**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**
**Instituto de Ciências Exatas e Biológicas**
**Departamento de Computação**
**Cálculo Numérico**

# Lista de Exercícios – Resolução de Equações Não Lineares

1) Para a delimitação das raízes reais de uma equação polinomial, além do teorema de Lagrange, existem vários outros como, por exemplo, o apresentado a seguir.

> *Se em uma equação polinomial com coeficientes reais*
> $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (a_n > 0)$$
> *cada coeficiente negativo, tomado em módulo, é dividido pela soma de todos os coeficientes positivos que o precedem, a cota superior positiva para as raízes reais será o maior dos resultados obtidos, aumentado em uma unidade.*

A título de exemplo, considere-se a equação $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 36 = 0$. Seus coeficientes negativos são -9 e -36. Tomando-se cada um em módulo e dividindo pela soma dos coeficientes positivos que o precedem, obtém-se $c_1 = 9/1 = 9$ e $c_2 = 36/(1 + 24) = 1{,}44$. Sendo assim, um limitante superior positivo para as raízes da equação é LSP = 9 + 1 = 10.

Para obter um limitante inferior negativo, basta utilizar o mesmo procedimento do teorema de Lagrange, ou seja, obter a equação auxiliar $f_1(x) = f(-x) = 0$ e a ela aplicar o teorema.

Dada a equação $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 12x - 5 = 0$, pede-se

a) utilizando o teorema de Lagrange e o teorema enunciado acima, delimite as suas raízes reais;

b) tome o melhor resultado obtido no item (a) e aplique a Regra dos Sinais de Sturm para enumerar as raízes reais;

c) isole as suas raízes reais;

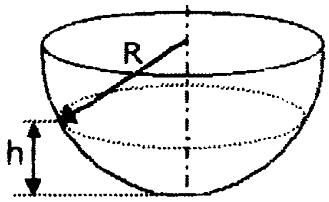
d) calcule uma raiz real da equação utilizando o método de Newton-Raphson com precisão 0,001 e um máximo de 5 iterações.

2) O Engenheiro recém formado M.J. Hesitant projetou um reservatório de água na forma de semi-esfera de raio 4m que será utilizado em um prédio e cometeu um erro no cálculo: o volume de água possível nesse reservatório é bem maior que $50m^3$, estabelecido como limite. Dessa forma, é preciso determinar o nível h máximo que a água pode atingir nesse recipiente para não ultrapassar o limite de volume estabelecido. Determine o valor de h com precisão $10^{-2}$ e um máximo de 5 iterações utilizando o método da falsa posição.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**
**Instituto de Ciências Exatas e Biológicas**
**Departamento de Computação**
**Cálculo Numérico**

O volume de uma calota esférica é dado por:

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$$

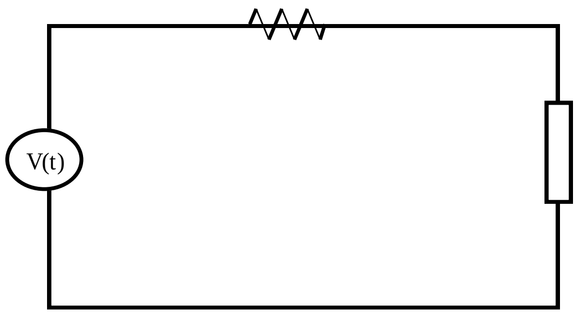



3) A distribuição de temperatura em cada ponto x de um pedaço de arame de 1,80m está dada por:

$$T(x) = -8{,}12x^3 + 41{,}88x^2 - 71{,}99x + 40{,}23$$

Determine o ponto no qual a temperatura é igual a zero. Utilize o método de Newton-Raphson com precisão 0,001 e um máximo de 10 iterações.

4) Seja o circuito apresentado na figura a seguir



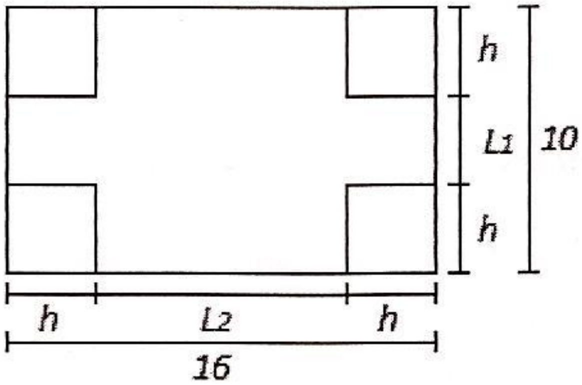

$$V(t) = 100\sqrt{2}\,\text{sen}(5t)$$

Pode ser demonstrado que a corrente no mesmo é dada pela seguinte expressão:

$$I = 5e^{-5t}\left(\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) + 5\,\text{sen}\left(5t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Determine um valor, t > 0, para o tempo para o qual a intensidade de corrente é nula. Utilizar o método da Falsa Posição com precisão 0.001 e um máximo de 10 iterações.

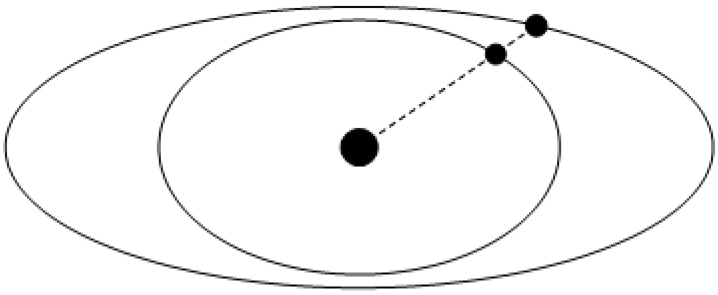
(5) Dispõe-se de uma lâmina retangular de 10 cm x 16 cm, para construir uma caixa retangular sem tampa, cortando um quadrado de igual tamanho em cada uma das quinas da mesma. Estimar um valor para o lado do quadrado de tal forma que o volume da caixa seja de 100 $cm^3$. Utilizar o método de Newton-Raphson com precisão de 0,001cm e um máximo de 10 iterações.




(6) Considere dois planetas com órbitas concêntricas em torno de uma estrela fixa (centro). As coordenadas do primeiro e do segundo planeta são dadas por

$$x_1 = 3{,}0\cos(3{,}12t) \qquad x_2 = 5{,}3\cos(2{,}35t)$$
$$y_1 = 1{,}9\,\text{sen}(3{,}12t) \qquad y_2 = 2{,}1\,\text{sen}(2{,}35t)$$

A estrela e os planetas estão alinhados para t = 0. Utilizar o Método da Falsa Posição, com precisão 0,001 e um máximo de 20 iterações, para determinar o primeiro valor de t > 0 para o qual os dois planetas e a estrela voltem a ficar alinhados.

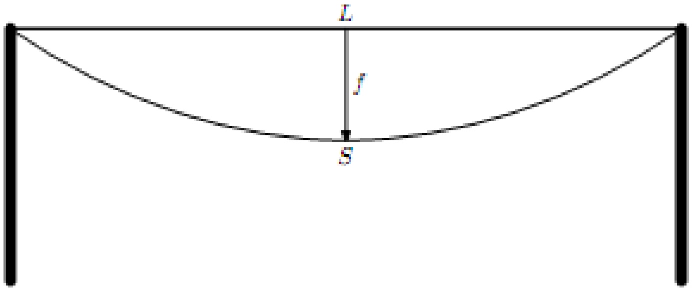


São três pontos colineares de coordenadas: (0, 0); ($x_1$, $y_1$) e ($x_2$, $y_2$). A equação a resolver é:
$f(t) = x_1.y_2 – x_2.y_1 = 0 \Rightarrow f(t) = (3,0).\cos(3,12t).\ (2,1)\text{sen}(2,35t) – (5,3)\cos(2,35t).(1,9)\text{sen}(3,12t) = 0$.

(7) Um cabo telefônico suspenso entre dois postes, sob a ação do seu próprio peso, descreve uma curva chamada catenária (ver figura a seguir).
Supondo que o cabo tem peso P quilogramas força por metro linear, então a tensão T no meio do mesmo pode ser obtida resolvendo-se a equação:

$$\frac{2T}{P}\,\text{senh}\left(\frac{PL}{2T}\right) = S$$

onde S é o comprimento do cabo e L é a distância entre os postes.



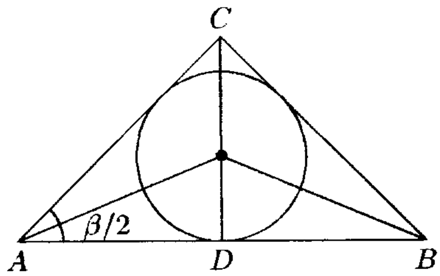

Para fins práticos, é muito importante saber o tamanho da flecha, *f*, pois isto permite determinar a altura mínima que o cabo pode atingir quando suspenso. A flecha pode ser calculada por meio da fórmula

$$f = \frac{T}{P}\left[\cosh\left(\frac{PL}{2T}\right) - 1\right]$$

Pede-se determinar a flecha quando P = 0,5 kgf/m, S = 32m e L = 30m. Deve ser utilizado o método da falsa posição com precisão 0,0001. e um máximo de 20 iterações.

**Obs.:** senh(.) e cosh(.) são, respectivamente, seno hiperbólico e cosseno hiperbólico. Observar que o argumento é um número real, portanto não importa se a calculadora está no modo grau ou radianos.

(8) Seja estimar o primeiro valor maior que zero para o ângulo β da base de um triângulo isósceles sabendo-se que sua área é igual a duas vezes a área do círculo inscrito, conforme mostrado na figura a seguir.




Utilizar o método da falsa posição com precisão 0,001 e um máximo de 5 iterações.

**Obs:** Área do círculo = $\pi(AD)^2 tg^2(\beta/2)$ Área do triângulo = $(AD)^2 tg(\beta)$.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**
**Instituto de Ciências Exatas e Biológicas**
**Departamento de Computação**
**Cálculo Numérico**

**Respostas**

(1.a) Teorema de Lagrange: (-4,5; 6). Teorema enunciado: (-5 ;6)

(1.b) Uma raiz negativa e três positivas.

A sequência de Sturm é: $f_0(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 12x - 5$; $f_1(x) = 4.x^3 - 6x^2 - 10x + 12$;

$f_2(x) = 3,25x^2 - 7,75x + 3,5$; $f_3(x) = 5,87.x - 8,19$; $f_4(x) = 0,99$.

(1.c) A raiz negativa está no intervalo (-2,5; -1,5) e há uma raiz positiva em cada um dos intervalos: (0, 1); (1,2) e (2,3).

(1.d) As raízes da equação são: - 2,432099; 2,3315151; 1,5207734; 0,5798104.

(2) 2,208837m (as outras duas raízes, que não fazem sentido para o problema, são -1, 8567367 e 11,6479)

(3) 1,2186352m e duas raízes complexas.

(4) A equação possui um número infinito de raízes, as sete primeiras, diferentes de zero, são 0,7881; 1,4136; 2,0420; 2,6704; 3,2987; 3,9270; 4,5553.

(5) $f(x) = \text{Volume} = (16 - 2.x).(10 - 2.x).(x) = 100 \Rightarrow f(x) = 4.x^3 - 52.x^2 + 160.x - 100 = 0$

As raízes que fazem sentido para o problema são 0,8390189 e 3,4017486 (a terceira, que não se aplica, é 8,7592325).

(6) A equação possui um número infinito de raízes, as três primeiras são 4,0430; 8,0862 e 12,1298 (sendo K a primeira raiz, as demais são 2K, 3K, 4K, ...).

(7) T = 11,9753kgf e f = 4,8527239m

(8) A equação a resolver é $f(\beta) = tg(\beta) - 2\pi.tg^2(\beta/2) = 0$. Ela possui um número infinito de raízes negativas e positivas. O primeiro valor, maior que zero para $\beta$ é 0,7055 radianos (aproximadamente 40 graus).