UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas

Departamento de Computação

José Álvaro Tadeu Ferreira

Cálculo Numérico – Notas de aulas

Resolução de Equações Não Lineares

Ouro Preto

2013

(Última revisão em novembro de 2013)

Resolução de Equações Não Lineares

Conteúdo

Resolução de equações não lineares

1 - Introdução

A necessidade de determinar valores $x = \xi$ que satisfaçam a uma equação da forma $f(x) = 0$ ocorre com bastante freqüência em uma grande variedade de problemas provenientes das Ciências e das Engenharias. Estes valores são chamados de raízes da equação $f(x) = 0$ ou os zeros da função $y = f(x)$. Geometricamente, conforme mostra a Figura 1.1, estes valores são os pontos de interseção de $y = f(x)$ com o eixo das abscissas.

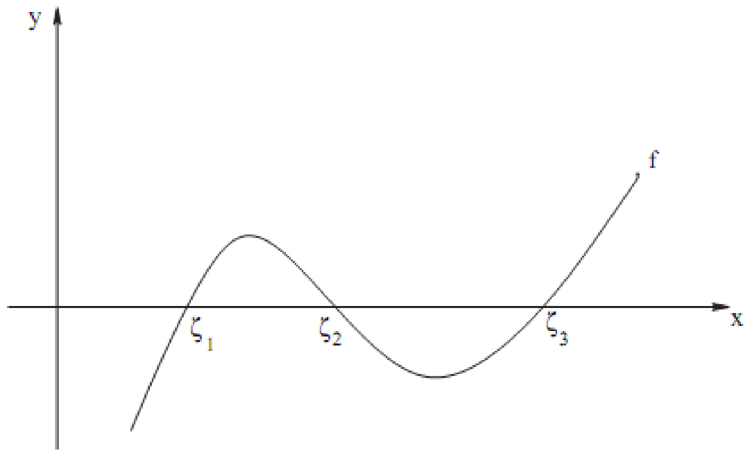


Figura 1.1: Raízes de uma equação ou zeros de uma função

Nestas notas de aulas, para efeito de padronização, será considerada a determinação das raízes de uma equação $f(x) = 0$.

Se $y = f(x)$ é um polinômio quadrático, cúbico ou biquadrado, então as raízes de $f(x) = 0$ podem ser determinadas por meio de processos algébricos. Contudo, para polinômios de grau superior, estes processos não existem, é necessário, então, utilizar métodos numéricos. Também se faz necessária a utilização de métodos numéricos quando $y = f(x)$ é uma função transcendente, para as quais não existe método geral para calcular as raízes de $f(x) = 0$. Por meio de métodos numéricos, obtêm-se soluções que são, normalmente, aproximadas. Faz-se necessário, então definir o que é uma solução aproximada.

1.1 - Raiz aproximada

Sendo ε uma precisão, diz-se que um ponto x_k é uma aproximação para uma raiz ξ, de uma equação $f(x) = 0$, se satisfizer as condições:

(i) $|f(x_k)| < \varepsilon$

(ii) $|x_k - \xi| < \varepsilon$

Conforme mostrado nas figuras 1.2.a e 1.2.b, estas duas condições não são equivalentes.

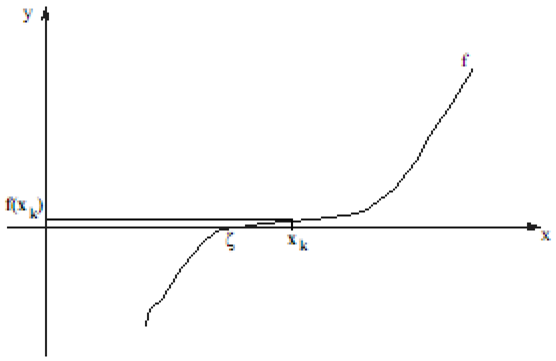


Figura 1.2.a

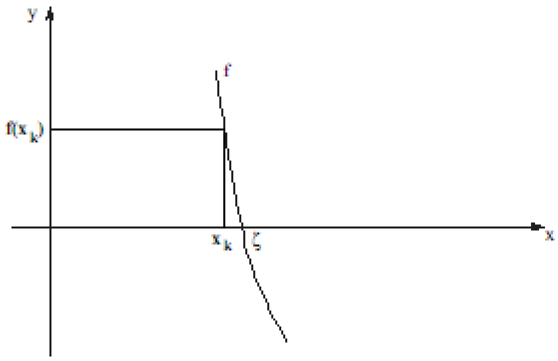


Figura 1.2.b

A figura 1.2.a apresenta a situação em que a condição (i) é satisfeita e a (ii) não. Na figura 2.1.b é mostrado o caso contrário.

1.2 - Raiz múltipla

Uma raiz, ξ, de uma equação $f(x) = 0$, tem multiplicidade m se:

$$f(\xi) = f\,'(\xi) = f\,''(\xi) = ... = f^{\,m-1}(\xi) = 0 \text{ e } f^{\,m}(\xi) \neq 0$$

Onde $f^{\,j}(\xi)$, $j = 1, 2, ..., m$; é a derivada de ordem j da função $y = f(x)$ calculada no ponto ξ.

Exemplo – 1.1

Sabendo-se que $\xi = 2$ é uma raiz da equação $f(x) = x^4 – 5.x^3 + 6.x^2 + 4.x – 8 = 0$, determinar a sua multiplicidade.

Solução

$f(2) = 0$

$f\,'(x) = 4.x^3 - 15.x^2 + 12.x + 4 \Rightarrow f\,'(2) = 0$

$f\,''(x) = 12.x^2 - 30.x + 12 \Rightarrow f\,''(2) = 0$

$f\,'''(x) = 24.x - 30 \Rightarrow f\,'''(2) \neq 0$

Portanto, $\xi = 2$ é uma raiz com multiplicidade 3. A figura 1.3 ilustra o comportamento da função polinomial no intervalo [-1,5; 3].

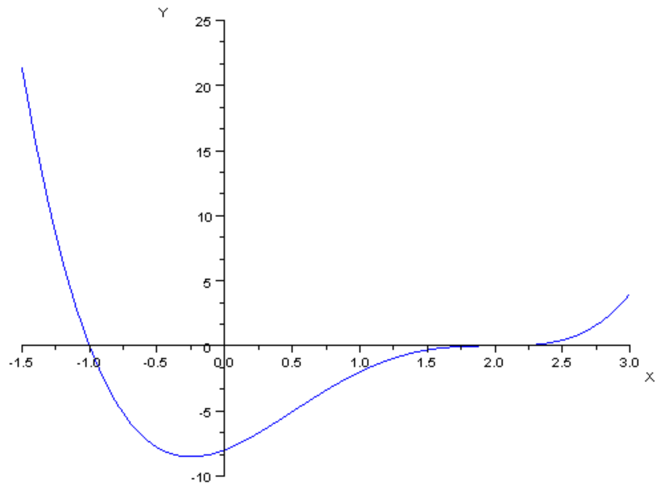


Figura 1.3: a função $f(x) = x^4 - 5.x^3 + 6.x^2 + 4.x - 8$

Exemplo – 1.2

Verificar qual é a multiplicidade da raiz $\xi = 0$ da equação

$$f(x) = sen^2(x) - x.sen(x) + 0{,}25.x^2 = 0$$

Solução

$f'(x) = 2.sen(x).cos(x) - sen(x) - x.cos(x) + 0{,}5.x \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -2.sen^2(x) + x.sen(x) + 2.cos^2(x) - 2.cos(x) + 0{,}5 \Rightarrow f''(0) = 0{,}5$

Portanto, $\xi = 0$ é uma raiz com multiplicidade 2. A figura 1.4 mostra o comportamento da função no intervalo [-4, 4].

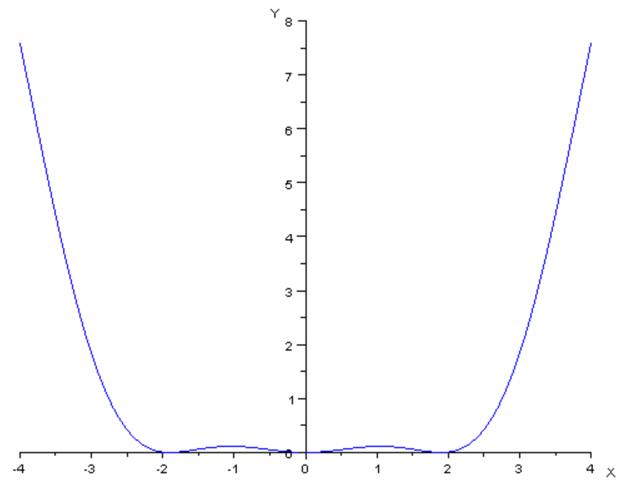


Figura 1.4: a função $f(x) = sen^2(x) - x.sen(x) + 0{,}25.x^2$

Observe-se que a equação possui outras duas raízes múltiplas cujos valores aproximados são 1,8954943 e -1,8954943.

2 - Fases na determinação de raízes

A determinação das raízes de uma equação envolve duas fases.

Fase I – Isolamento das raízes

O objetivo é determinar intervalos que contenham, cada um, uma única raiz.

Fase II - Refinamento

Trata-se da utilização de métodos numéricos, com precisão pré-fixada, para calcular cada uma das raízes.

2.1 – Fase I: Isolamento das raízes

Teorema 2.1 (Cauchy-Bolzano)

Seja y = f(x) uma função contínua em um intervalo [a, b].

(i) Se f(a) × f(b) < 0, então a equação f(x) = 0 tem um número ímpar de raízes no intervalo (a, b). Se f '(x) preservar o sinal em (a, b) então, neste intervalo, há uma única raiz.

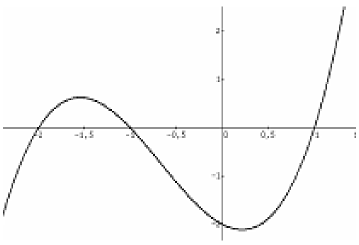


Figura 2.1.a: Número ímpar de raízes

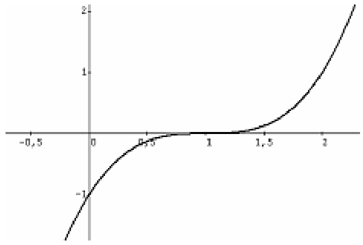


Figura 2.1.b: Raiz com multiplicidade ímpar

(ii) Se f(a) × f(b) > 0 então a equação f(x) = 0 tem um número par de raízes, ou nenhuma raiz, no intervalo (a, b).

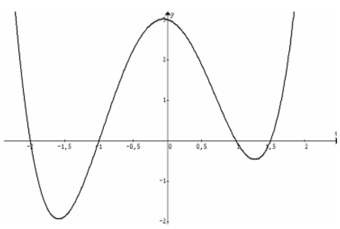


Figura 2.2.a: Número par de raízes

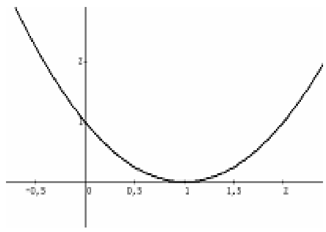


Figura 2.2.b: Raiz com multiplicidade par

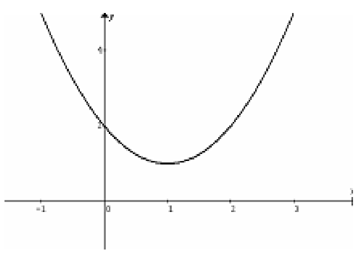


Figura 2.2.c: Não há raiz no intervalo

Com base neste resultado, pode-se concluir que uma forma de isolar as raízes é a utilização de uma tabela de pontos $[x_i, f(x_i)]$, i = 1, 2, ..., n.

Exemplo – 2.1

Isolar as raízes positivas da equação

$$f(x) = x^5 – 6.x^4 – 14.x^3 + 72.x^2 + 44.x - 180 = 0.$$

Sabendo-se que elas são em número de três e estão situadas no intervalo (0, 7)

Solução

Inicialmente, estabelece-se um passo h = 1 e gera-se uma tabela de pontos.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	-180	- 83	20	- 21	- 260	- 535	- 348	1255

Tendo em vista que f(1) × f(2) < 0, f(2) × f(3) < 0 e f(6) × f(7) < 0 e considerando o Teorema 2.1, conclui-se que a equação dada tem uma raiz em cada um dos intervalos: (1, 2), (2, 3) e (6, 7).

Outra maneira de isolar as raízes de uma equação f(x) = 0 é fazer uma análise teórica e gráfica da função que dá origem a ela. Para a análise gráfica pode ser utilizado um dos procedimentos a seguir.

<u>Procedimento I:</u>

Esboçar o gráfico de y = f(x), com o objetivo de detectar intervalos que contenham, cada um, uma única raiz.

Exemplo – 2.2

Seja a equação $f(x) = x^3 – 9.x + 3 = 0$. Conforme mostra a figura 2.3, ela tem três raízes isoladas nos intervalos (-4, -3); (0, 1) e (2,3).

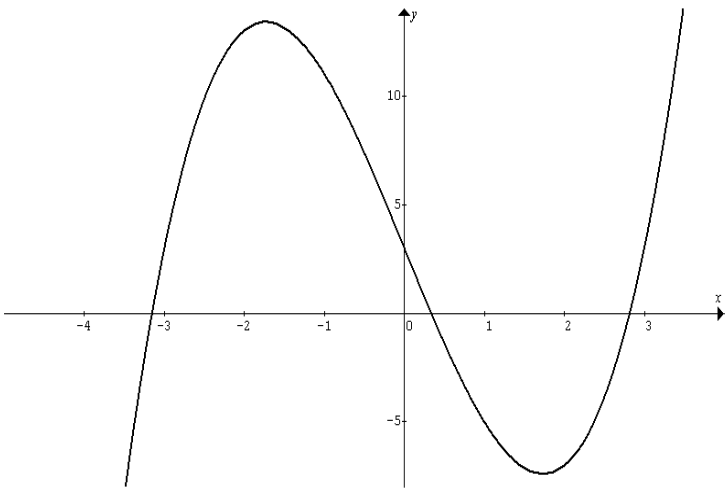


Figura 2.3: Isolamento das raízes da equação $f(x) = x^3 – 9.x + 3 = 0$

<u>Procedimento II:</u>

(i) Transformar a equação f(x) = 0, na forma equivalente f(x) = g(x) – h(x) = 0, o que leva a g(x) = h(x). O objetivo é obter duas funções, y = g(x) e y = h(x), que sejam conhecidas e mais simples do que y = f(x).

(ii) Construir os gráficos das duas funções em um mesmo sistema de eixos cartesianos.

(iii) Detectar intervalos que contenham, cada um, uma abscissa de ponto de interseção entre y = g(x) e y = h(x). Estas abscissas são raízes de f(x) = 0.

Com efeito, sejam x_i os pontos de interseção dos gráficos de y = g(x) e y = h(x). Logo:

$g(x_i) = h(x_i) \Rightarrow g(x_i) - h(x_i) = 0$

Como $f(x) = (g - h)(x) = g(x) - h(x)\ \forall\ x$ então:

$g(x_i) - h(x_i) = f(x_i)$

Sendo $g(x_i) - h(x_i) = 0$ resulta que $f(x_i) = 0$, isto é, os valores x_i são as raízes de f(x) = 0.

Exemplo – 2.3

Seja a equação $f(x) = e^x + x^2 - 2 = 0$.

Solução

$f(x) = 0 \Rightarrow e^x + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2 - x^2$

Assim tem-se que $g(x) = e^x$ e $h(x) = 2 - x^2$

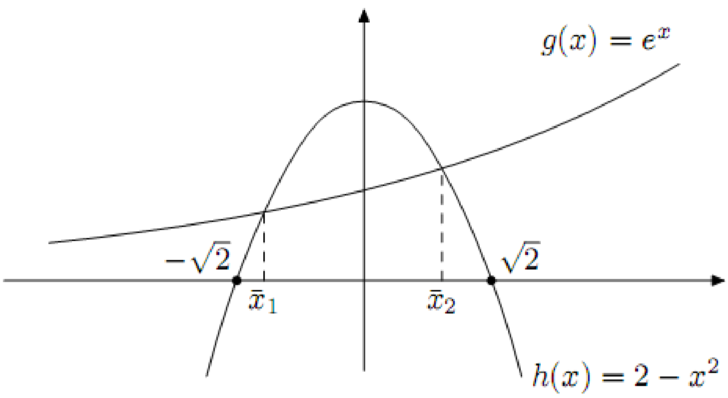


Figura 2.4: Isolamento das raízes da equação $f(x) = e^x + x^2 - 2 = 0$

Logo, conclui-se que a equação possui uma raiz em cada um dos intervalos:

$$(-\sqrt{2}, 0) \text{ e } (0, \sqrt{2})$$

É interessante considerar o fato de que existem equações transcendentes que não possuem um número finito de raízes. Esta situação é ilustrada no exemplo 2.4.

Exemplo – 2.4

Seja a equação $f(x) = x.tg(x) - 1 = 0$

Solução

$f(x) = 0 \Rightarrow x.tg(x) - 1 = 0 \Rightarrow tg(x) = 1/x$

Assim, tem-se que $g(x) = tg(x)$ e $h(x) = 1/x$

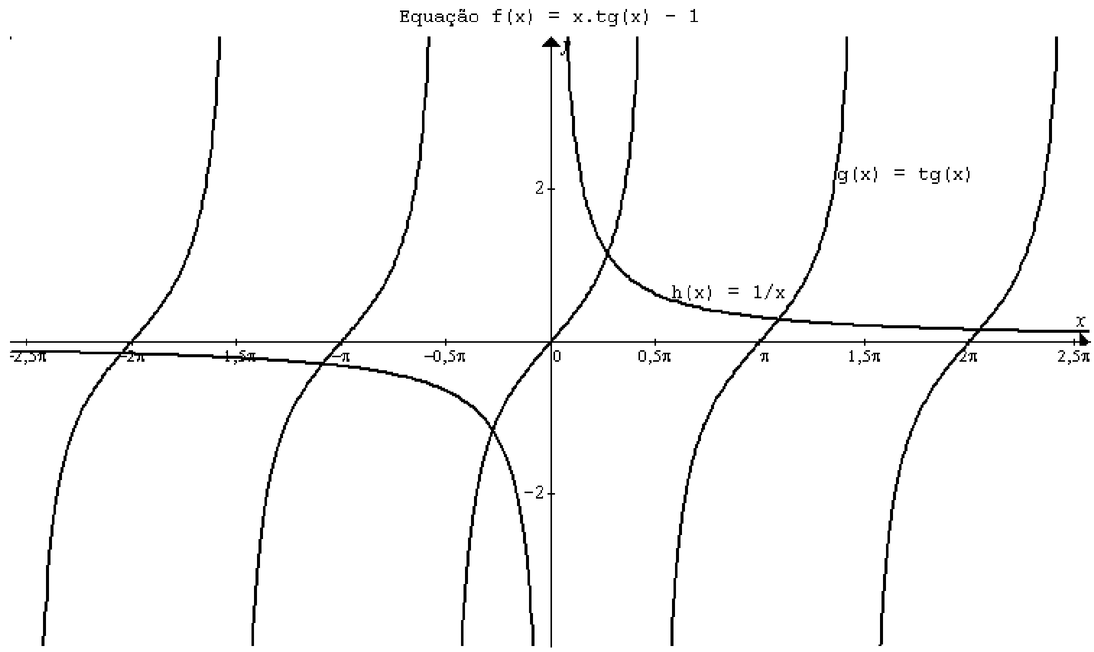


Figura 2.5: A equação possui um número infinito de raízes

Considerando a existência de vários teoremas da Álgebra que fornecem informações relevantes sobre as equações algébricas, será tratada, a seguir, de forma especial, a execução da Fase I para este tipo de equação.

3 - Estudo Especial das Equações Polinomiais

Toda equação da forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0 \tag{3.1}$$

com $a_i \in \Re\ \forall\ i = 0, 1, ... , n$; é dita polinomial. O número natural, n, é o grau da equação.

Teorema 3.1

Uma equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes, reais ou complexas, contando cada raiz de acordo com a sua multiplicidade.

Teorema 3.2

Se os coeficientes de uma equação polinomial forem reais, então as suas raízes complexas ocorrerão em pares conjugados.

Corolário 3.1

Uma equação polinomial de grau ímpar, com coeficientes reais, tem, no mínimo, uma raiz real.

Teorema 3.3

Toda equação polinomial de grau par, cujo termo independente é negativo, tem pelo menos uma raiz real positiva e outra negativa.

Teorema 3.4

Toda equação polinomial de grau ímpar, tem pelo menos uma raiz real com o sinal contrário ao do termo independente.

Valor numérico de um polinômio

Para avaliar um polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (3.2)$$

em um ponto $x = \propto$, usualmente, faz-se

$$f(\propto) = a_n \propto^n + a_{n-1} \propto^{n-1} + a_{n-2} \propto^{n-2} + ... + + a_2 \propto^2 + a_1 \propto + a_0$$

Desta forma, são necessárias $\frac{n.(n+1)}{2}$ multiplicações, considerando que as potenciações são feitas por meio de produtos, e n adições.

Uma forma mais eficiente de avaliar um polinômio é o **Método de Horner**, que consiste em reescrever 3.2 de modo que não sejam necessárias as potenciações, conforme é mostrado a seguir.

$$f(x) = (a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + a_{n-2} x^{n-3} + ... + a_2 x + a_1).x + a_0$$

$$f(x) = ((a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + a_{n-2} x^{n-4} + ... + a_2).x + a_1).x + a_0$$

Continuando com este procedimento, obtém-se

$$f(x) = \underbrace{(((...(}_{n-1} a_n.x + a_{n-1}).x + a_{n-2}).x + ... + a_2).x + a_1).x + a_0 \qquad (3.3)$$

Este procedimento requer apenas n multiplicações e n adições.

Exemplo 3.1

Avaliar o polinômio $f(x) = 3.x^5 – 2.x^4 + 5.x^3 + 7.x^2 – 3.x + 1$ no ponto $x = 2$ utilizando o Método de Horner.

Solução

$$f(x) = ((((3.x -2).x + 5).x + 7).x – 3).x + 1$$

$$f(2) = ((((3.2 -2).2 + 5).2 + 7).2 – 3).2 + 1 \Rightarrow f(2) = 127$$

3.1 – Delimitação das raízes reais

3.1.1 - Limite Superior das Raízes Positivas (LSRP)

Teorema 3.5 (Lagrange)

Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ uma equação polinomial de grau n na qual $a_n > 0$ e $a_0 \neq 0$. Para limite superior das suas raízes positivas, caso existam, pode ser tomado o número:

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{M}{a_n}} \tag{3.4}$$

Onde k é o grau do primeiro termo negativo e M o módulo do menor coeficiente negativo.

Exemplo – 3.2

Determinar um limite superior das raízes positivas da equação

$$f(x) = x^5 - 2x^4 -7x^3 + 9x^2 +8x – 6 = 0.$$

Solução

Tem-se que $k = 4$, $M = 7$. Sendo assim **L = 8**

3.1.2 - Limite Inferior das Raízes Negativas (LIRN)

(i) Toma-se a equação auxiliar $f_1(x) = f(- x) = 0$.

(ii) Aplica-se o teorema de Lagrange em $f_1(x) = 0$ para determinar L_1, que é um limite superior das suas raízes positivas.

(iii) Sendo assim, $- L_1$ é um limite inferior das raízes negativas de $f(x) = 0$.

Para demonstrar que a afirmativa (iii) é verdadeira, seja:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

uma equação com as raízes $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$. Escrevendo-a na forma fatorada, tem-se que

$$f(x) = a_n.(x – r_1)(x – r_2)(x – r_3) ... (x – r_n) = 0$$

Substituindo x por –x vem

$$f(-x) = a_n.(-x - r_1)(-x - r_2)(-x - r_3) \ldots (-x - r_n) = 0$$

que tem as raízes $-r_1, -r_2, -r_3, \ldots, -r_n$. Sendo algum r_i, i = 1, 2, ..., n; a maior raiz positiva de f(-x) = 0, então $-r_i$ é a menor raiz negativa de f(x) = 0. O que prova a afirmativa (iii).

Exemplo – 3.3

Determinar um limite inferior das raízes negativas da equação

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 6 = 0.$$

Solução

A equação auxiliar é

$$f_1(x) = f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^4 - 7(-x)^3 + 9(-x)^2 + 8(-x) - 6 = 0$$

Portanto

$$f_1(x) = -x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 8x - 6 = 0.$$

Observe-se que, quando se substitui x por –x, em uma equação polinomial, os termos de grau ímpar mudam de sinal e os de grau par não.

De acordo com o teorema de Lagrange a_5 deve ser maior que zero. Basta, então, multiplicar $f_1(x)$ por (- 1) para obter.

$$f_1(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 9x^2 + 8x + 6 = 0.$$

Tem-se, então, que k = 3, M = 9. Assim, $L_1 = 4 \Rightarrow$ **$-L_1 = -4$**

3.2 – Enumeração das raízes reais

3.2.1 - Regra de Sinais de Descartes

O número de raízes positivas de uma equação polinomial, f(x) = 0, é igual ao número de variações de sinal na seqüência dos seus coeficientes ou é menor por um inteiro par.

Para determinar o número de raízes negativas, basta trocar x por −x e calcular o número de raízes positivas de f(−x) = 0, o qual será o número de raízes negativas de f(x) = 0.

Exemplo – 3.4

Enumerar as raízes reais da equação a seguir utilizando a regra dos sinais de Descartes.

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 6 = 0.$$

Solução

→ Raízes positivas: + 1, - 2, - 7, + 9, + 8, - 6 $\Rightarrow$ **3 ou 1**

→ Raízes negativas

Tomando $f_1(x) = - x^5 - 2x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 8x – 6 = 0$ do exemplo 4.3 conclui-se que a equação tem **2 ou nenhuma raiz negativa**

3.2.2 – Regra dos sinais de Sturm

Seqüência de Sturm

Seja y = f(x) um polinômio de grau $n \geq 1$ da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \tag{3.1}$$

com $a_i \in \Re\ \forall; i = 0, 1, ... , n$.

Define-se a sequência de Sturm de f(x) como sendo o seguinte conjunto de funções polinomiais:

$$\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), ..., f_k(x)\};\ k \leq n.$$

onde $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x)$ é a primeira derivada de f(x) e, de $f_2(x)$ em diante, cada termo é o resto, com o sinal trocado, da divisão dos dois termos anteriores. A sequência finaliza quando se obtém um resto constante. A seguir são relacionadas três propriedades desta seqüência.

(i) Se a equação f(x) = 0 possuir raízes múltiplas, então o último termo da seqüência é uma constante nula.

(ii) Para nenhum valor de x dois termos consecutivos da seqüência podem se anular.

(iii) Se, para algum valor de x, um termo médio da seqüência se anula, então os termos vizinhos terão valores numéricos de sinais opostos.

Teorema 3.6 (Sturm)

Sejam:

(i) f(x) = 0 uma equação polinomial de grau $n \geq 1$;

(ii) dois números reais, *a* e *b*, tais que $a < b$, $f(a) \neq 0$ e $f(b) \neq 0$;

(iii) $N(\alpha)$ o número de variações de sinal apresentado pela sequencia de Sturm quando cada um dos seus termos é avaliado em $x = \alpha$.

Sendo assim, o número de raízes reais distintas de f(x) = 0, no intervalo (a, b), é igual a N(a) - N(b).

Exemplo – 3.5

Enumerar as raízes reais da equação $f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 6 = 0$ utilizando a regra dos sinais de Sturm e sabendo-se que estão nos intervalos (-4, 0) e (0, 8).

<u>Solução</u>

O quadro a seguir apresenta a seqüência de Sturm associada à equação assim como as variações de sinais.

x →	- 4	0	8
$f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 6$	-	-	+
$f_1(x) = 5x^4 - 8x^3 - 21x^2 + 18x + 8$	+	+	+
$f_2(x) = 3{,}4x^3 - 3{,}7x^2 - 7{,}8x + 5{,}4$	-	+	+
$f_3(x) = 12{,}4x^2 - 4{,}3x - 12$	+	-	+
$f_4(x) = 5{,}4x - 2{,}9$	-	-	+
$f_5(x) = 10{,}7$	+	+	+
N(x) →	**5**	**3**	**0**

Número de raízes negativas → N(- 4) – N(0) = 5 - 3 = **2**

Número de raízes positivas → N(0) – N(8) = 3 – 0 = **3**

A exigência de que a equação não tenha raízes múltiplas não é tão restritiva, uma vez que, se esta condição não é satisfeita, e então a seqüência termina quando se obtém um resto nulo, o penúltimo termo origina uma equação que tem as raízes múltiplas. Dividindo-se a equação dada por este termo, o quociente será uma equação que possui somente raízes simples. A ela aplica-se o Teorema de Sturm.

Exemplo – 3.6

A equação $f(x) = x^5 - 11x^4 + 34x^3 + 8x^2 - 160x + 128 = 0$ tem as raízes -2, 1, 4, 4, 4. A seqüência de Sturm a ela associada é:

$$f(x) = x^5 - 11x^4 + 34x^3 + 8x^2 - 160x + 128$$
$$f_1(x) = 5x^4 - 44x^3 + 102x^2 + 16x - 160$$
$$f_2(x) = 5{,}76x^3 - 49{,}68x^2 + 120{,}96x - 57{,}60$$
$$f_3(x) = 10{,}546875x^2 - 84{,}375x + 168{,}75$$
$$f_4(x) = 0$$

A equação $f_3(x) = 0$ tem as raízes 4 e 4. Dividindo a equação dada por ela, obtém-se a equação

$$f_5(x) = 0.0948148x^3 - 0.2844444x^2 - 0.5688889x + 0.7585185 = 0$$

que tem somente as raízes simples -2,1 e 4.

A seguir, são apresentados métodos numéricos para o cálculo das raízes de uma equação qualquer. Será considerado, apenas, o caso em que as raízes são reais.

4 – Fase II: Refinamento - Métodos numéricos para o cálculo de raízes

4.1 - Método da Bisseção

Seja y = f(x) uma função contínua em um intervalo [a,b] que contém uma, e só uma, raiz, ξ, da equação f(x) = 0.

Este método consiste em dividir o intervalo [a, b], de forma iterativa, ao meio.

Para verificar se a raiz está contida na primeira ou na segunda metade do intervalo inicial, é utilizado o teorema de Bolzano. Em seguida, o processo é repetido para aquela metade que contém a raiz de f(x) = 0, ou seja, aquela em que a função, y = f(x), tem valores numéricos com sinais opostos nos seus extremos. A figura 4.1 ilustra o processo.

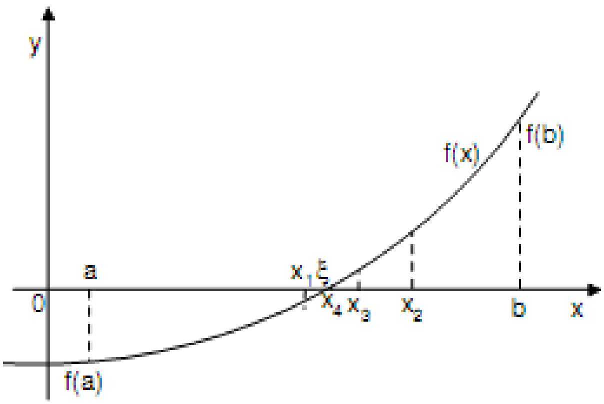


Figura 4.1: Método da Bisseção

4.1.1 – Função de iteração

Considerando que em cada iteração é atualizado o ponto “a” ou “b”, tem-se que a função de iteração desse método é dada por:

$$x_k = \frac{a+b}{2}, k = 1, 2, ... \tag{4.1}$$

4.1.2 - Critério de parada

Dada uma precisão ξ, o processo iterativo é finalizado quando se obtém um intervalo cujo tamanho é menor ou igual a ξ, então qualquer ponto nele contido pode ser tomado como uma estimativa para a raiz; ou quando for atingido um número máximo de iterações.

4.1.3 - Critério de convergência

Se y = f(x) for contínua em [a, b] e f(a).f(b) < 0, então o método da Bisseção gera uma seqüência que converge para uma raiz de f(x) = 0.

4.1.4 - Estimativa do número de iterações

O método da Bisseção permite que seja estimado, a *priori*, o número mínimo de iterações para calcular uma raiz ξ com uma precisão ε a partir de um intervalo [a, b].

As iterações geram uma seqüência de intervalos encaixados da forma

$$\{[a, b], [a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], ..., [a_k, b_k]\}$$

Como cada intervalo gerado, tem tamanho igual à metade do intervalo anterior, tem-se que:

$$b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2^1}\ ,\ b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}\ ,\text{ logo }\ b_2 - a_2 = \frac{b - a}{2^2}$$

$$b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2}\ ,\text{ então }\ b_3 - a_3 = \frac{b - a}{2^3}$$

Tendo em vista estes resultados, chega-se a $b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$. Como se deseja obter k tal que $b_k - a_k \leq \varepsilon$, então:

$$\frac{b - a}{2^k} \leq \varepsilon \Rightarrow k \geq \frac{\log(b - a) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Exemplo 4.1

Dada a equação $f(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 6 = 0$, pede-se:

(a) Isolar as suas raízes reais sabendo-se que são duas negativas e três positivas nos intervalos (-4, 0) e (0, 8), respectivamente.

(b) Considerar o intervalo que contém a menor raiz positiva e estimar o número, k, de iterações necessário para calculá-la utilizando o método da bisseção com precisão 0,040.

(c) Utilizando o método da bisseção, calcular a sua menor raiz positiva com precisão 0,040 e um máximo de (k + 1) iterações.

Solução

No exemplo 3.2 foi determinado que todas as possíveis raízes positivas desta equação estão no intervalo (0, 8). No exemplo 3.3 foi constatado que as possíveis raízes negativas estão no intervalo (- 4, 0). No exemplo 3.5 foi verificado que esta equação tem duas raízes negativas e três positivas.

a) Isolamento das raízes reais

Raízes negativas

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0
f(x)	- 982	- 165	6	- 1	- 6

Raízes positivas

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	- 6	3	- 10	- 9	234	1.259	4.038	10.095	21.626

Verifica-se, então, que cada intervalo, a seguir, contém uma raiz: (-3, -2), (-2, -1), (0, 1), (1, 2) e (3, 4).

b) Estimativa do número de iterações necessário para calcular a menor raiz positiva utilizando o método da Bisseção com precisão 0,040.

$$k \geq \frac{\log(1 - 0) - \log(0{,}040)}{\log(2)} \Rightarrow K \geq 4{,}6 \Rightarrow \mathbf{k = 5}$$

c) Cálculo da menor raiz positiva

k	a	b	f(a)	f(b)	b - a	x_k	$f(x_k)$
01	0,000	1,000	- 6,000	3,000	1,000	0,500	- 0,719
02	0,500	1,000	- 0,719	3,000	0,500	0,750	1,714
03	0,500	0,750	- 0,719	1,714	0,250	0,625	0,597
04	0,500	0,625	- 0,719	0,597	0,125	0,563	- 0,042
05	0,563	0,625	- 0,042	0,597	0,062	0,594	0,283
06	0,563	0,594	- 0,042	0,283	0,031		

Para a precisão estabelecida, qualquer ponto do intervalo [0,563; 0,594] pode ser tomado como uma estimativa para a menor raiz positiva da equação.

Exemplo 4.2

As figuras a seguir mostram um recipiente na forma de um cilindro circular reto que deve ser construído para conter 1000cm^3. O fundo e a tampa, conforme é mostrado na figura 4.2.a, devem ter um raio 0,25cm maior que o raio do cilindro, de modo que o excesso possa ser utilizado para formar um lacre com a lateral. A chapa do material usado para confeccionar a lateral do recipiente, como apresentado na figura 4.2.b, deve ser, também, 0,25cm maior para que o lacre possa ser formado.

Utilizar o método da Bisseção, com precisão 0.040 e um máximo de 10 iterações, para determinar a quantidade mínima de material a ser utilizada para construir o recipiente.

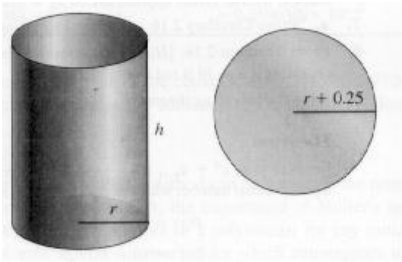


Figura 4.2.a

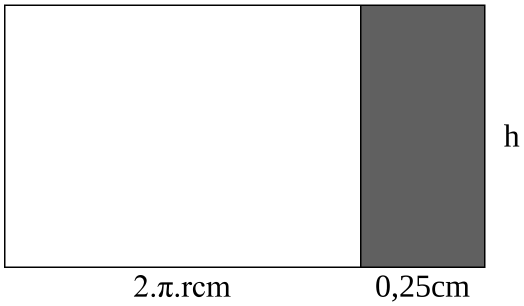


Figura 4.2.b

<u>Solução</u>

Sabe-se que o volume de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, no caso deste problema tem-se, então, que

$$V = \pi.r^2.h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi.r^2} \tag{4.2}$$

A área total do recipiente é dada pela soma da área lateral com as da tampa e fundo, sendo assim

$$A_{total} = 2\pi.r.h + 0,25h + 2\pi(r + 0.25)^2 \tag{4.3}$$

Substituindo (4.2) em (4.3)

$$A_{total} = (2\pi.r + 0,25).\left(\frac{1000}{\pi.r^2}\right) + 2\pi.r^2 + \pi.r + 0.125\pi \tag{4.4}$$

Desenvolvendo (4.4) tem-se

$$A_{total} = \frac{2000}{r} + \frac{250}{\pi.r^2} + 2\pi.r^2 + \pi.r + 0.125\pi = f(r) \tag{4.5}$$

Para determinar a quantidade mínima de material a ser utilizada, basta calcular o valor de r para o qual a área total é mínima. Derivando (4.5), em relação a r, tem-se:

$$f'(r) = -\frac{2000}{r^2} - \frac{500}{\pi.r^3} + 4\pi.r + \pi \tag{4.6}$$

Igualando 4.6 a zero e multiplicando por r^3 (uma vez que $r \neq 0$), é obtida a equação polinomial:

$$f'(r) = 4\pi.r^4 + \pi.r^3 - 2000.r - \frac{500}{\pi} = 0 \tag{4.7}$$

Que resolvida dá o valor de r para o qual a área é mínima.

Considerando 3 casas decimais, tem-se, a partir de 4.7, a seguinte equação a resolver:

$$f'(r) = 12{,}566.r^4 + 3{,}142.r^3 - 2000.r - 159{,}160 = 0 \qquad (4.8)$$

Limite superior positivo

Seja, então, a determinação do limite superior positivo utilizando o Teorema de Lagrange.

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{M}{a_n}}$$

Tem-se que n = 4, a_4 = 12,566, k = 1, M = 2000. Portanto L = 6,4.
Toma-se, então, **L = 7**

Enumeração das raízes positivas

Utilizando a regra dos sinais de Descartes, verifica-se que 4.8 possui somente uma raiz positiva, o que era de se esperar tendo em vista a natureza do problema.

Estimativa do número de iterações

$$k \ge \frac{\log(7-0) - \log(0{,}040)}{\log(2)} \Rightarrow K \ge 7{,}5 \Rightarrow \mathbf{k = 8}$$

Cálculo da raiz

k	a	b	f(a)	f(b)	b - a	x_k	$f(x_k)$
01	0,000	7,000	- 2000	17089.512	7,000	3,500	- 5138,761
02	3,500	7,000	- 5138,761	17089.512	3,500	5,250	- 658,221
03	5,250	7,000	- 658,221	17089,512	1,750	6,125	5998,485
04	5,250	6,125	- 658,221	5998,485	0,875	5,688	2192,593
05	5,250	5,688	- 658,221	2192,593	0,438	5,469	656,791
06	5,250	5,469	- 658,221	656,791	0,219	5,359	- 27,228
07	5,359	5,469	- 27,228	656,791	0,110	5,414	308,019
08	5,359	5,414	- 27,228	308,019	0,055	5,387	138,722
09	5,359	5,387			0,028		

Para a precisão estabelecida, qualquer ponto do intervalo [5,359; 5.387] pode ser tomado como uma estimativa para a raiz.

Tomando, por exemplo, r = 5,375cm obtém-se $\mathbf{A_{total} = 573{,}651cm^2}$.

Observe-se que r = 5,375cm é abscissa de ponto de mínimo de 4.5, uma vez que

$$f''(r) = 50{,}264.r^3 + 9{,}426.r^2 - 2000$$

é maior que zero no intervalo [5,359; 5.387].

Exemplo 4.3

A concentração, c, de uma bactéria poluente em um lago é descrita por

$$c = 70.e^{-1,5.t} + 2,5.e^{-0,075.t}$$

Utilizar o Método da Bisseção, com precisão 0,050 e um máximo de 5 iterações, para estimar o tempo t, em segundos, para que esta concentração seja reduzida para 9.

Solução

O problema consiste em determinar o tempo, t, para o qual

$$c = 70.e^{-1,5.t} + 2,5.e^{-0,075.t} = 9$$

Para isto deve ser resolvida a equação

$$f(t) = 70.e^{-1,5.t} + 2,5.e^{-0,075.t} - 9 = 0 \qquad (4.9)$$

A figura 4.3 apresenta o gráfico da função que dá origem à equação 4.9. Como pode ser observado há uma única raiz situada no intervalo (1,5; 2) segundos.

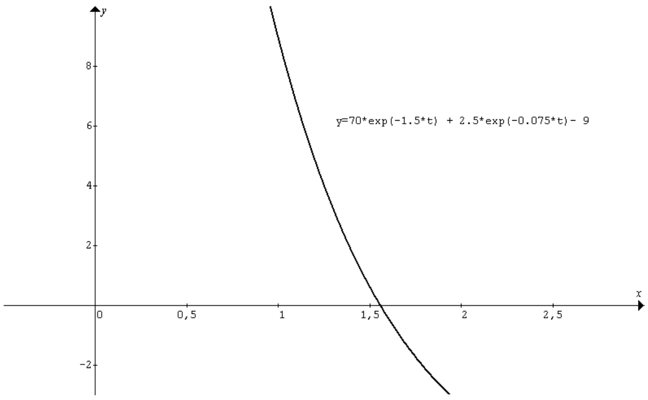


Figura 4.3: Gráfico da função que origina 4.2.8

Aplicando o método da Bisseção são obtidos os resultados apresentados a seguir.

k	a	b	f(a)	f(b)	b - a	x_k	$f(x_k)$
01	1,500	2,000	0,612	-3,363	0,500	1,750	-1,737
02	1,500	1,750	0,612	-1,737	0,250	1,625	-0,670
03	1,500	1,625	0,612	-0,670	0,125	1,563	-0,059
04	1,500	1,563	0,612	-0,059	0,063	1,531	0,269
05	1,531	1,563	0,269	0,059	0,032		

Para a precisão estabelecida, qualquer valor do intervalo [1,531; 1.563] pode ser tomado como uma estimativa para o tempo.

4.1.4 - Considerações finais

(i) O método exige pouco esforço computacional.

(ii) O método sempre gera uma sequência convergente.

(iii) A convergência é lenta. Notadamente se o intervalo inicial tiver um tamanho, b – a, muito maior que a precisão, ε, estabelecida. Neste caso, o número de iterações tende a ser muito grande. Como exemplo, considere-se que:

$$b - a = 2,\ \varepsilon = 10^{-6} \Rightarrow k = 20{,}9 \Rightarrow k = 21 \text{ iterações}$$

4.2 - Método da Falsa Posição

Seja y = f(x) uma função contínua em um intervalo [a,b] que contém uma, e só uma, raiz ξ da equação f(x) = 0.

O Método da Falsa Posição consiste em dividir, de forma iterativa, o intervalo [a, b] no ponto em que a reta que passa por [a, f(a),] e [b, f(b)] intercepta o eixo das abscissas. A figura 4.4 ilustra o processo.

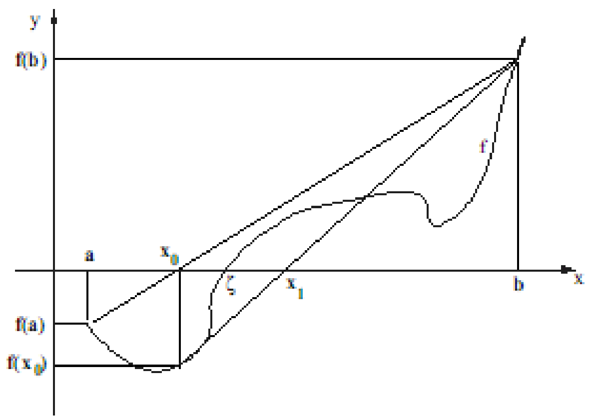


Figura 4.4: Método da Falsa Posição

Em cada iteração é utilizado o Teorema de Cauchy-Bolzano para localizar o intervalo que contém a raiz.

4.2.1 – Função de iteração

Para determinar a função de iteração, basta considerar que a equação da reta que passa pelos pontos [a, f(a)] e [b, f(b)] pode ser obtida resolvendo-se o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Cujo resultado é:

$$x.f(a) + b.f(x) + a.f(b) – b.f(a) – a.f(x) – x.f(b) = 0 \qquad (4.10)$$

Em cada iteração é gerado um ponto $[x_k, f(x_k)]$, k = 1, 2, ...; tal que $f(x_k) = 0$. Sendo assim, de (4.10) vem:

$$x_k.f(a) + a.f(b) – b.f(a) – x_k.f(b) = 0$$

$$x_k.[– f(b) + f(a)] + a.f(b) - b.f(a) = 0$$

Logo:

$$x_k = \frac{- a.f(b) + b.f(a)}{- f(b) + f(a)}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por (- 1) obtém-se a função de iteração do método:

$$x_k = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)} \quad , k = 1, 2, ... \qquad (4.11)$$

Sendo que, em cada iteração, atualiza-se a ou b.

O foco do Método da Falsa Posição é gerar, em cada iteração, uma aproximação para a raiz cuja imagem seja a menor possível, isto é, uma aproximação tal que $|f(x_k)| \leq \varepsilon$, sem se preocupar com a diminuição do tamanho do intervalo [a, b] que a contém.

No caso do Método da Bisseção, em cada iteração é feita a média aritmética dos extremos *a* e *b*. Por outro lado, o Método da Falsa Posição parte do princípio de que a raiz deve estar mais próxima do ponto que apresenta o menor valor da função, sendo assim, ao invés de fazer a média aritmética entre *a* e *b*, faz a média aritmética ponderada entre ambos, conforme pode ser observado em (4.11).

4.2.2 - Critério de parada

Dada uma precisão ξ, o processo iterativo é finalizado quando se obtém um ponto x_k, k = 0, 1, 2, ...; tal que $|f(x_k)| \leq \xi$ e, então, ele é tomado como uma estimativa para uma raiz de f(x) = 0; ou quando for atingido um número máximo de iterações.

4.2.3 - Critério de convergência

Se y = f(x) for contínua em [a, b] e f(a).f(b) < 0, então o método da Falsa Posição gera uma seqüência que converge para a raiz.

Exemplo 4.3

Calcular uma raiz da equação $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x - 10 = 0$ usando o método da falsa posição com precisão 0,006 e um máximo de 5 iterações.

a) Limites das raízes reais (Teorema de Lagrange)

a.1) Limite superior positivo → k = 2, M = 14 → L = 4,7 ⇒ L = 5

a.2) Limite inferior negativo → k = 2, M = 24 → $L_1 = 5,9$ ⇒ $- L_1 = - 6$

b) Enumeração das raízes reais

b.1) Regra dos sinais de Descartes

→ Raízes positivas: + 1, - 14, + 24, - 10 ⇒ **3 ou 1**

→ Raízes negativas: + 1, - 14, - 24, - 10 ⇒ **1 raiz**

b.2) Teorema de Sturm – Enumeração das raízes positivas

x →	0	5
$f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x - 10$	-	+
$f_1(x) = 4x^3 - 28x + 24$	+	+
$f_2(x) = 7x^2 - 18x + 10$	+	+
$f_3(x) = 7,2x - 9,3$	-	+
$f_4(x) = 1,5$	+	+
N(x) →	**3**	**0**

Número de raízes positivas → N(0) – N(5) = 3 – 0 = **3**

c) Separação das raízes positivas

x	f(x)
0	- 10
1	1
2	- 2
3	17

Há uma raiz em cada um dos seguintes intervalos:

(0; 1); (1; 2) e (2; 3)

d) Cálculo da maior raiz positiva

Fazendo uma bisseção no intervalo (2, 3), tem-se que f(2,5) = 1,563. Portanto, a raiz está no intervalo (2; 2,5).

k	a	b	f(a)	f(b)	x_k	$f(x_k)$
01	2	2,5	- 2	1,563	2,281	- 1,029
02	2,281	2,5	- 1,029	1,563	2,368	- 0,231
03	2,368	2,5	- 0,231	1,563	2,385	- 0,041
04	2,385	2,5	- 0,041	1,563	2,388	- 0,005

Para a precisão estabelecida, $x_4 = 2,388$ é uma estimativa para a maior raiz positiva da equação.

Obs: verifica-se que o tamanho do último intervalo, (2,388; 2,5); é 0,112.

4.2.3 - Considerações finais

A grande vantagem do Método da Falsa Posição é que ele é uma técnica robusta, que converge independentemente da forma do gráfico de y = f(x) no intervalo [a, b].

Entretanto, quando a convergência para a raiz só se faz a partir de um extremo do intervalo [a, b] e a imagem desse ponto fixo tem um valor muito elevado, a convergência é lenta. Este fato pode ser verificado analisando-se mais cuidadosamente a expressão (4.11).

Admita-se que o ponto fixo seja b. Para mostrar a parcela de acréscimo dado ao extremo esquerdo a, que nesta situação é variável, adicione-se e subtraia-se a parcela a × f(a) no numerador da expressão (4.11), donde vem que:

$$x = \frac{a.f(b) - b.f(a) - a.f(a) + a.f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{a.[f(b) - f(a)] - (b - a).f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Assim:

$$x = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) \tag{4.12}$$

Sendo, por hipótese, b fixo e f(b) elevado, a expressão $-\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$, que representa o acréscimo, terá um valor pequeno, acarretando convergência tão mais lenta quanto maior for o valor de f(b).

Quando se considera a como ponto fixo tem-se

$$x = b - \frac{f(b)}{f(b) - f(a)}(b - a) \tag{4.13}$$

Que é obtido somando e subtraindo a parcela b x f(b) no numerador de (4.11).

Uma forma de evitar que um extremo fique fixo durante o processo iterativo (situação que ocorre quando $f(x_k) \times f(x_{k-1}) > 0$), é substituir a reta que passa pelos pontos [a, f(a)] e [b, f(b)] por uma de inclinação menor. Por exemplo, se em duas iterações consecutivas o extremo b ficar fixo, substitui-se f(b) por f(b)/2.

4.3 - Método de Newton-Raphson

Seja y = f(x) uma função contínua em um intervalo [a, b] que contém uma, e só uma, raiz da equação f(x) = 0 e no qual *f '(x)* e *f ''(x)* não se anulam e preservam o sinal.

O Método de Newton-Raphson consiste em:

(a) atribuir uma estimativa inicial $x_0 \in [a, b]$ para uma raiz de f(x) = 0;

(b) gerar uma sequência de estimativas, $\{x_{k+1}\}$, k = 0, 1, 2, 3, ...; onde cada ponto é a interseção da reta tangente a y = f(x), em $[x_k, f(x_k)]$, com o eixo das abscissas.

A figura (4.5) ilustra o procedimento.

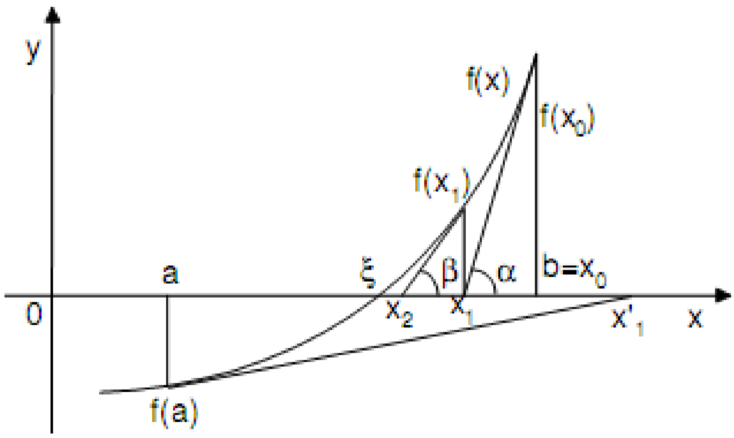


Figura 4.5: Método de Newton-Raphson

4.3.1 – Função de iteração

Seja a obtenção de x_1. Da figura 4.5 tem-se:

$$tg(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

De onde resulta

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Considerando este resultado, conclui-se que a função de iteração deste método é da forma:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad ; k = 0, 1, 2, 3, ... \qquad (4.14)$$

4.3.2 - Critério de parada

Dada uma precisão ξ, o processo iterativo é finalizado quando é obtido um ponto x_{k+1}, k = 0, 1, 2, ...; tal que $|x_{k+1} - x_k| \leq \xi$ ou $|f(x_{k+1})| \leq \xi$, então ele é tomado como uma estimativa para a raiz; ou quando for atingido um número máximo de iterações.

4.3.3 - Critério de convergência (condição suficiente)

Se *f '(x)* e *f ''(x)* não se anulam e preservam o sinal em [a, b] e a estimativa inicial, x_0, é tal que $f(x_0)$. f $''(x_0) > 0$; então o Método de Newton-Raphson gera uma sequência que converge para uma raiz de f(x) = 0.

Em geral, afirma-se que o método gera uma série convergente desde que x_0 seja escolhido "suficientemente próximo" da raiz.

Exemplo 4.5

Um objeto de massa m é solto de uma altura S_0, em relação ao solo. Após t segundos a sua altura é dada pela expressão

$$S(t) = S_0 - \frac{m.g}{k}.t + \frac{m^2.g}{k^2}\left(1 - e^{-k.t/m}\right) \tag{4.15}$$

Onde k é o coeficiente de resistência do ar e g a aceleração da gravidade.

Sendo m = 1kg, S_0 = 30m, k = 0,5kg/s e g = 9,8m/s^2, estime o tempo que o objeto leva para chegar ao solo utilizando o método de Newton-Raphson, com precisão 0,001 e um máximo de 5 iterações.

Solução

Resolver este problema consiste em determinar o tempo **t** para o qual **S(t) = 0**.

Efetuando as substituições em (4.15) tem-se a equação

$$S(t) = 30 - \frac{9,8}{0,5}.t + \frac{9,8}{0,5^2}\left(1 - e^{-0,5.t}\right) \tag{4.16}$$

Simplificando (4.16) é obtida a equação que deve ser resolvida

$$S(t) = 69,2 - 19,6t - 39,2e^{-0,5.t} = 0 \tag{4.17}$$

Sejam as funções

$$g(t) = 69,2 - 19,6.t \text{ e } h(t) = 39,2.e^{-0,5.t}$$

A figura 4.6 apresenta os gráficos destas duas funções. Como pode ser observado, a equação 4.17 possui duas raízes, sendo que, para o problema, a raiz negativa não tem sentido.

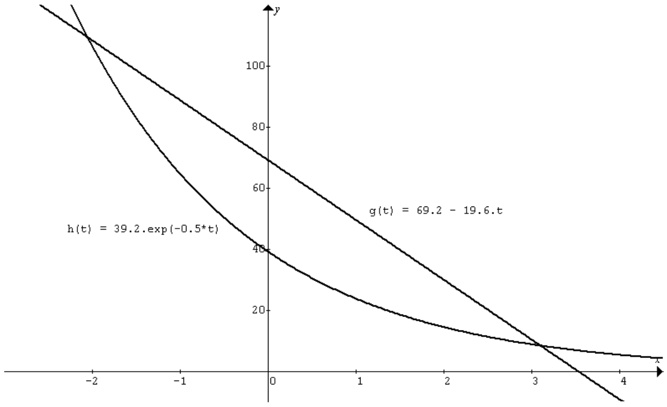


Figura 4.6: As funções y = g(x) e y = h(x)

Observando a figura 4.6, verifica-se que a raiz que interessa está intervalo (3, 4). De fato,

S(3) = 1,653 e S(4) = - 14,505.

Para este problema, o método de Newton-Raphson assume a forma:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{S(t_k)}{S'(t_k)} \qquad (4.18)$$

Sendo

$$S'(t) = 19,6.(e^{-0,5.t} - 1) < 0 \ \forall\ t \in [3, 4] \qquad (4.19)$$

e

$$S''(t) = -9,8.e^{-0,5.t} < 0 \ \forall\ t \in \Re \qquad (4.20)$$

Verifica-se que 4.12 é menor que zero qualquer que seja o valor de t, então, considerando o critério de convergência, toma-se $t_0 = 4$. Os resultados obtidos estão apresentados no quadro a seguir.

k	t_k	$S(t_k)$	$S'(t_k)$	$\lvert t_k - t_{k-1} \rvert$
0	4,000	- 14,505	- 16,947	--------
1	3,144	- 0,561	- 15,530	0,856
2	3,108	- 0,004	- 15,457	0,036
3	3,108			0,000

Para a precisão estabelecida, **$t \cong 3,108$s** é uma estimativa para o tempo que o objeto leva para chegar ao solo.

4.3.4 – Considerações finais

O Método de Newton-Raphson tem convergência muito boa (quadrática) o que, por consequência, proporciona um número pequeno de iterações. Entretanto, apresenta as seguintes desvantagens:

(i) Exige a análise do sinal de f ´(x) e f ´´(x).

(ii) Exige o cálculo do valor da primeira derivada em cada iteração.

(iii) Se f ´(x_k) for muito elevado a convergência será lenta

(iv) Se f ´(x_k) for próximo de zero pode ocorrer overflow

Para contornar o item (i), que é necessário para a escolha da estimativa inicial, é comum calcular somente o valor da função e o da sua segunda derivada nos extremos do intervalo, tomando como x_0 o aquele que satisfizer a condição $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$.

4.4 - Método das Secantes

Uma desvantagem do método de Newton-Raphson é a necessidade de se obter a primeira derivada da função que dá origem à equação e ter que avaliá-la em cada iteração.

Embora isso não seja inconveniente para funções polinomiais e muitas outras, existem funções cujas derivadas são extremamente difíceis ou inconvenientes de se avaliar. Há uma maneira de modificar o Método de Newton-Raphson a fim de eliminar esta desvantagem. Consiste em substituir, na sua função de iteração, a derivada $f'(x_k)$ pelo quociente das diferenças:

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \ k = 1, 2, \ldots \tag{4.21}$$

Esta aproximação, que é uma diferença dividida regressiva, conforme ilustra a figura a seguir, origina o Método das Secantes. Note-se que $f'(x_k)$ é, realmente, o limite da relação (4.21) quando x_{k-1} tende a x_k.

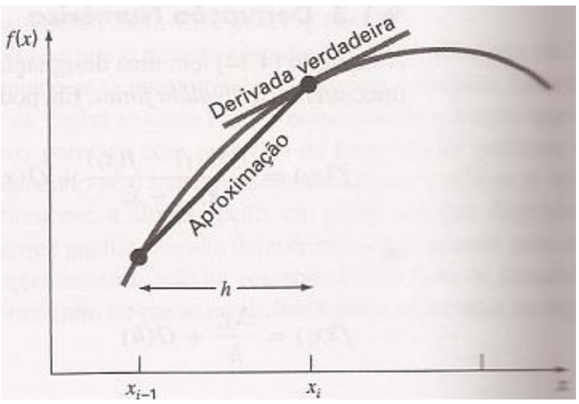


Figura 4.7: Diferença dividida regressiva

4.4.1 - Função de iteração

A função de iteração do método de Newton-Raphson é dada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \; k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.22}$$

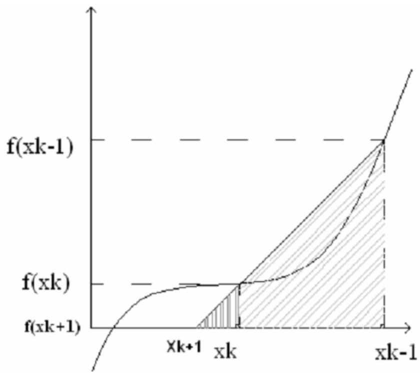
Sustituindo-se (4.21) em (4.22) obtém-se a função de iteração do método das secantes, dada por (4.23).

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k).x_{k-1} - f(x_{k-1}).x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \; k = 1, 2, \ldots \tag{4.23}$$

Observe-se que são necessárias duas aproximações iniciais.

4.4.2 - Interpretação Geométrica

Dadas duas aproximações x_{k-1} e x_k, k = 1, 2, ...; x_{k+1} é obtida como sendo a abscissa do ponto de intersecção da reta secante a y = f(x), que passa por $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ e $[x_k, f(x_k)]$, com o eixo das abscissas. A figura a seguir ilustra esta situação.



Pela semelhança de triângulos, tem-se que

$$\frac{f(x_{k-1})}{f(x_k)} = \frac{x_{k-1} - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}$$

De onde se obtém (4.23), a função de iteração do método da secante.

4.4.3 - Critério de Parada

Dada uma precisão ξ, o processo iterativo é finalizado quando se obtém um ponto x_{k+1}; k = 1, 2,...; tal que $|x_{k+1} - x_k| \leq \xi$ ou $|f(x_{k+1})| \leq \xi$, então, x_{k+1} é tomado como uma estimativa para a raiz; ou quando for atingido um número máximo de iterações.

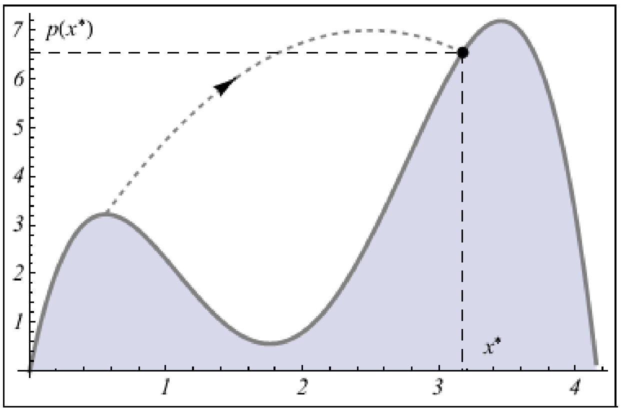
4.4.4 - Critério de convergência (condição suficiente)

Se as estimativas iniciais, x_0 e x_1, são tais que $f(x_0).\ f''(x_0) > 0$ e $f(x_1).\ f''(x_1) > 0$, então o método das secantes gera uma sequência que converge para uma raiz de $f(x) = 0$.

Em geral, considera-se que se as estimativas iniciais x_0 e x_1 estão suficientemente próximas de uma raiz, z, de $f(x) = 0$, então a sequência $\{x_k\}$ definida por (4.23) converge para z.

Exemplo 4.6

A região sombreada do gráfico apresentado a seguir representa o perfil de duas elevações dado pela função $p(x) = - x^4 + 7,7x^3 – 18x^2 + 13,6x$. Um projétil é lançado a partir da menor elevação e descreve uma curva dada por $q(x) = - x^2 + 5x + 0,75$. Pede-se determinar a altura na qual ocorre o impacto com a maior elevação. Utilizar o Método das secantes com precisão 0,001 e um máximo de 5 iterações.



<u>Solução</u>

O ponto de impacto é aquele no qual p(x) = q(x), ou seja:

$$- x^4 + 7,7x^3 – 18x^2 + 13,6x = - x^2 + 5x + 0,75$$

Resultando na seguinte equação a ser resolvida

$$f(x) = - x^4 + 7,7x^3 – 17x^2 + 8,6x - 0,75 = 0$$

Pelo gráfico, verifica-se, a principio, que a raiz de interesse está no intervalo (3; 3,4). Observe-se que cada subdivisão é igual a 0,2.

<u>Aplicação do Método da Bisseção</u>

$$f(3) = - 1,05 \qquad f(3,4) = 0,977 \qquad f(3,2) = 0,146$$

Logo, a raiz está no intervalo (3; 3,2)

<u>Aplicação do Método da Secante</u>

A função de iteração do Método da Secante é

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k).x_{k-1} - f(x_{k-1}).x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})},\ k = 1, 2, ...$$

Sendo tb_0 = 1,5 e tb_1 = 2; são obtidos os resultados a seguir.

k	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	3,000	- 1,050	---------
1	3,200	0,146	0,200
2	3,176	0,015	0,024
3	3,173	0,0005	0,003

Portanto, $\mathbf{x_3 = 3,173}$ é uma estimativa para a raiz de f(x) = 0. A altura do ponto de impacto é dada por **p(3.173) = 6,547 u.m**. Ou por **q(3,173) = 6,547 u.m**.

Observe-se que f(x) = 0 possui mais três raízes: 0,1099217; 0,5570879 e 3,8600741

4.4.5 - Considerações finais

(a) O método da secante e o da falsa posição têm duas semelhanças. As funções de iteração são idênticas, quando comparadas termo a termo e ambos utilizam duas estimativas anteriores para obter uma nova estimativa. Entretanto, uma diferença crítica é a forma como uma das estimativas anteriores é substituida pela nova estimativa da raiz. No método da falsa posição a última estimativa, x_i, substitui qualquer uma das duas anteriores que forneça valor funcional com o mesmo sinal que $f(x_i)$. Consequentemente, a raiz encontra-se, sempre, delimitada por duas estimativas. Portanto, o método sempre gera uma série convergente porque a raiz é mantida dentro do intervalo. Em contraste, no método da secante as estimativas são substituidas em sequência estrita, ou seja, a nova estimativa x_{i+1} substitui x_i e x_i substitui x_{i-1}. Assim, a raiz não é, necessariamente, delimitada por duas estimativas.

(b) A ordem de convergência do método das secantes é igual à do método da falsa posição, o que é natural, uma vez que este também considera retas secantes para obter estimativas da raiz.

(c) Apesar de a ordem de convergência do método das Secantes ser inferior à do método de Newton-Raphson, ele é uma alternativa viável uma vez que requer somente a avaliação da função y = f(x) em cada iteração, não sendo necessário avaliar f´(x).

(d) Se $f(x_k) \cong f(x_{k-1})$ pode não ser possível aplicar o método das Secantes e não ocorrer convergência.