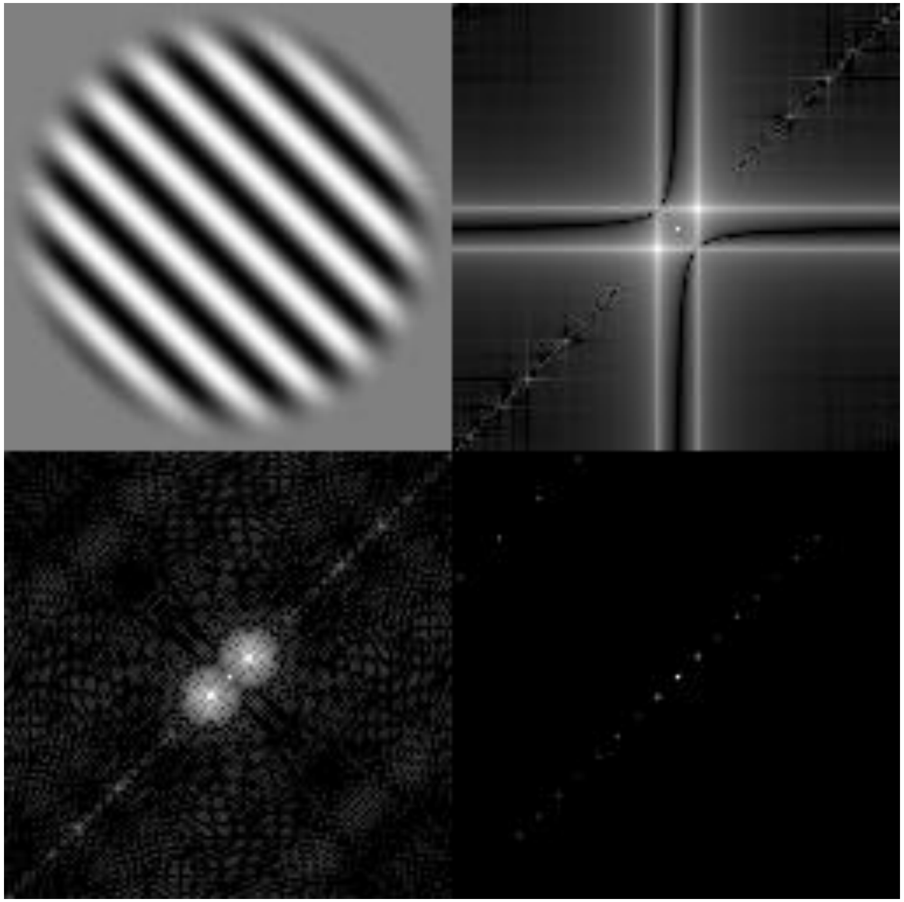
Rotação e efeitos das bordas

- De onde que vêm os componentes verticais e horizontais?
- A TF sempre trata a imagem como se fosse parte de um vetor replicado periodicamente de imagens idênticas estendendo-os vertical e horizontalmente ao infinito.

Rotação e efeitos das bordas



Rotação e efeitos das bordas

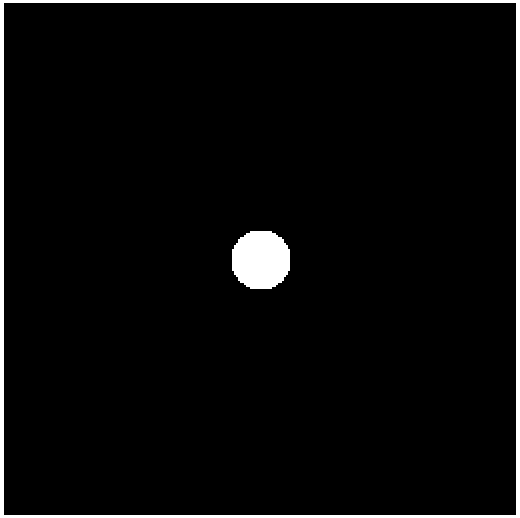


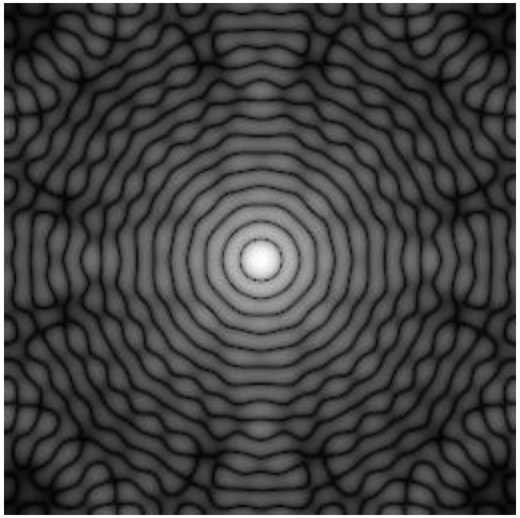
Rotação e efeitos das bordas

- Criando um pequeno círculo e calculando sua TF

```
[x, y] = meshgrid(-128:127, -128:127);
z = sqrt(x^2 + y^2);
c = (z < 15);
cf = fftshift(fft2(c));
imshow(log(abs(cf)+1), []);
```

Rotação e efeitos das bordas

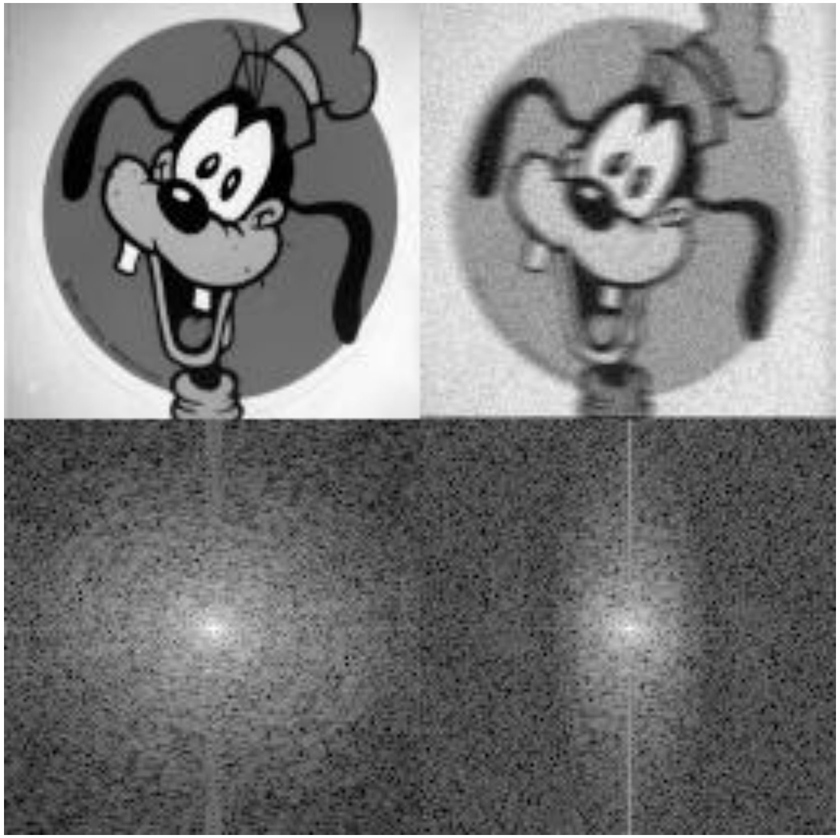




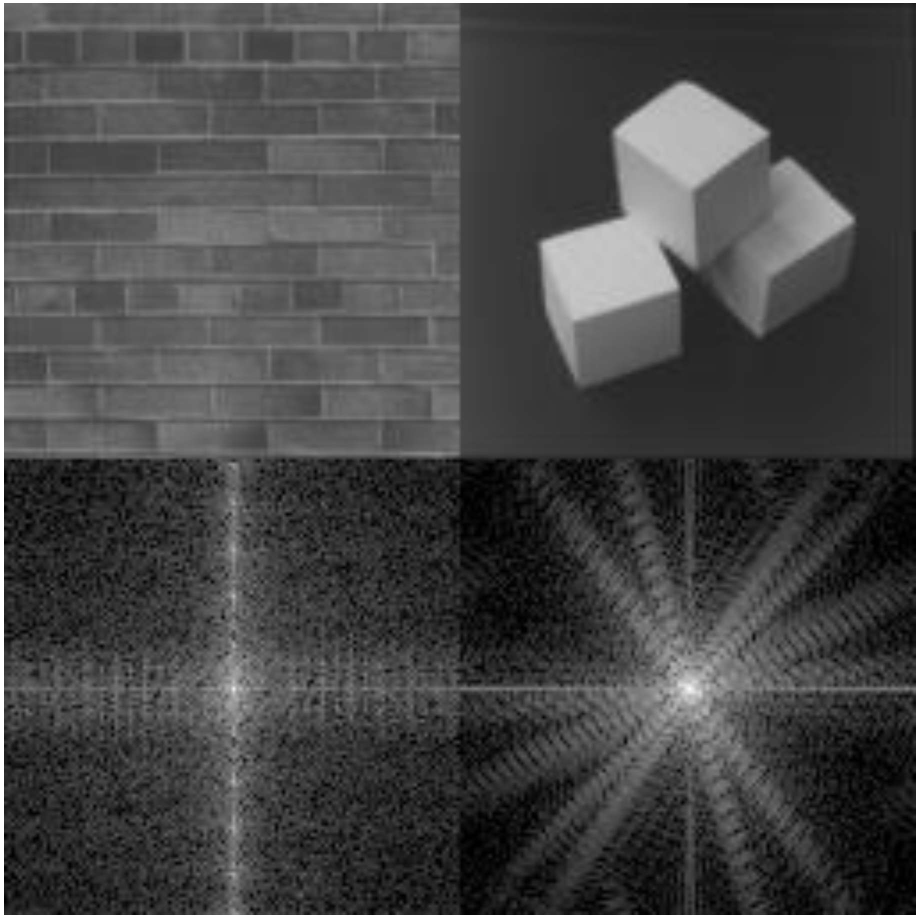
- "Artifacts" gerados por uma definição não suavizada do círculo.
- Podemos usar um corte mais suave

$$b = 1 ./ (1 + (z./15).^2)$$

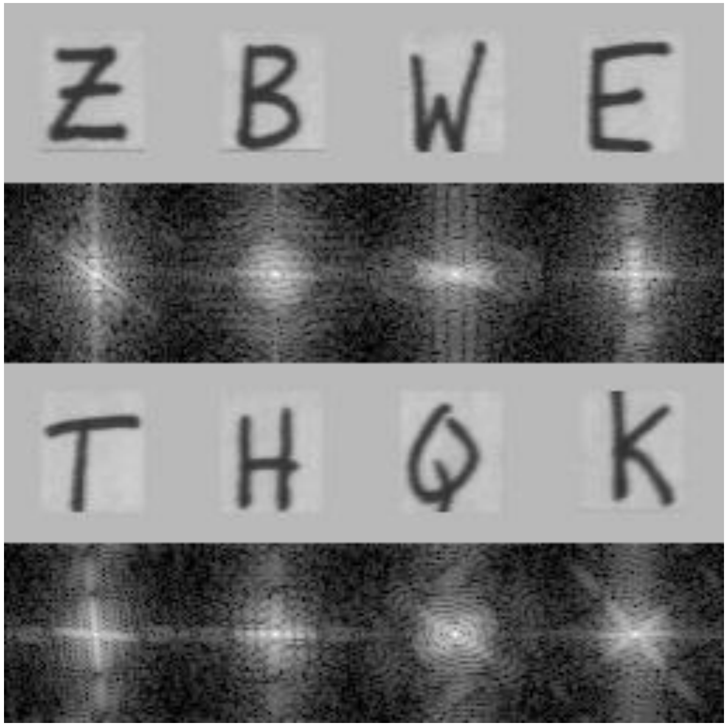
Transformadas de Imagens



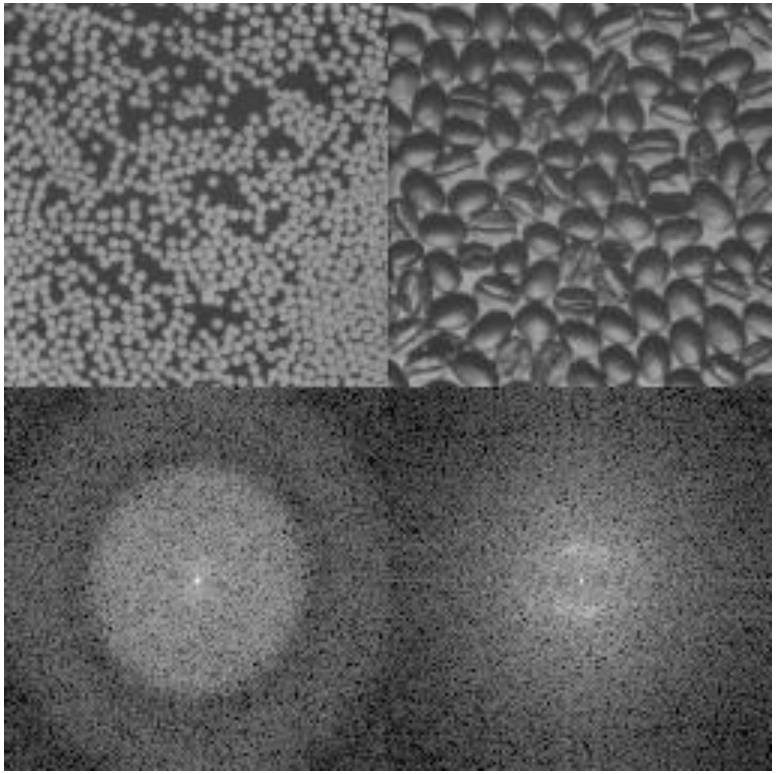
Transformadas de Imagens



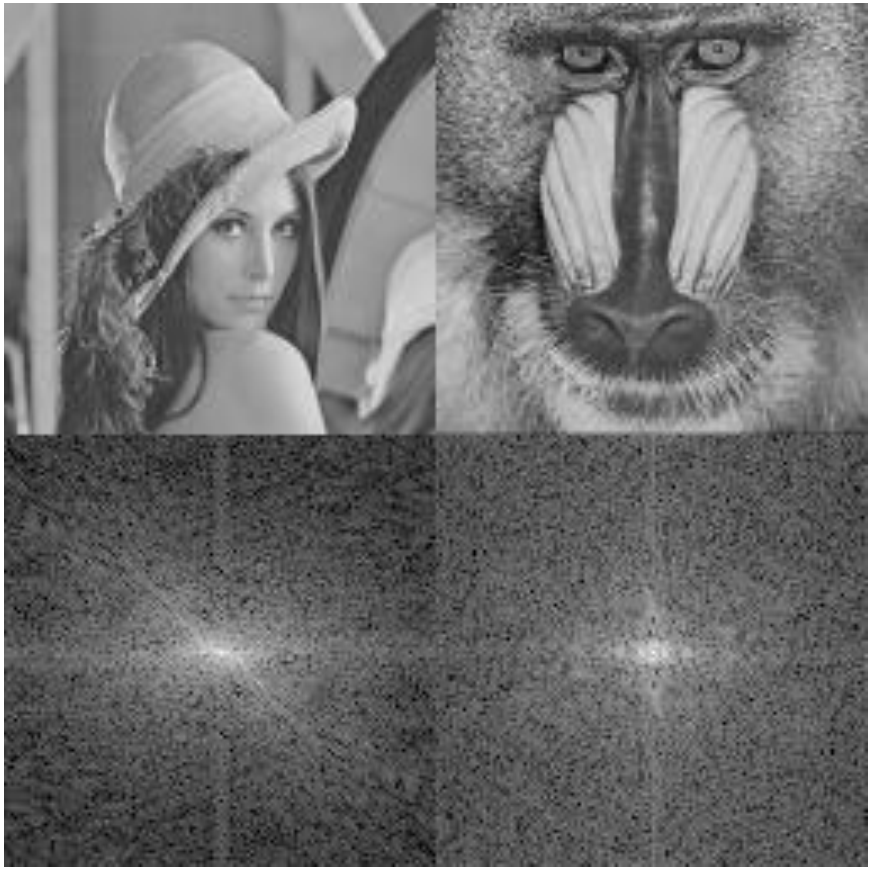
Transformadas de Imagens



Transformadas de Imagens



Transformadas de Imagens



Filtragem no DF

Como filtrar uma imagem no domínio da frequência?

Esquema geral de processamento no domínio da freqüência.

Filtragem no DF

SUAVIZAÇÃO DA IMAGEM USANDO FILTROS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

- Três tipos de filtros de suavização (low pass filter):
  - ideal,
  - Butterworth e
  - Gaussiano.

Filtragem no DF

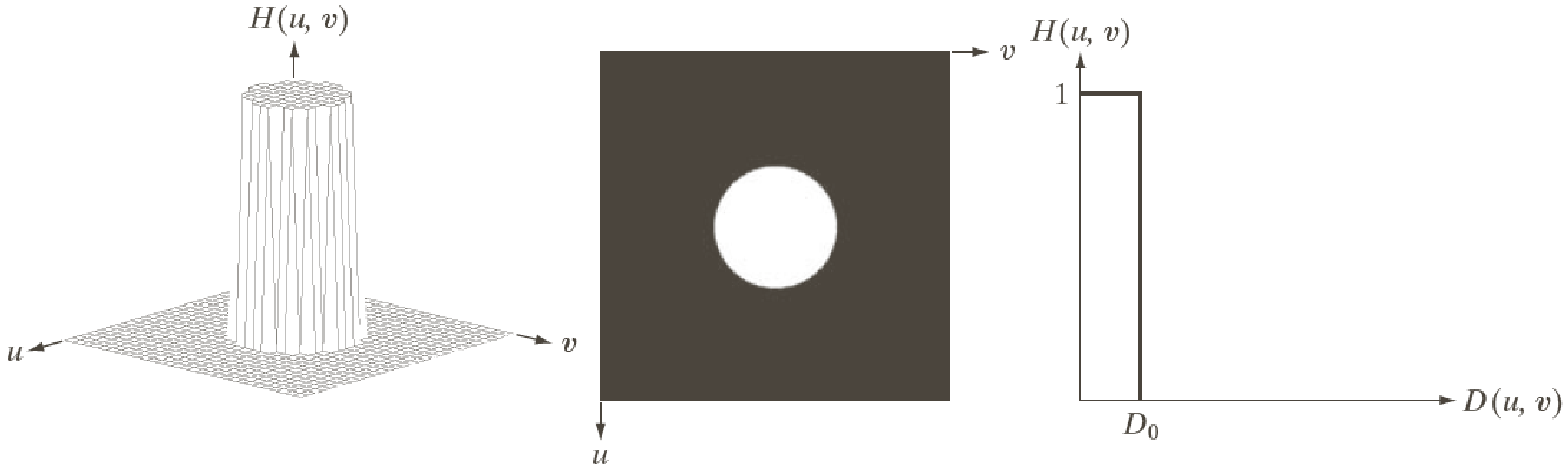
FILTROS DE PASSA BAIXA IDEAIS

- Um filtro 2-D que passa sem atenuação todas as frequências dentro de um círculo de raio D_0 da origem, e corta todas as frequências fora dessa circunferência é um filtro de passa baixa ideal (ILPF, *Ideal Low Pass Filter*).
- É especificado pela função $$H(u,v) = \begin{cases} 1 & se\ D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & se\ D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

  onde D_0 é uma constante positiva e $D(u,v)$ é a distância de um ponto (u,v) no domínio da frequência ao centro do retângulo de frequência; isto é

$$D(u,v) = \left[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2\right]^{1/2}$$

Filtragem no DF



a b c

FIGURE 4.40 (a) Perspective plot of an ideal lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.

Filtragem no DF

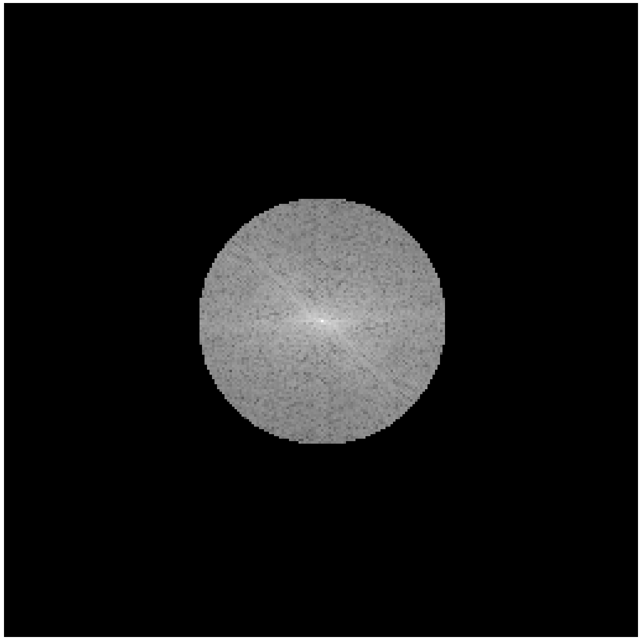
```
function nimg = passBaixa(img, raio)
[row, col] = size(img);
[x, y] = gridFourier(row, col);
z = sqrt(x.^2 + y.^2);
mask = (z < raio);
nimg = img .* mask;
```

Filtragem no DF

```
function [U, V] = gridFourier(M, N)
u = 0 : M-1;
v = 0 : N-1;

u = u - floor(M/2);
v = v - floor(N/2);
[U, V] = meshgrid(u, v);
```

Filtragem no DF



Filtragem no DF

BUTTERWORTH LOW PASS FILTERS

- A função de transformação de um filtro de passa baixa Butterworth (BLPF) de ordem *n*, e com frequência de corte a uma distância D_0 da origem, é definido por

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[D(u,v) / D_0 \right]^{2n}}$$

onde *D(u,v)* é a distância euclidiana

Filtragem no DF

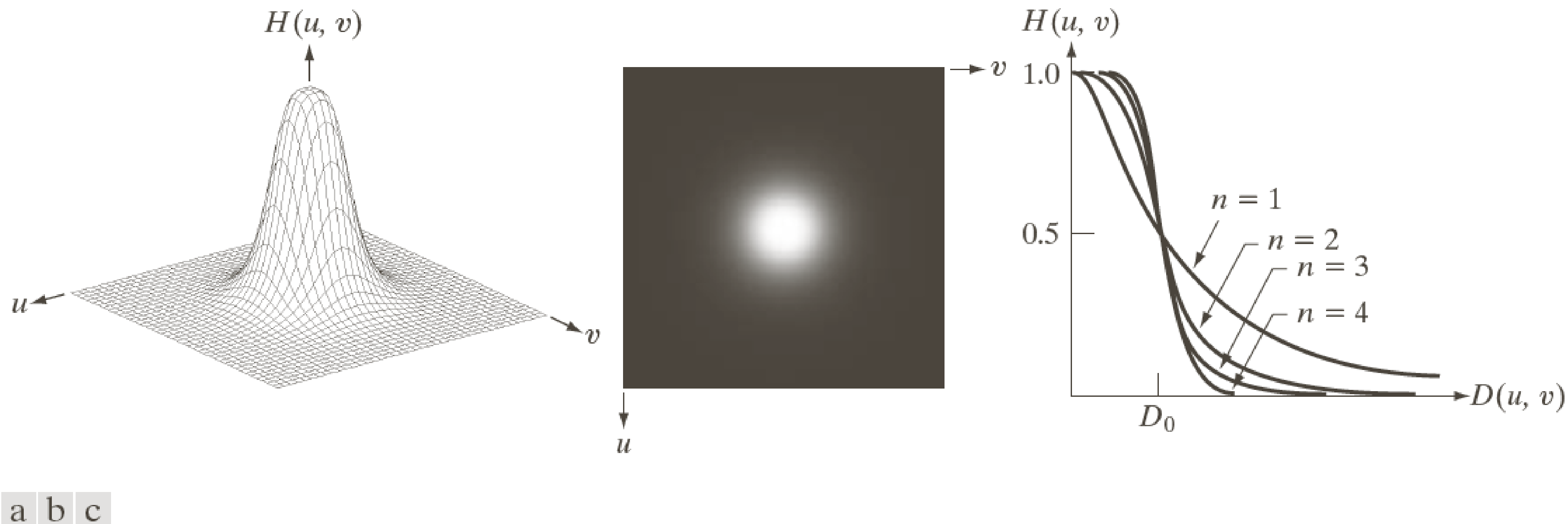
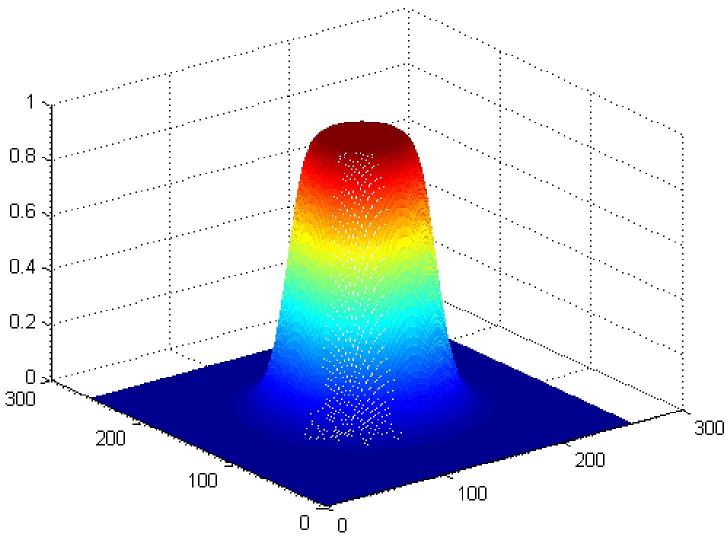
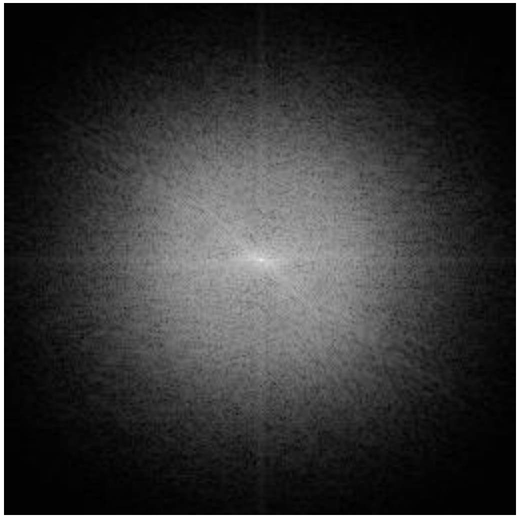


FIGURE 4.44 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

Filtragem no DF





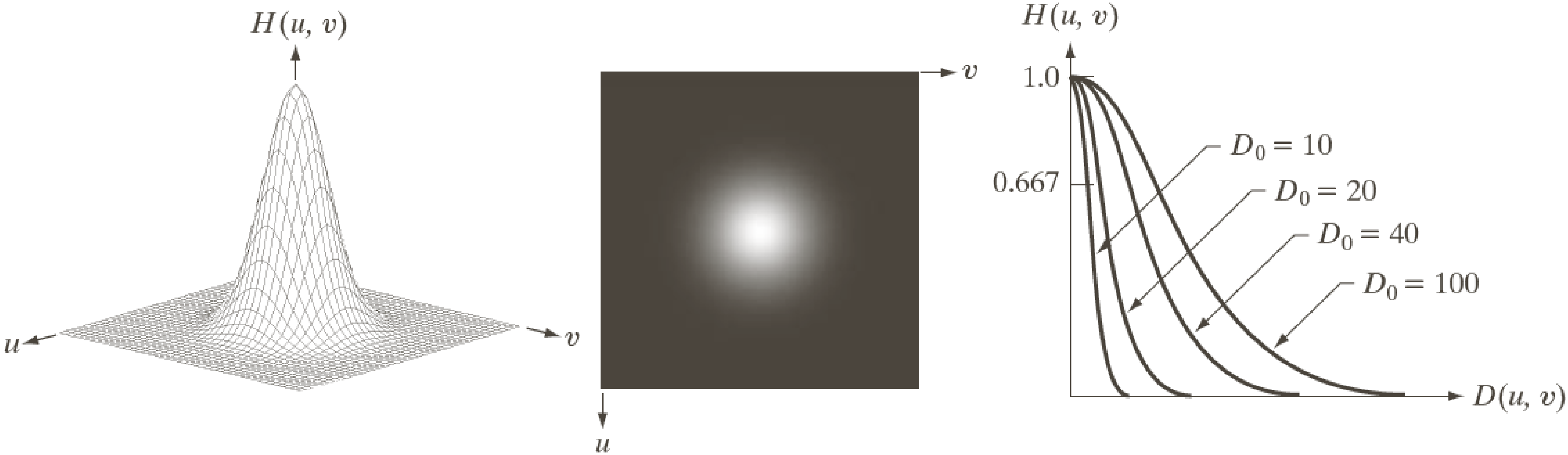
Filtragem no DF

FILTROS DE PASSA BAIXA GAUSSIANOS

- Os filtros de passa baixa Gaussianos (GLPF) são dados por $H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$

  onde *D(u,v)* é a distância
- Se fizermos $\sigma = D_0$, frequência de corte, a notação fica compatível com os outros filtros

Filtragem no DF



a b c

FIGURE 4.47 (a) Perspective plot of a GLPF transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections for various values of D_0.

Filtragem no DF

TABLE 4.4
Lowpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$	$H(u,v) = \dfrac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$	$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

Filtragem no DF

SHARPENING DE IMAGENS USANDO FILTROS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

- Um filtro de passa alta que efetiva o efeito de *sharpening*, contrário à suavização, é obtido de um dado filtro de passa baixa pela equação

$$H_{HP}(u,v) = 1 - H_{LP}(u,v)$$

- Nessa seção serão considerados o filtro ideal, Butterworth e Gaussiano para filtragem passa alta.

Filtragem no DF

FILTROS IDEAIS DE PASSA ALTA (SHARPENING)

- Um filtro 2-D ideal de passa alta (IHPF, ideal highpass filter) é definido por

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & se \ D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & se \ D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

onde D_0 é a frequência de corte de D(u,v)

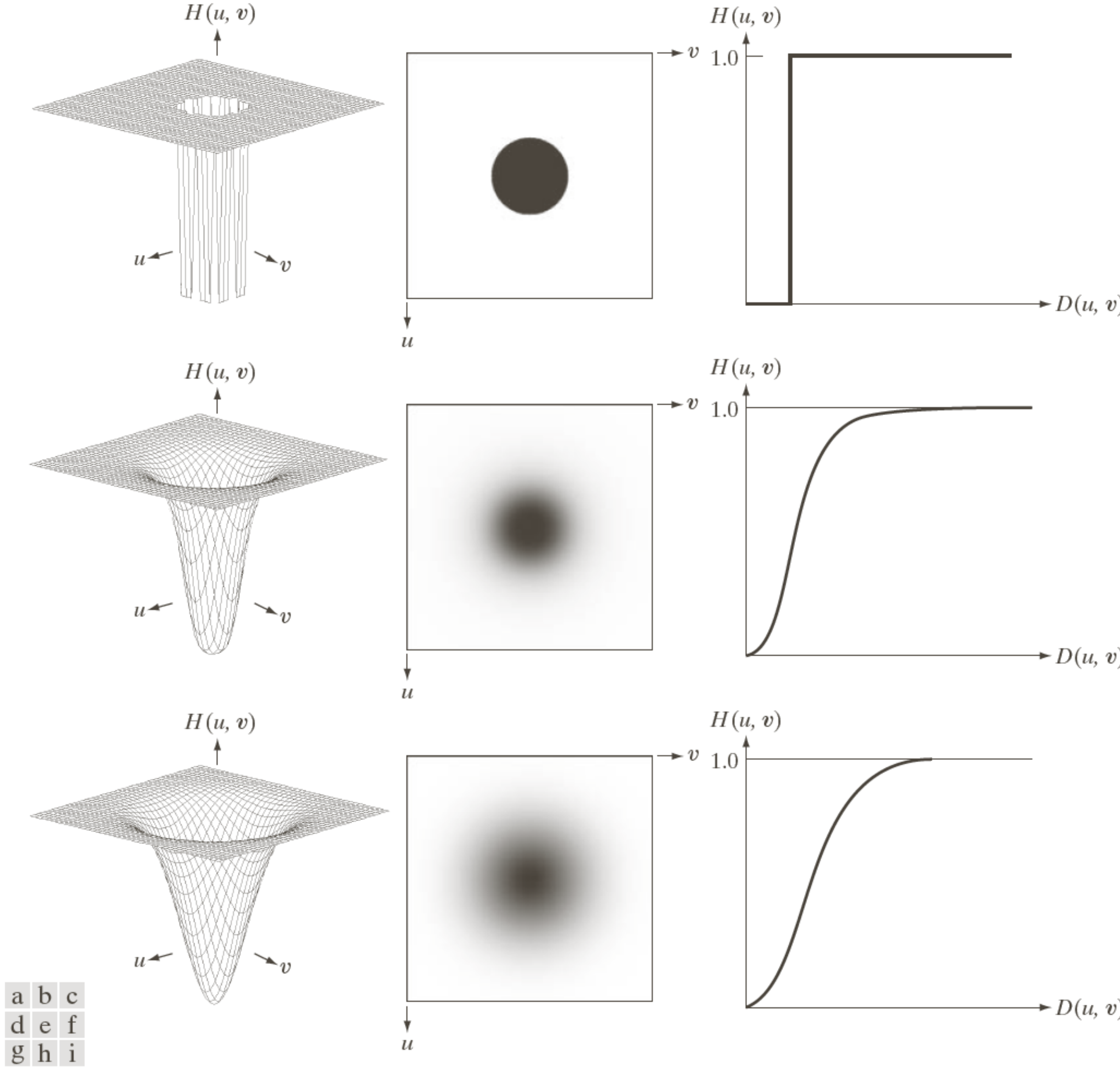


FIGURE 4.52 Top row: Perspective plot, image representation, and cross section of a typical ideal highpass filter. Middle and bottom rows: The same sequence for typical Butterworth and Gaussian highpass filters.

Filtragem no DF

FILTROS DE BUTTERWORTH DE PASSA ALTA

- A função de transformação de um filtro de passa alta Butterworth (BHPF) de ordem *n*, e com frequência de corte a uma distância D_0 da origem, é definido por

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[D_0 / D(u,v)\right]^{2n}}$$

onde $D(u,v)$ é a distância euclidiana

Filtragem no DF

FILTROS GAUSSIANOS DE PASSA ALTA

- A função de transferência do filtro Gaussiano passa alta com frequência de corte e uma distância D_0 do centro do retângulo de frequência é dada por

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

onde *D(u,v)* é a distância euclidiana

Filtragem no DF

TABLE 4.5
Highpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$	$H(u,v) = \dfrac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}}$	$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$