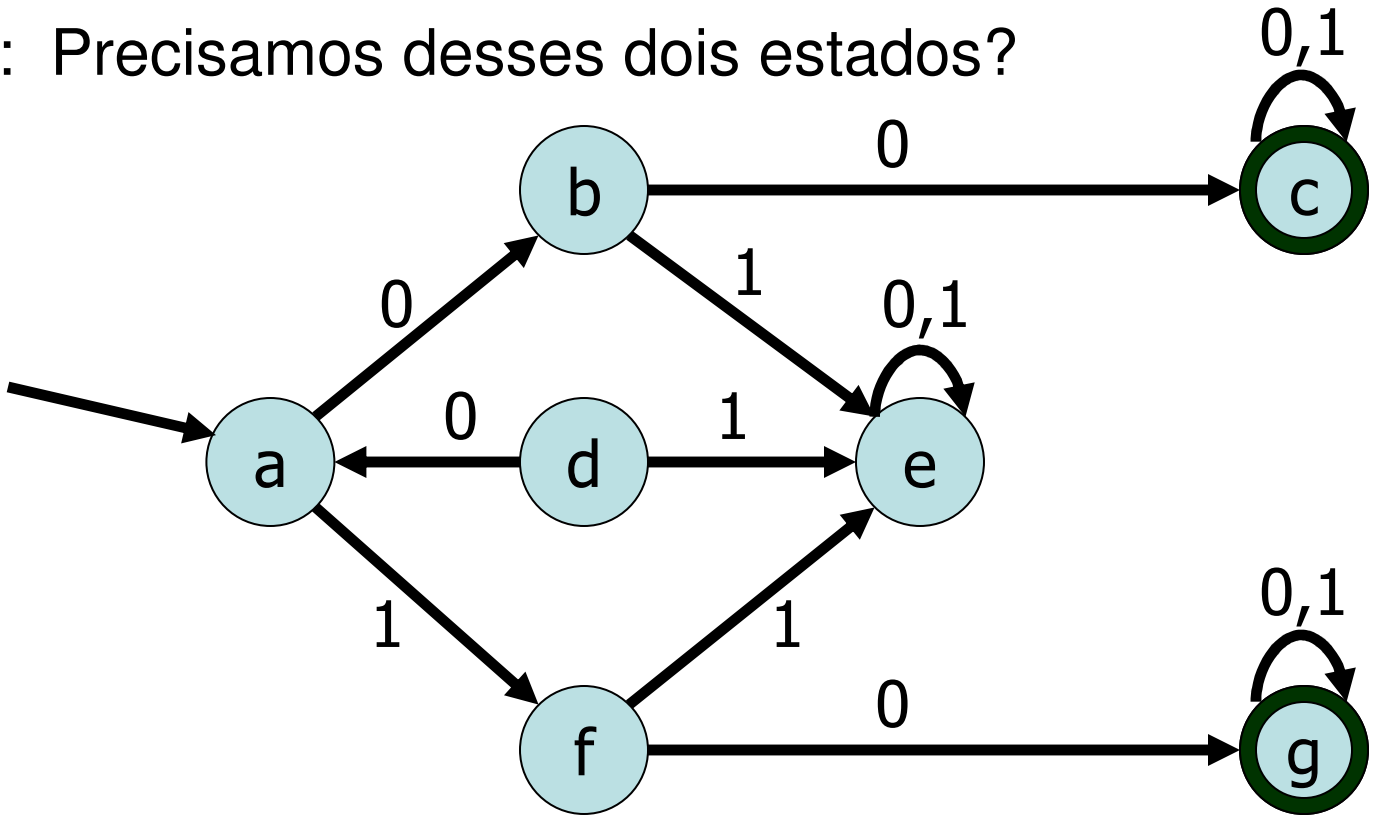
Minimização de AFD

Estados Equivalentes. Exemplo

Considere os estados de aceitação c e g. Eles são ambos estados que, uma vez atingidos, nunca se sai deles, desde que se leia 0 ou 1.

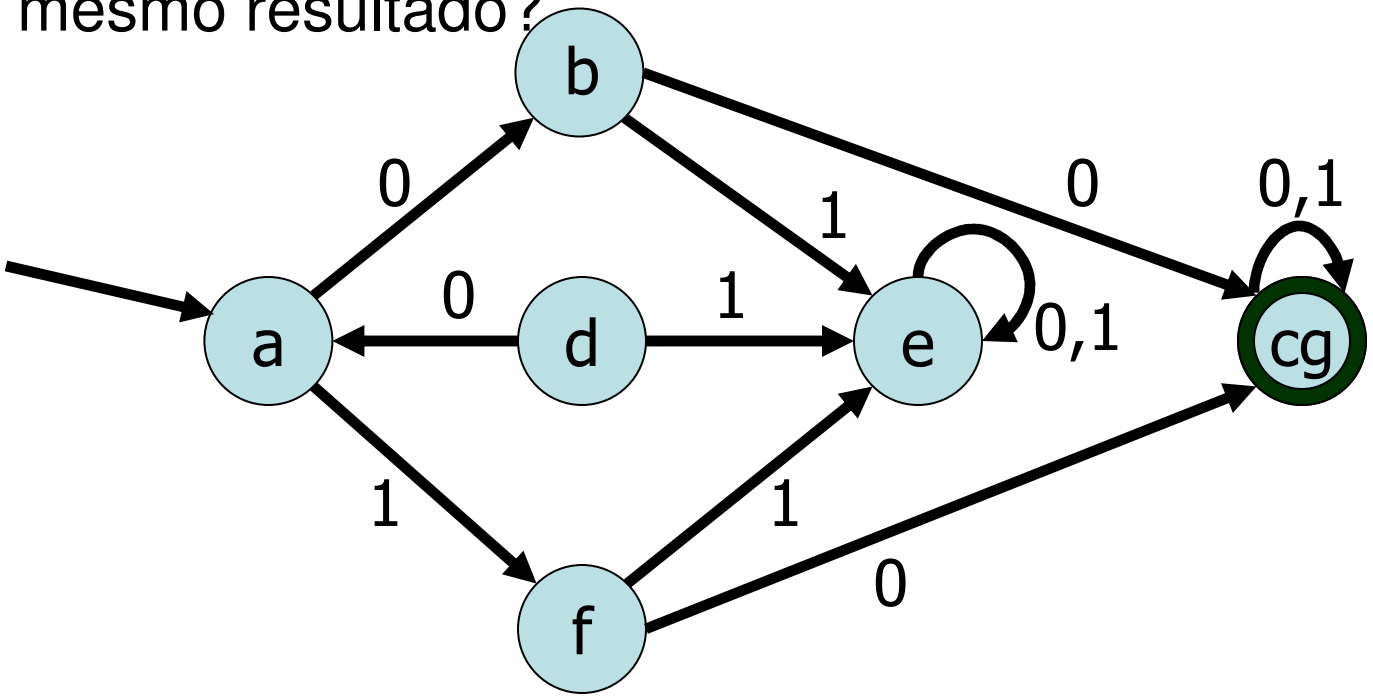
Q: Precisamos desses dois estados?



Estados Equivalentes. Exemplo

R: Não, eles podem ser unificados como se mostra abaixo.

Q: Existem outros estados que podem ser unificados porque quaisquer sufixos subsequentes produzem o mesmo resultado?



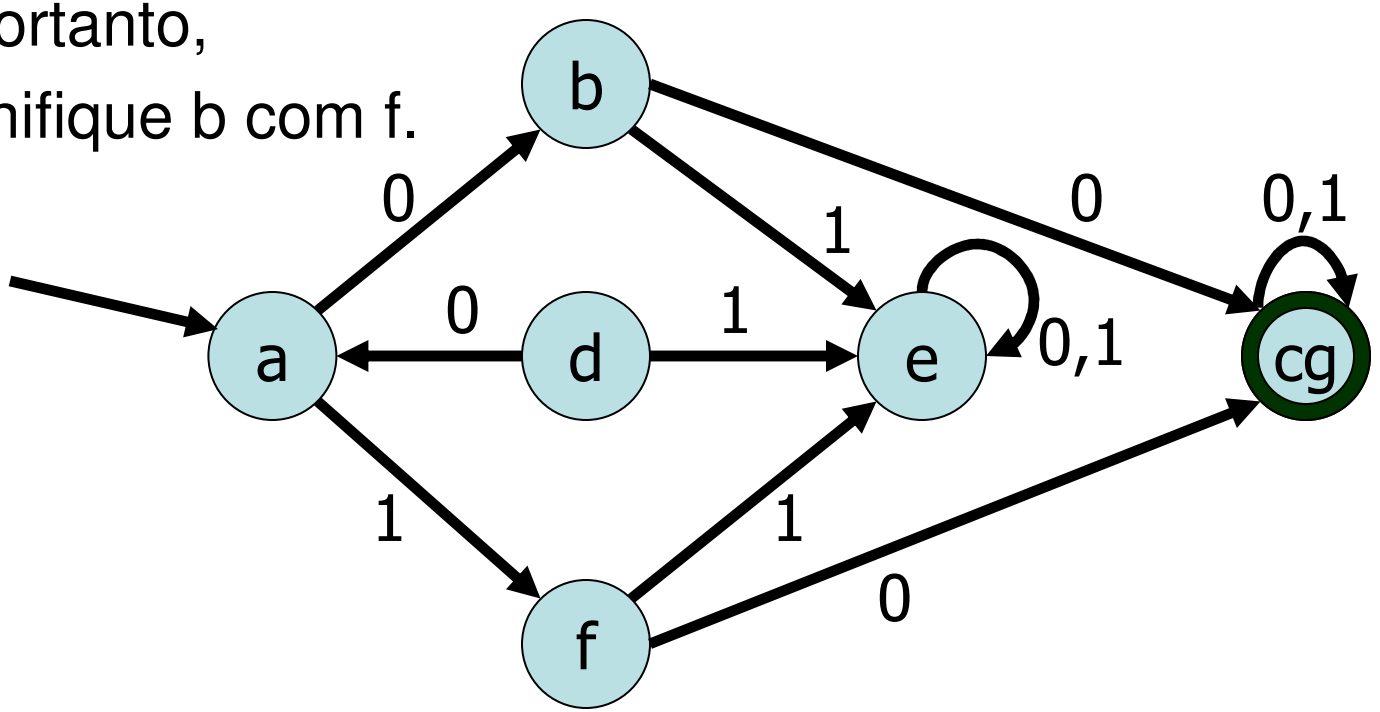
Estados Equivalentes. Exemplo

R: Sim, b e f. Note que se estamos em b ou f então:

1. se o string termina, é rejeitado em ambos os casos
2. se proxchar=0, aceita c/ qq sufixo em ambos os casos
3. Se proxchar=1, rejeita c/ qq sufixo em ambos os casos

Portanto,

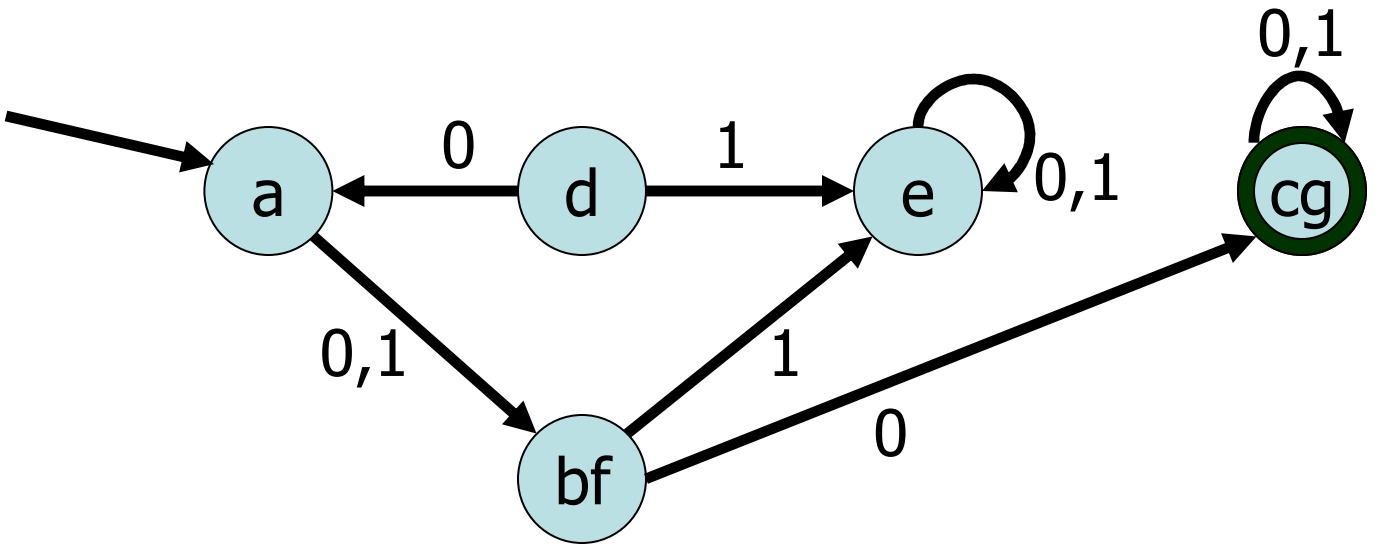
unifique b com f.



Estados Equivalentes. Exemplo

Intuitivamente, dois estados são equivalentes se todos as computações subsequentes a partir deles são iguais.

Q: Dê uma caracterização formal de equivalência entre estados.



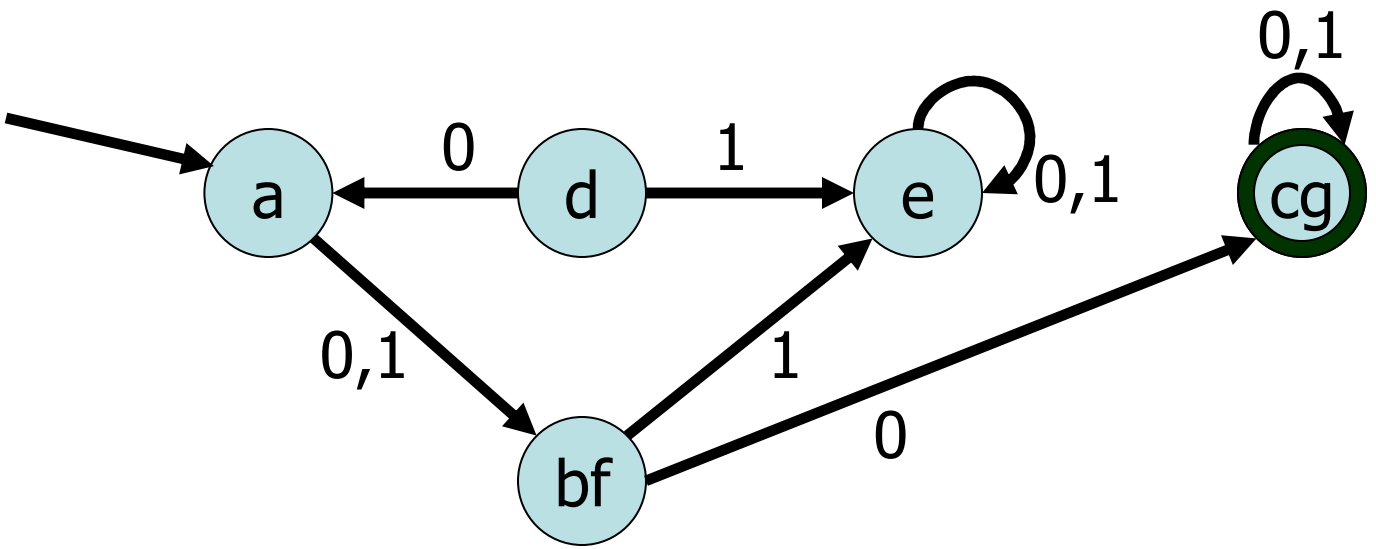
Estados Equivalentes. Exemplo

DEF: Dois estados q e q' em um AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ são ***equivalentes*** (ou ***indistinguiveis***) se, para quaisquer strings $u \in \Sigma^*$, os estados a que u leva, quando lido a partir de q ou de q' são ambos de aceitação, ou ambos de rejeição.

Estados equivalentes podem ser unificados em um único, sem que isso afete o comportamento de *M.*

Concluindo o Exemplo

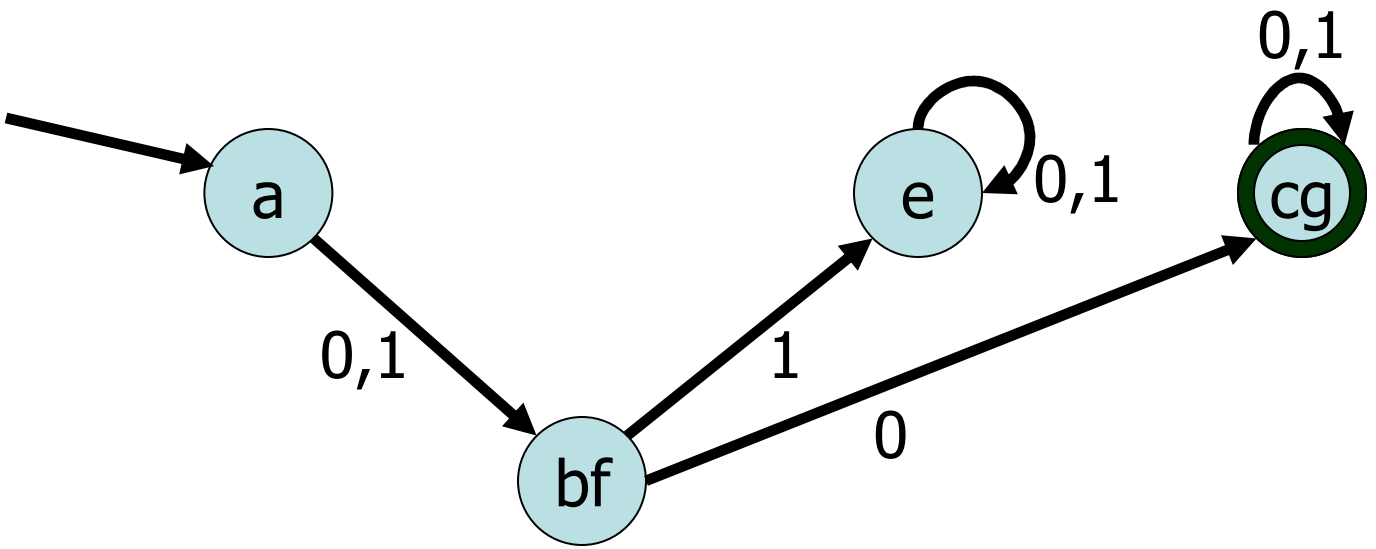
Q: Existem outras maneiras de simplificar o autômato abaixo?



Estados Inúteis

R: Sim: elimine o estado d.

A eliminação de ***estados inúteis*** (inatingíveis a partir do estado inicial) não altera a linguagem aceita.



Algoritmo de Minimização.

DEF: Um autômato é ***irredutível*** se

- Não contém estados inúteis, e
- não contém estados distintos equivalentes.

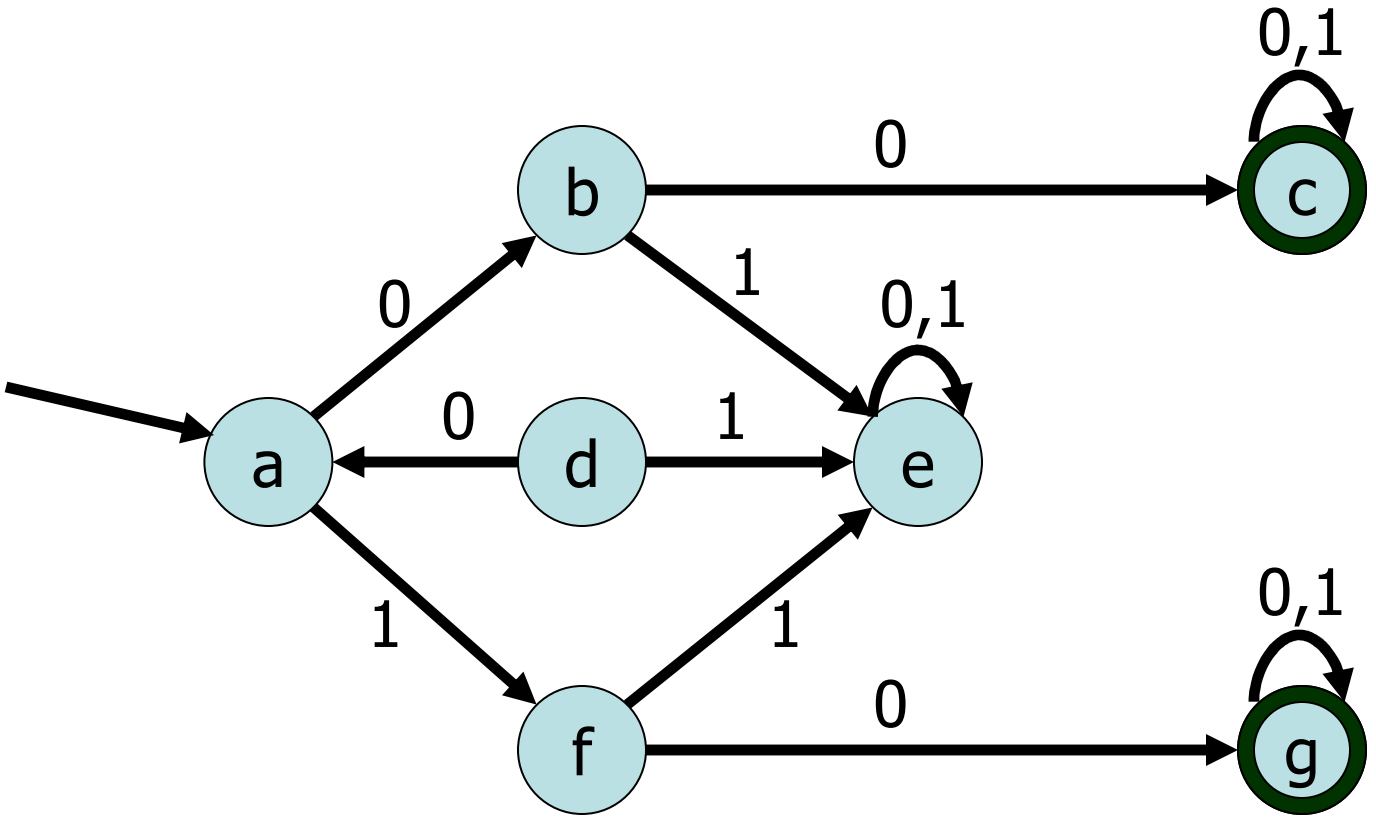
O objetivo do algoritmo de minimização é criar um autômato irredutível a partir de um autômato dado. Pode-se mostrar que esse algoritmo de fato produz o menor AFD possível equivalente ao AFD original. Portanto o nome “minimização”.

O algoritmo de minimização trabalha ao *inverso* do que vimos no exemplo anterior. Começa pelo menor número possível de estados e cria novos estados quando é forçado a isso. Vamos explicar com um jogo:

O Jogo MINIMIZAR

0. Todos os jogadores inúteis são eliminados.
1. O jogo procegue em rodadas.
2. Começa com 2 times: ACEITA vs. REJEITA.
3. Cada rodada consiste de sub-rodadas, uma para cada time.
4. Dois membros de um time **concordam** se, para um dado rótulo, passam o bastão para o mesmo time. Caso contrário, **discordam**.
5. Durante uma sub-rodada, membros que discordam são divididos em novos times maximais de membros concordantes entre si.
6. O jogo TERMINA quando se passa uma rodada sem que nenhum time seja dividido.

O Jogo MINIMIZAR



Algoritmo de Minimização. (Refinamento da Partição)

AFD minimize(AFD (Q, Σ, δ, q_0, F))

remova qq estado q não atingível a partir de q_0

Partition $P = \{F, Q - F\}$

boolean Consistent = false

while(Consistent == false)

Consistent = true

for(every Set $S \in P$, char $a \in \Sigma$, Set $T \in P$)

Set temp = $\{q \in T \mid \delta(q,a) \in S\}$

if (temp != $\emptyset$ && temp != T)

Consistent = false

$P = (P - T) \cup \{\text{temp}, T - \text{temp}\}$

return defineMinimizor((Q, Σ, δ, q_0, F), P)

Algoritmo de Minimização. (Refinamento da Partição)

AFD defineMinimizor(AFD (Q, Σ, δ, q_0, F), Partition P)

Set $Q' = P$

State q'_0 = the set in P which contains q_0

$F' = \{ S \in P \mid S \subseteq F \}$

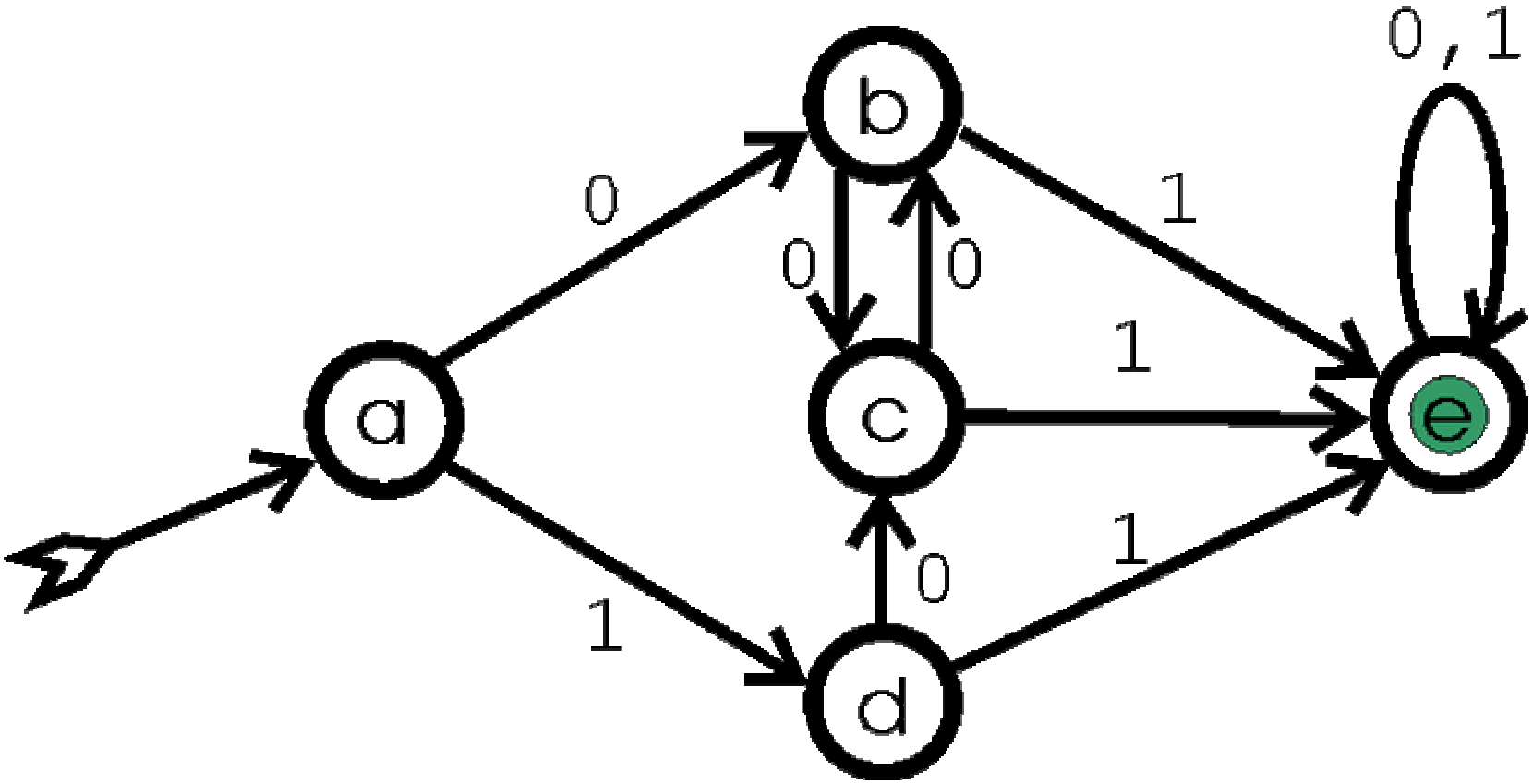
for (each $S \in P$, $a \in \Sigma$)

define $\delta'(S,a)$ = the set $T \in P$ which contains the states $\delta(S,a)$

return (Q', Σ, δ', q'_0, F')

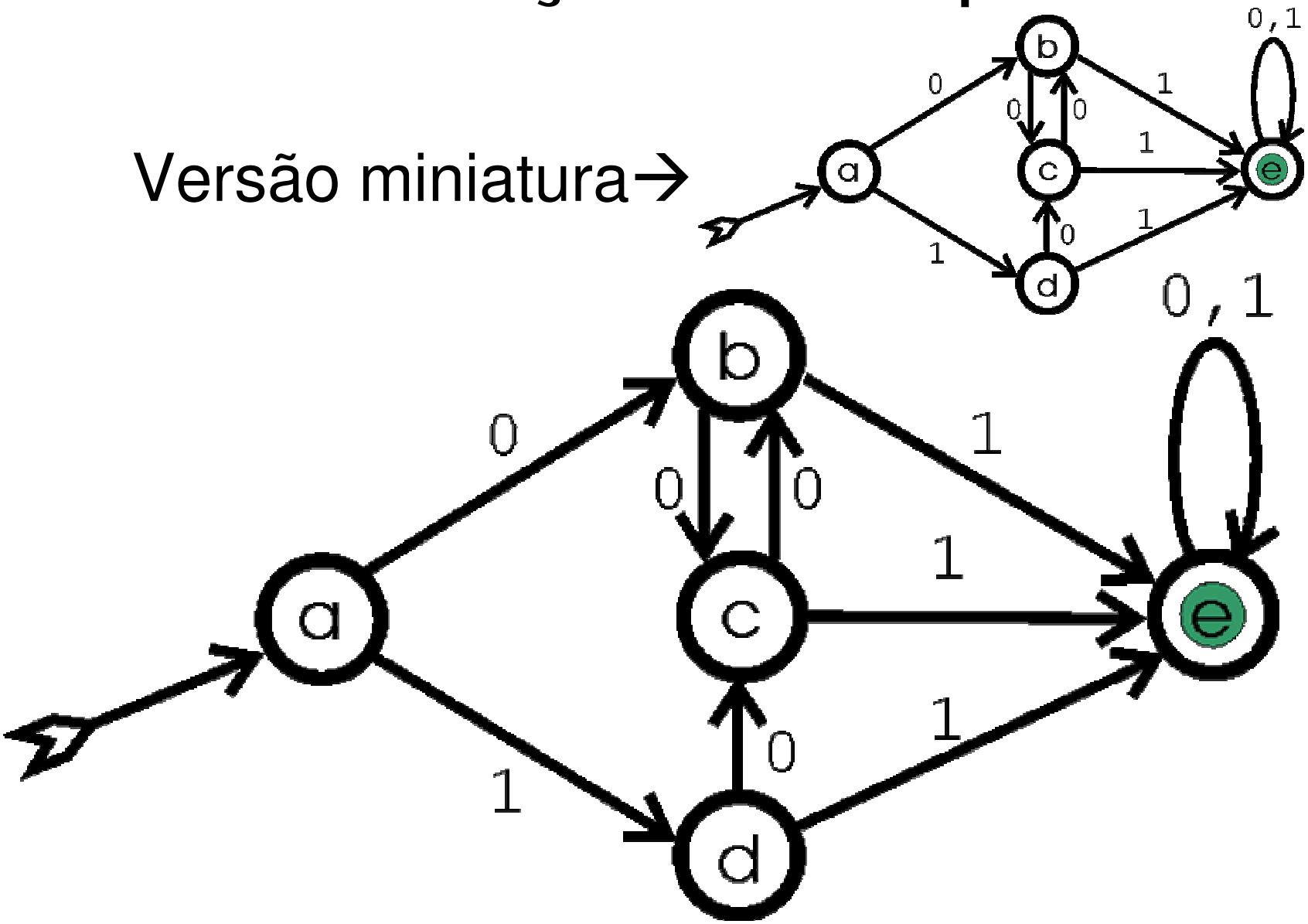
Minimização: Exemplo

Considere o AFD



Minimização: Exemplo

Versão miniatura→



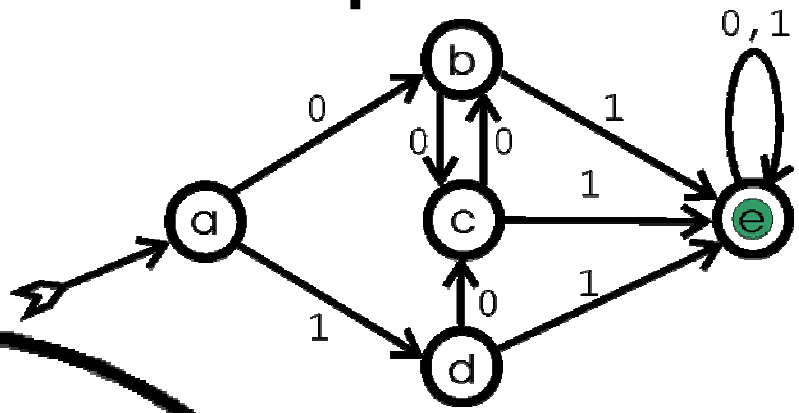
Minimização: Exemplo

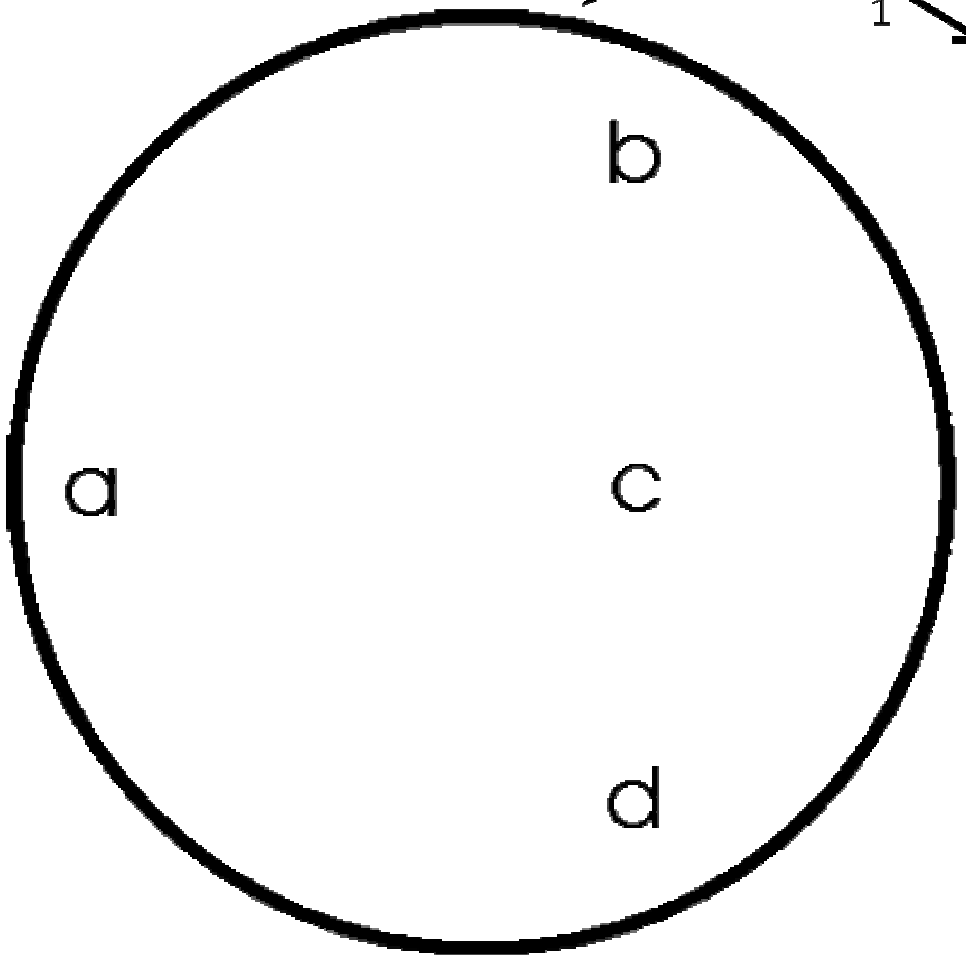
Divida em dois times.

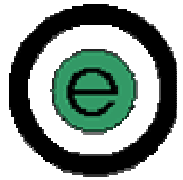
ACEITA

vs.

REJEITA

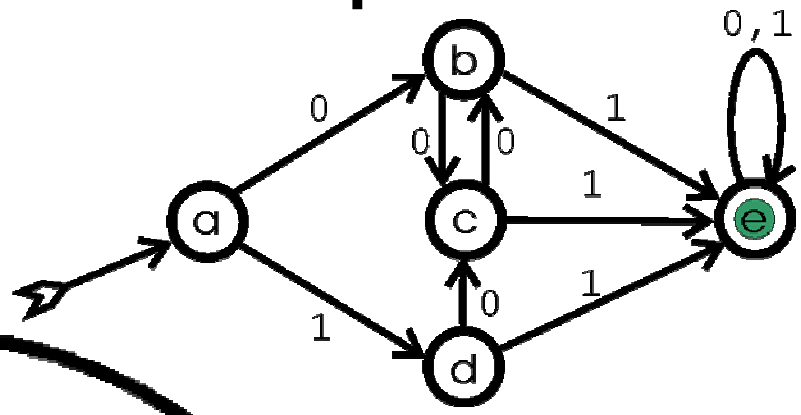


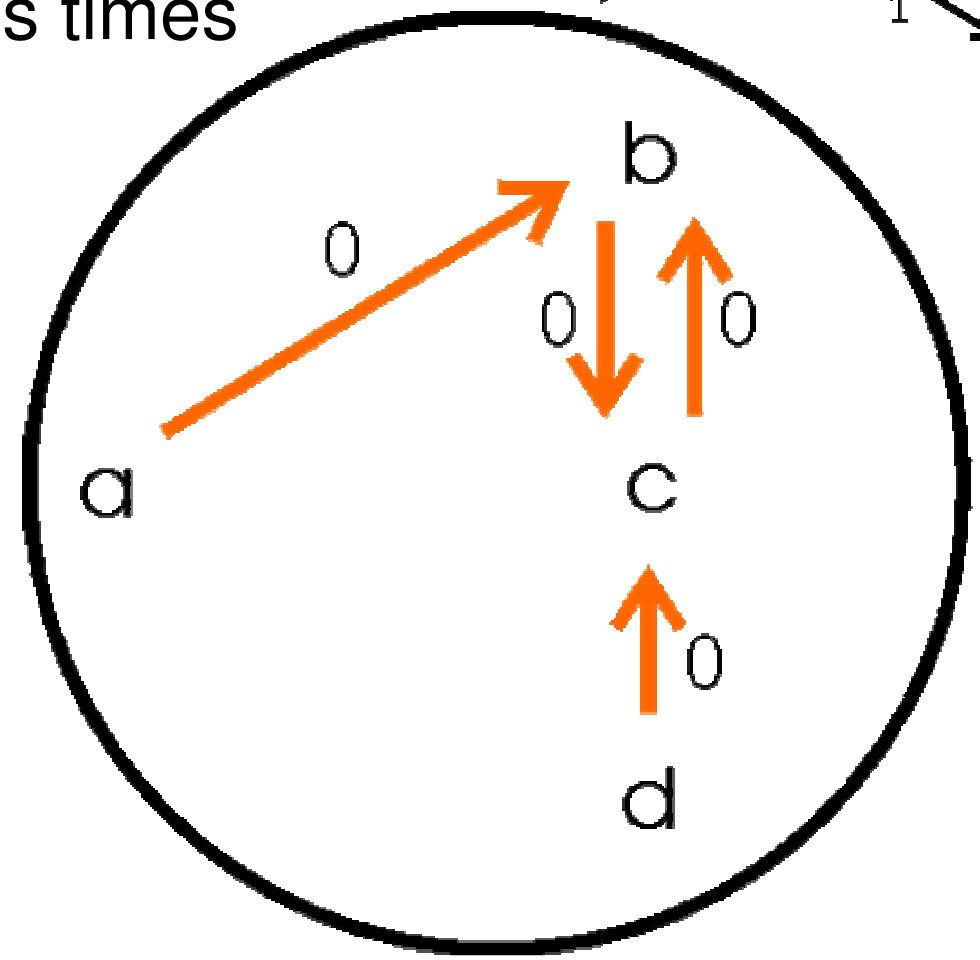




Minimização: Exemplo

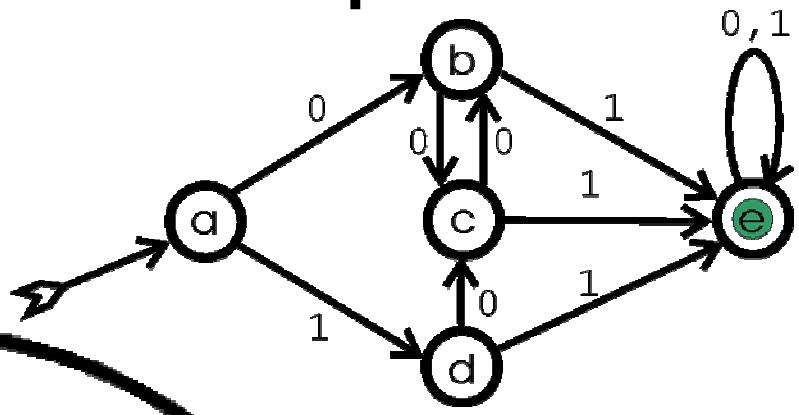
O rótulo 0 não causa divisão nos times

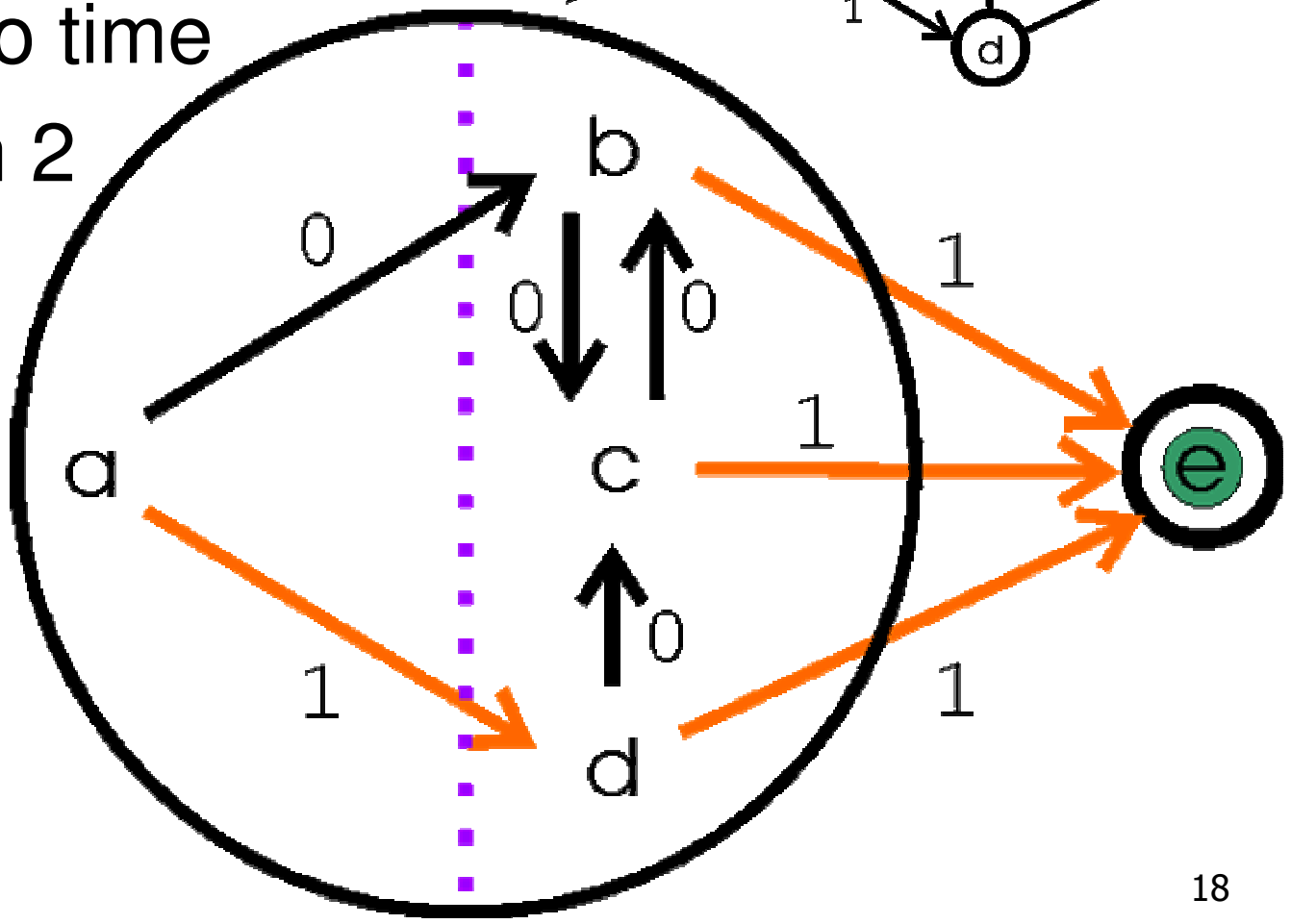




Minimização: Exemplo

O rótulo 1 causa divisão do time maior em 2

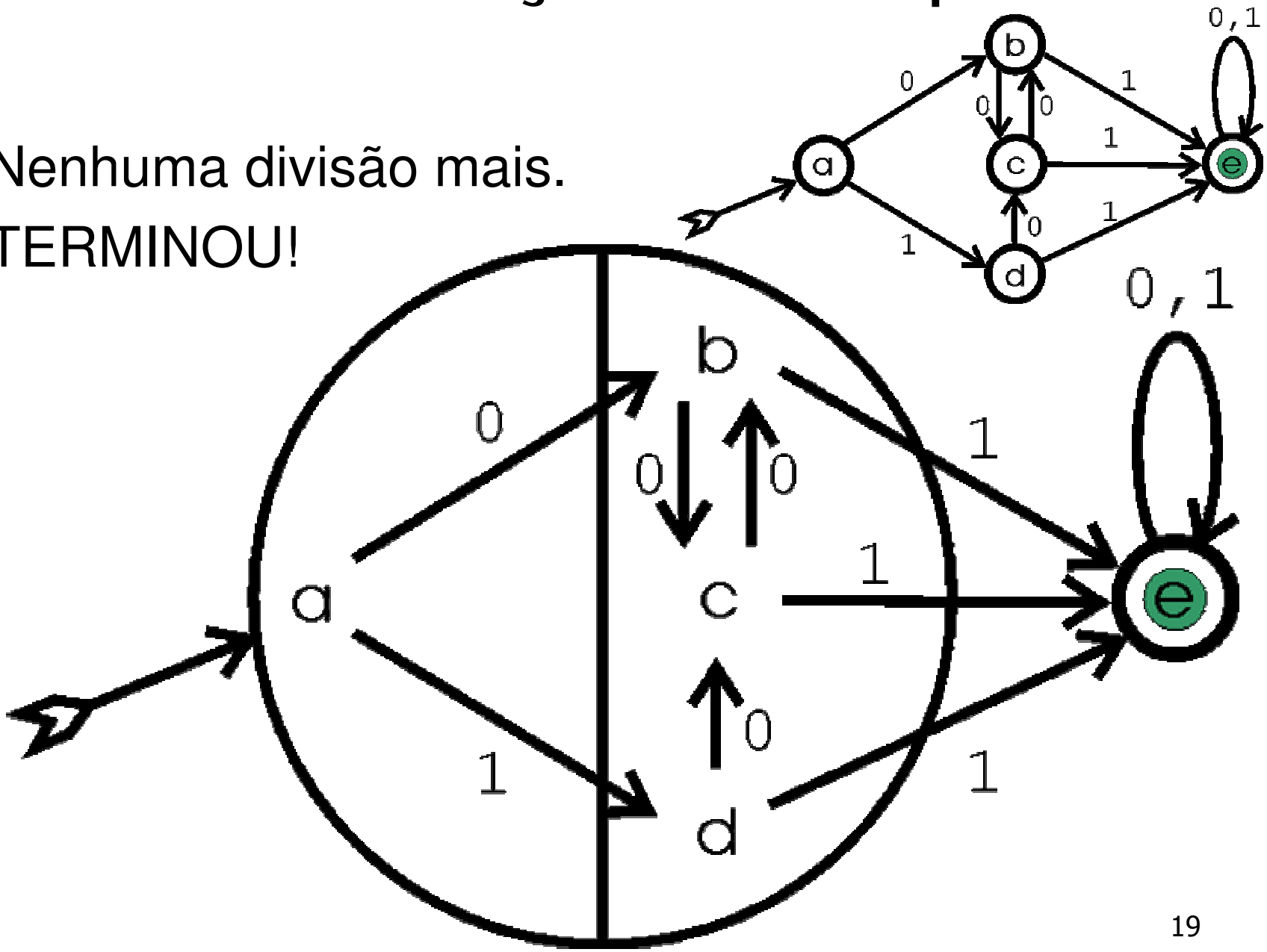




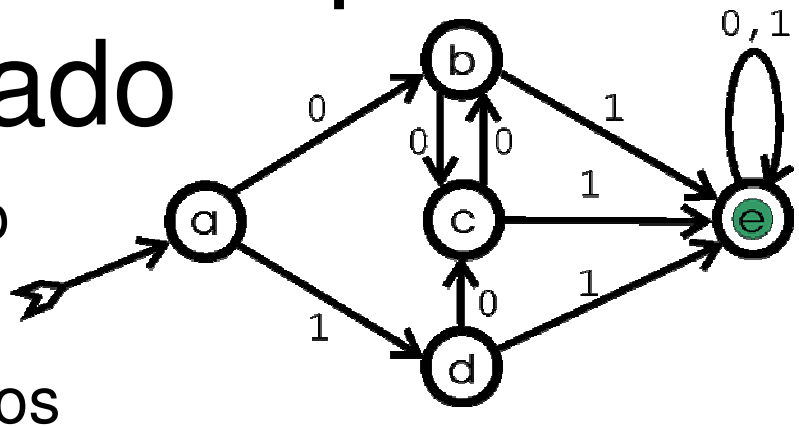
Minimização: Exemplo

Nenhuma divisão mais.

TERMINOU!

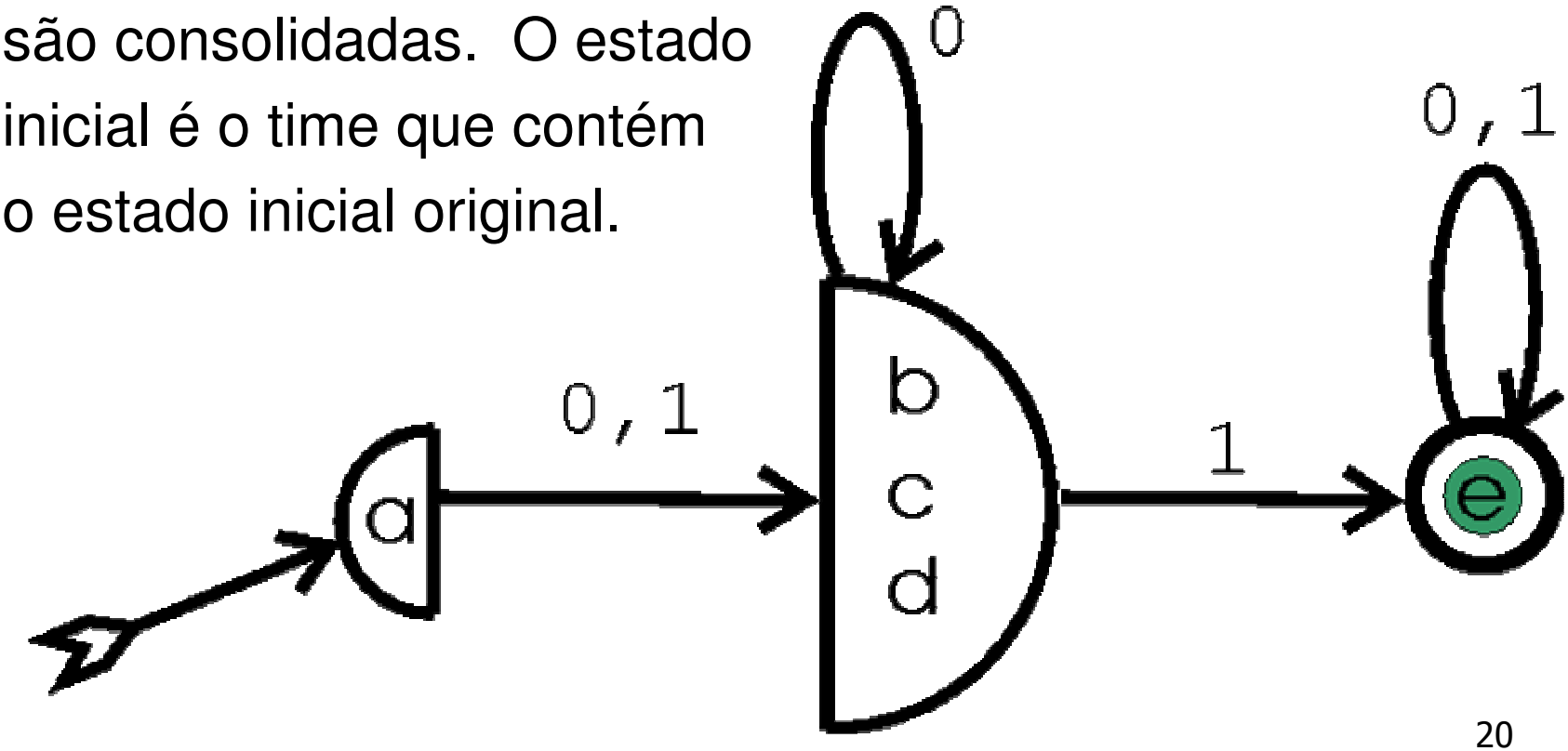


Minimização: Exemplo. Resultado



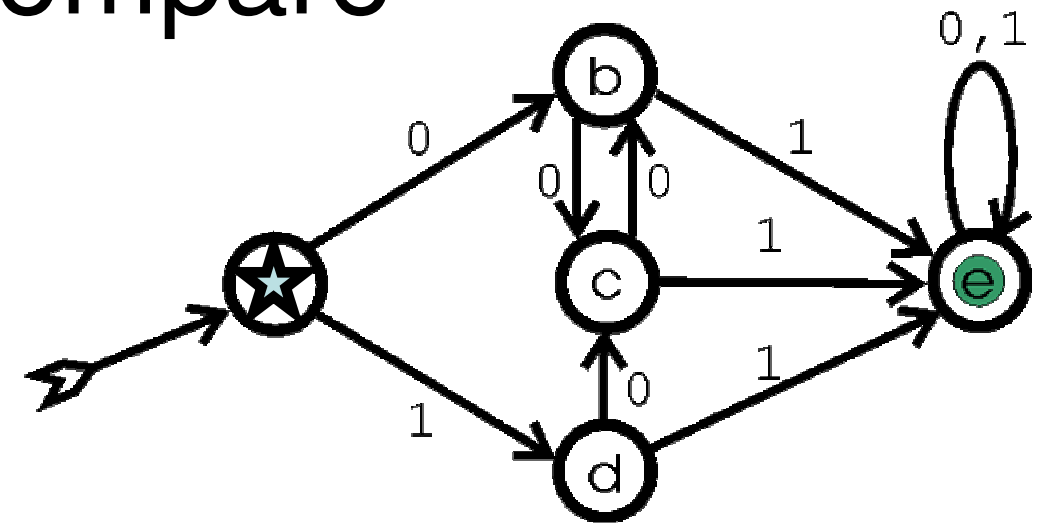
Os estados do autômato mínimo são os times resultantes.

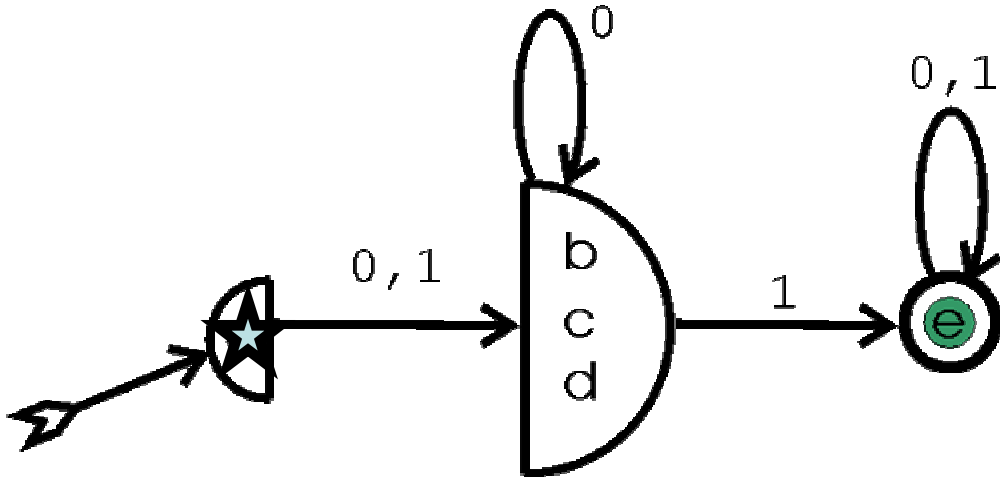
As transições entre esses estados são consolidadas. O estado inicial é o time que contém o estado inicial original.



Minimização: Exemplo. Compare

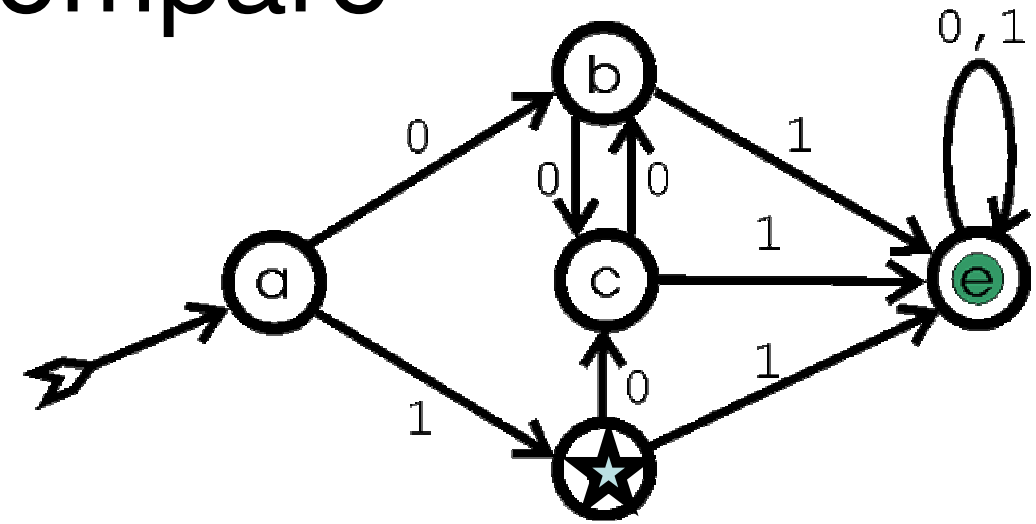
100100101

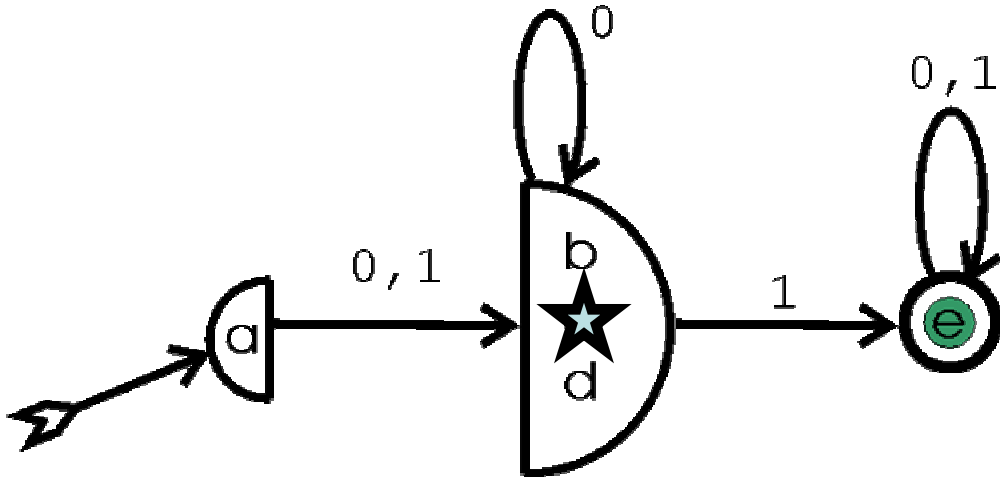




Minimização: Exemplo. Compare

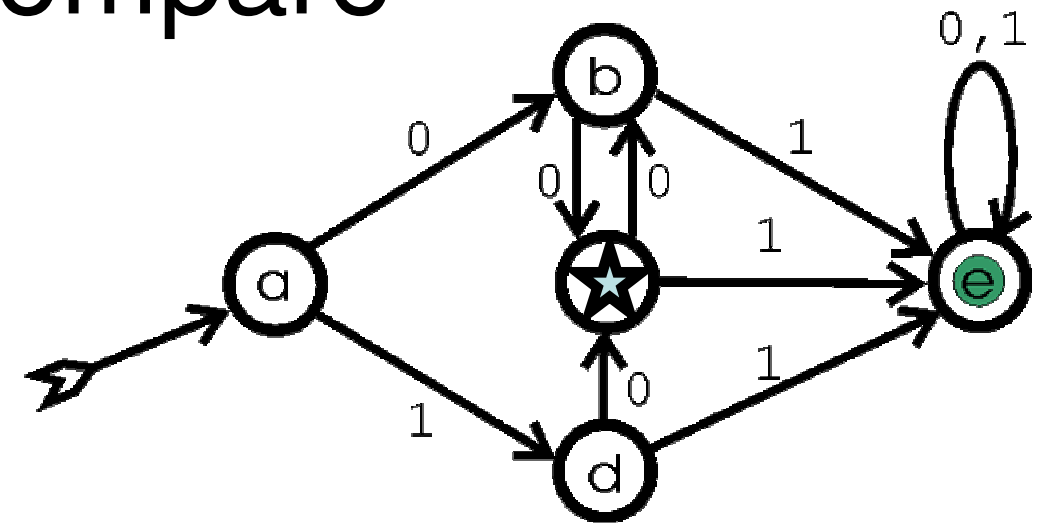
100100101

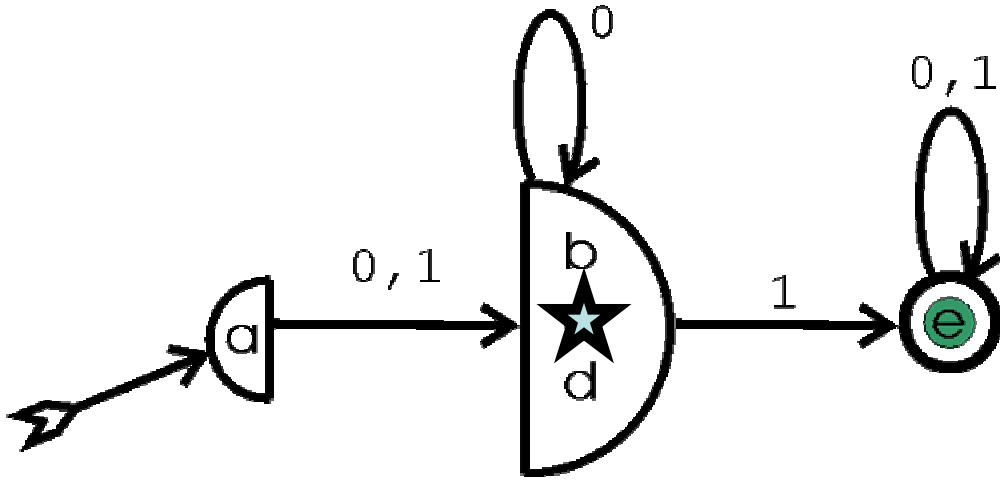




Minimização: Exemplo. Compare

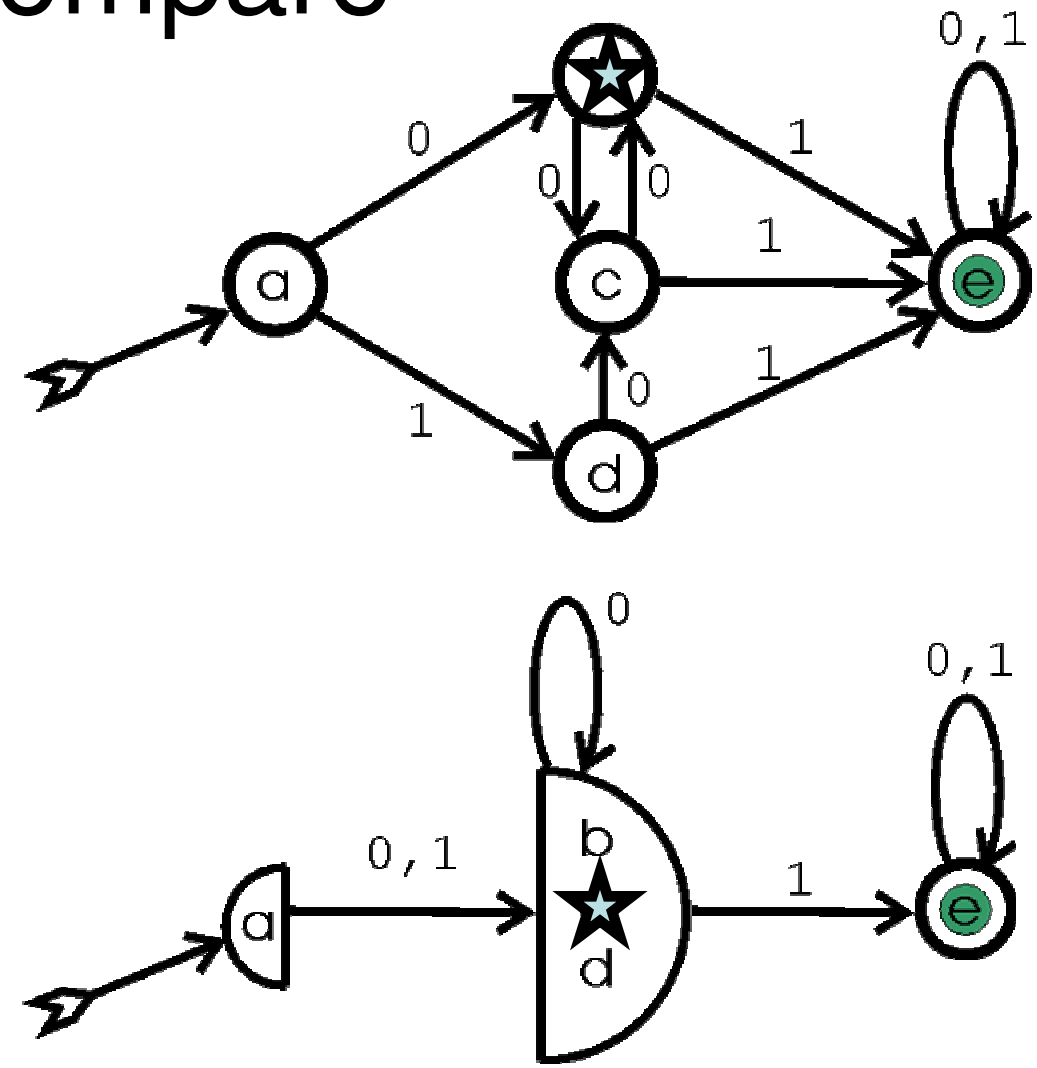
100100101





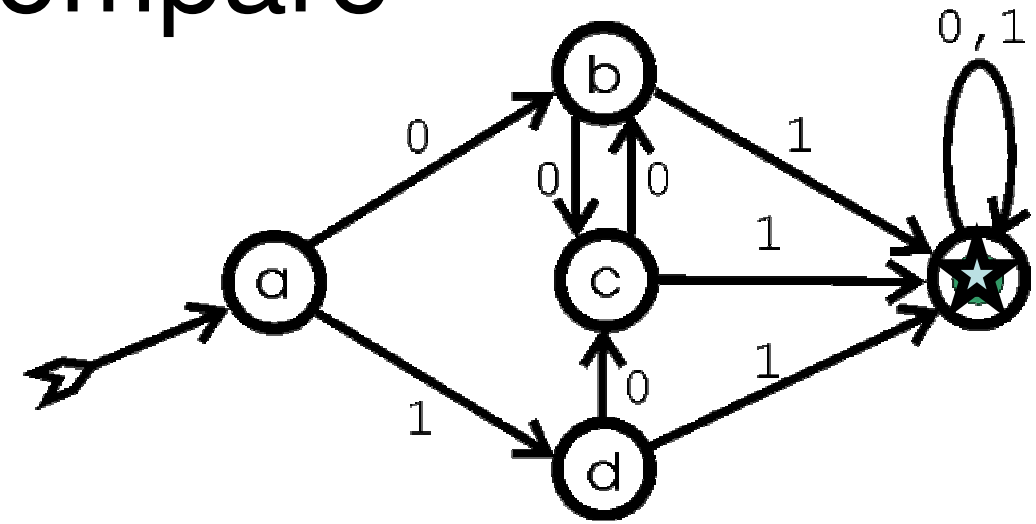
Minimização: Exemplo. Compare

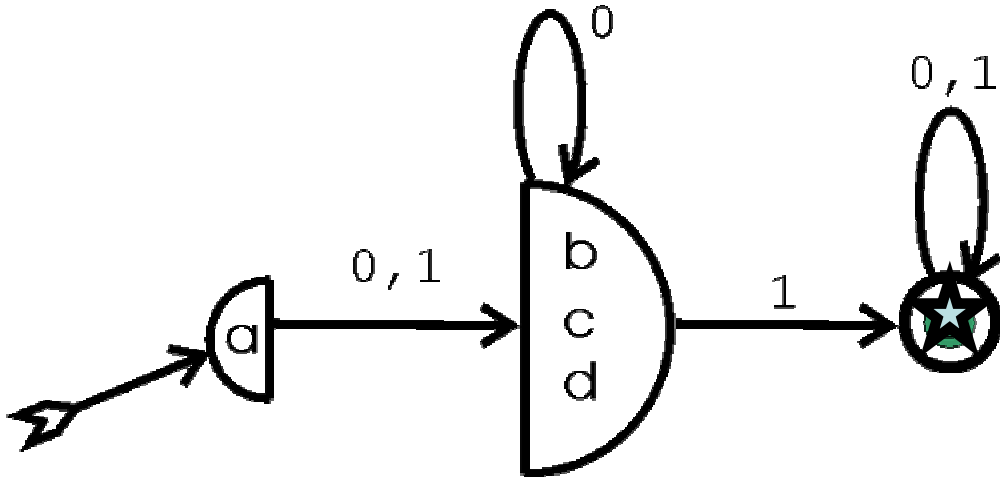
100100101



Minimização: Exemplo. Compare

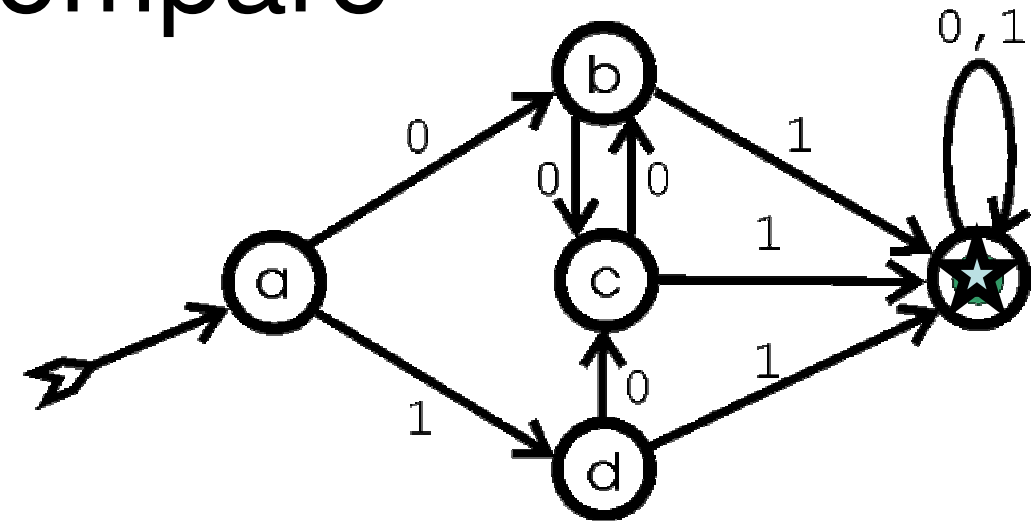
100100101

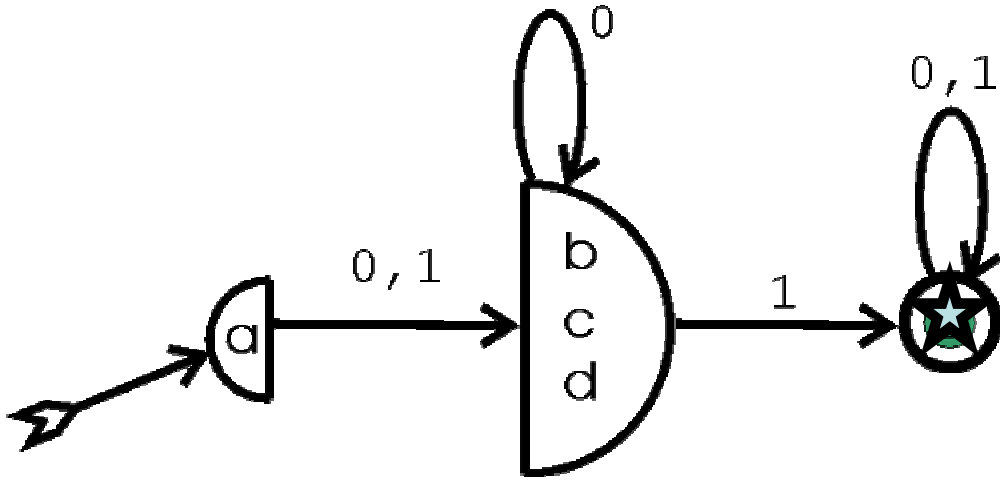




Minimização: Exemplo. Compare

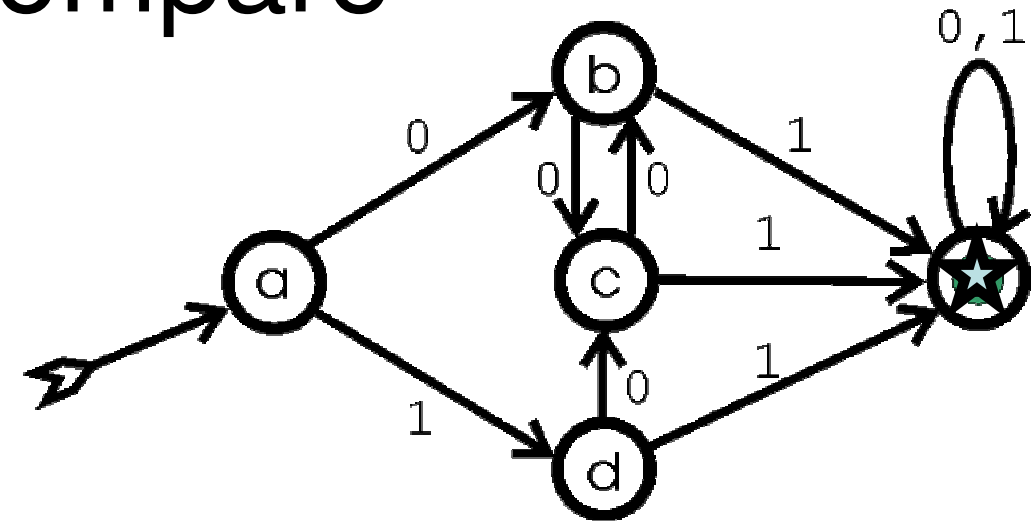
100100101

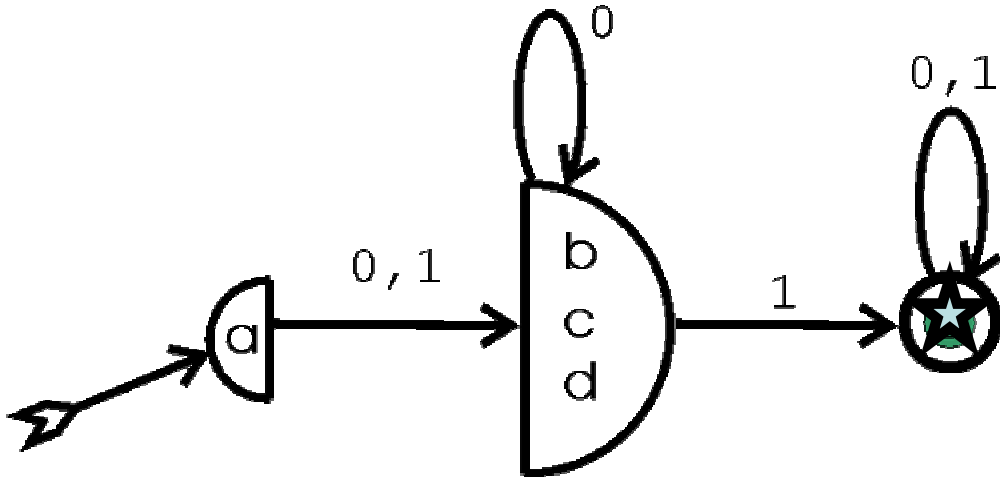




Minimização: Exemplo. Compare

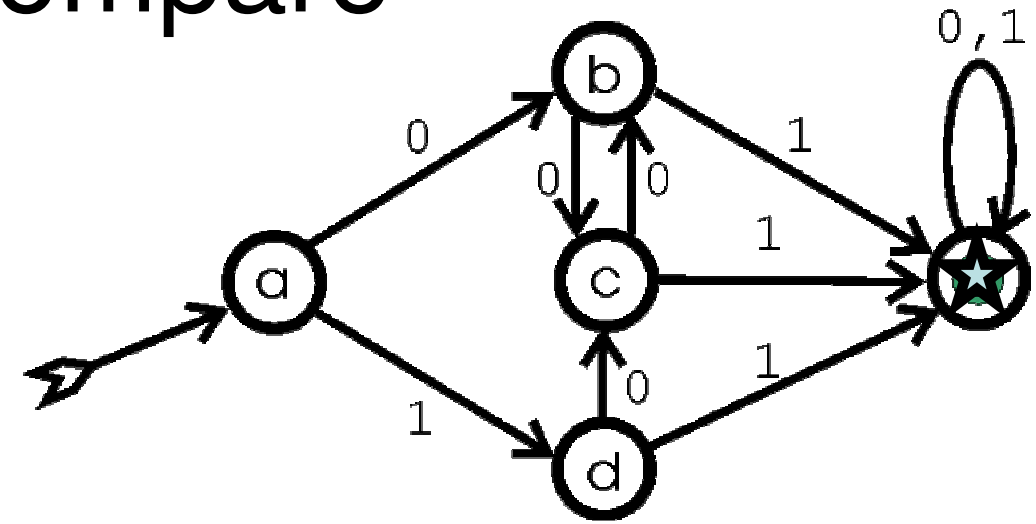
100100101

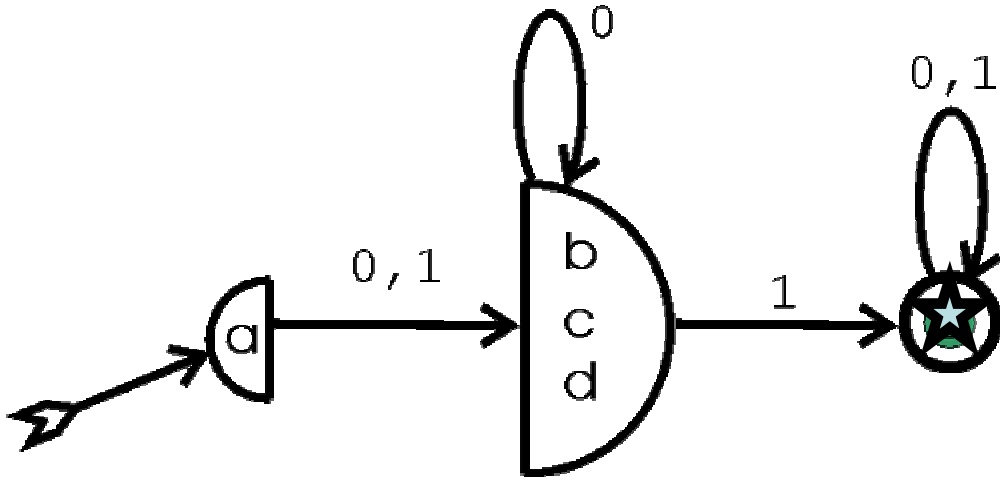




Minimização: Exemplo. Compare

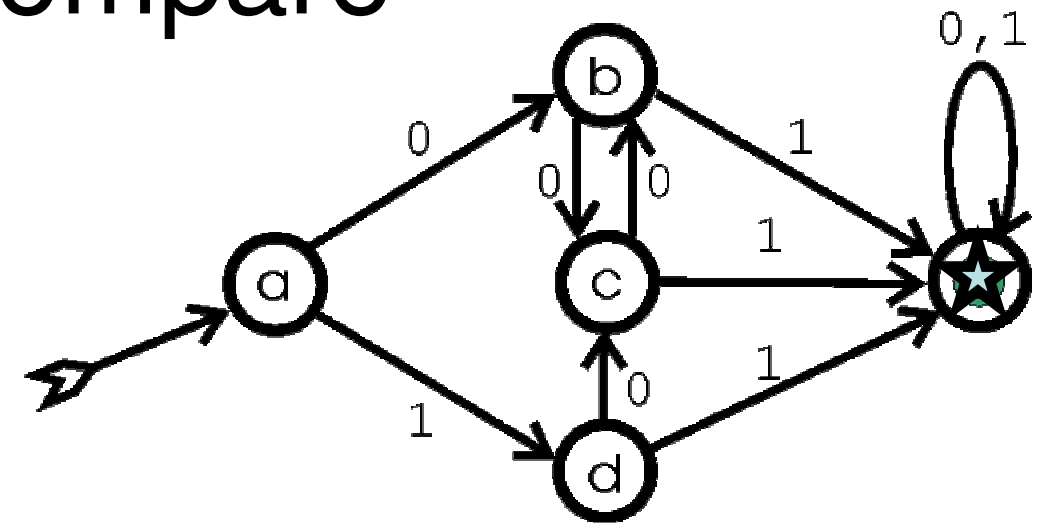
100100101

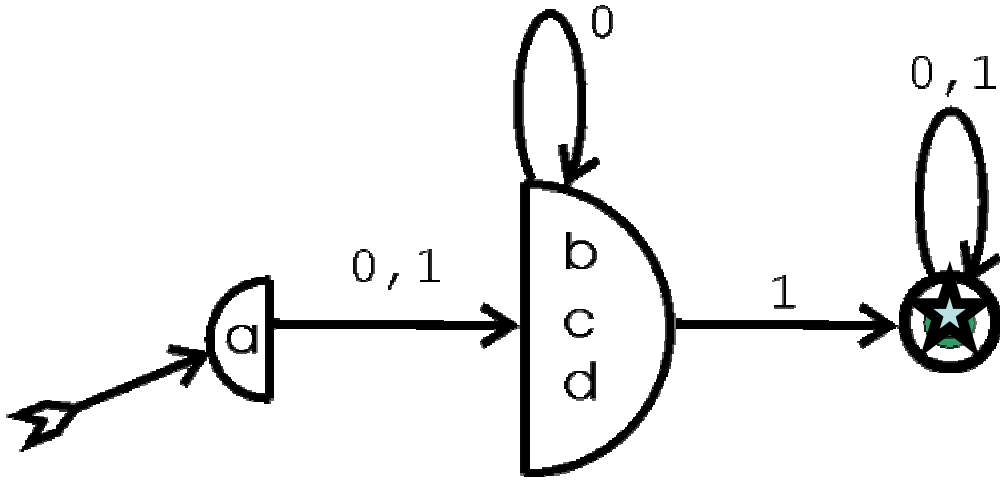




Minimização: Exemplo. Compare

100100101

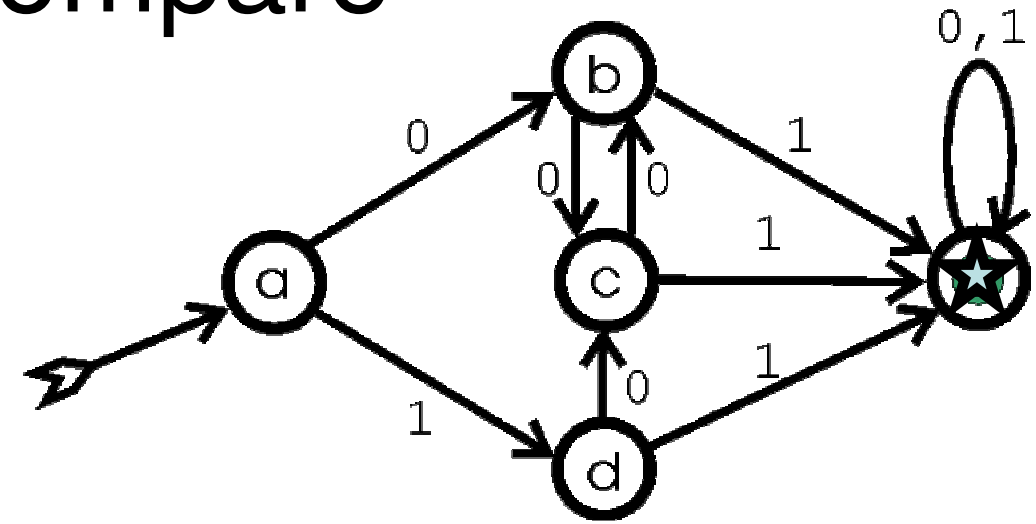


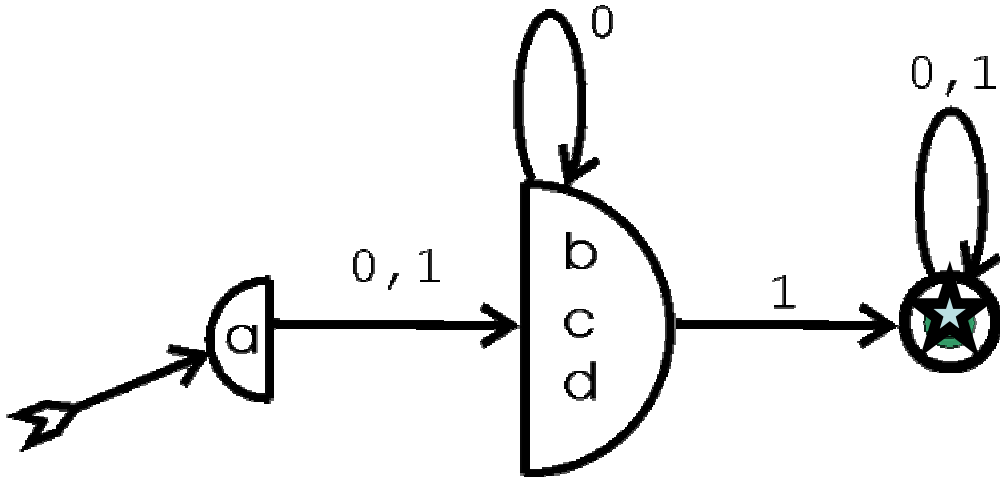


Minimização: Exemplo. Compare

100100101

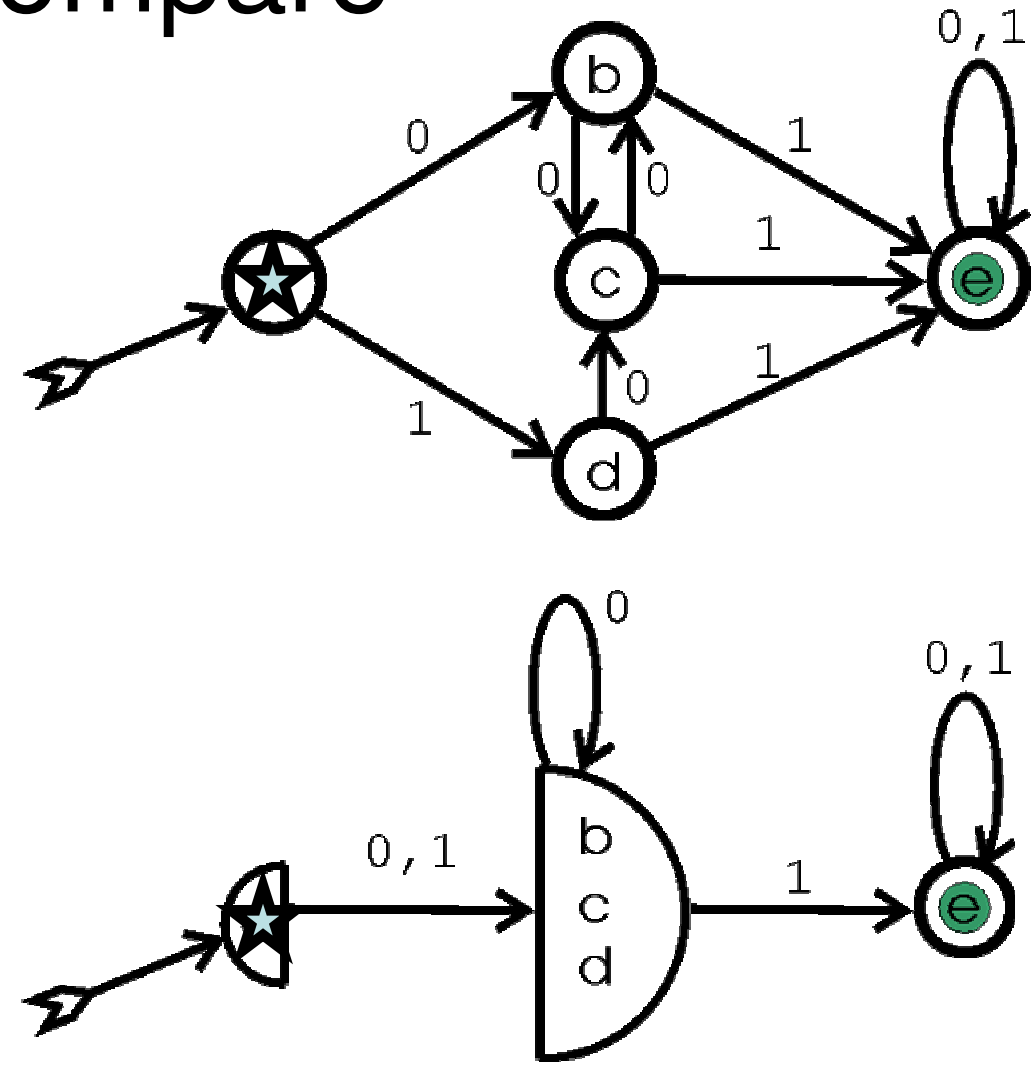
ACEITA.





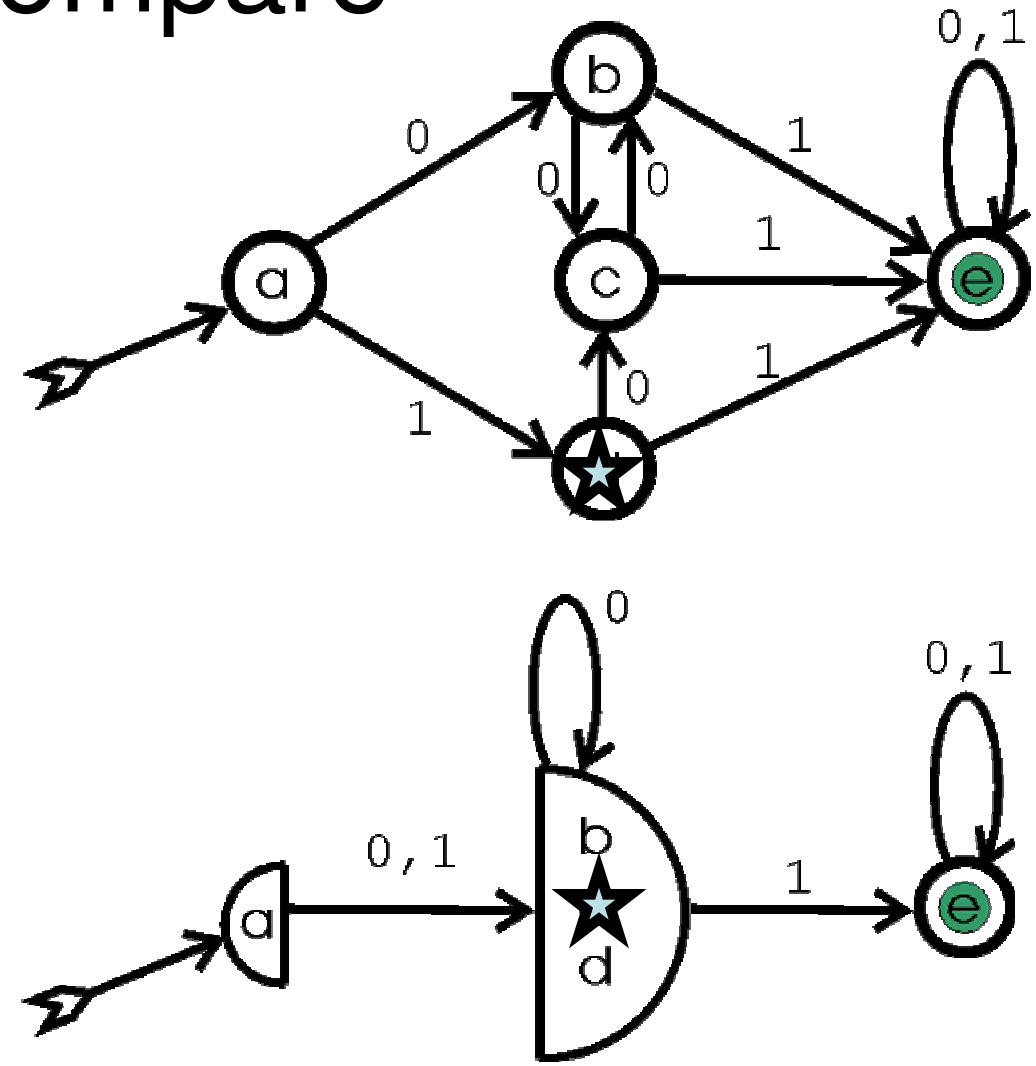
Minimização: Exemplo. Compare

10000



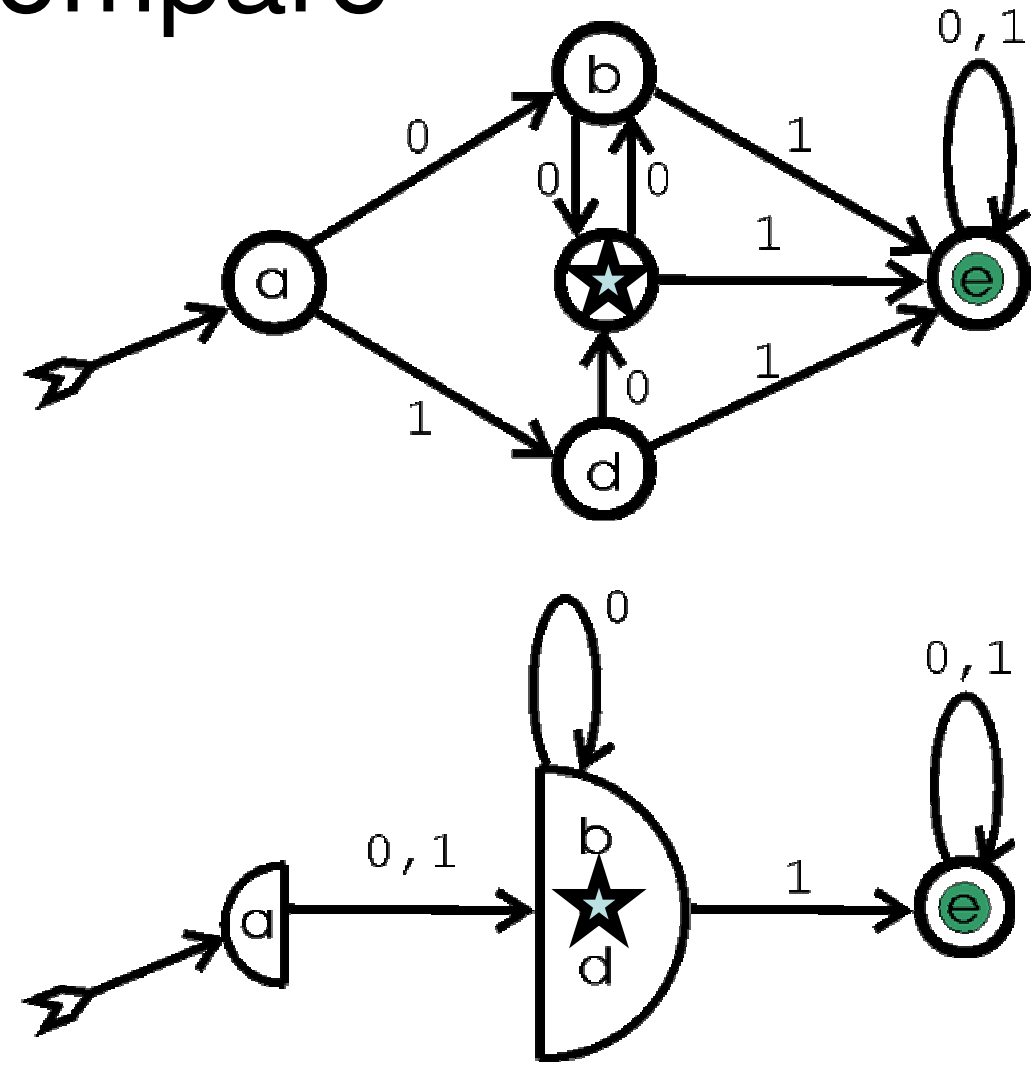
Minimização: Exemplo. Compare

10000



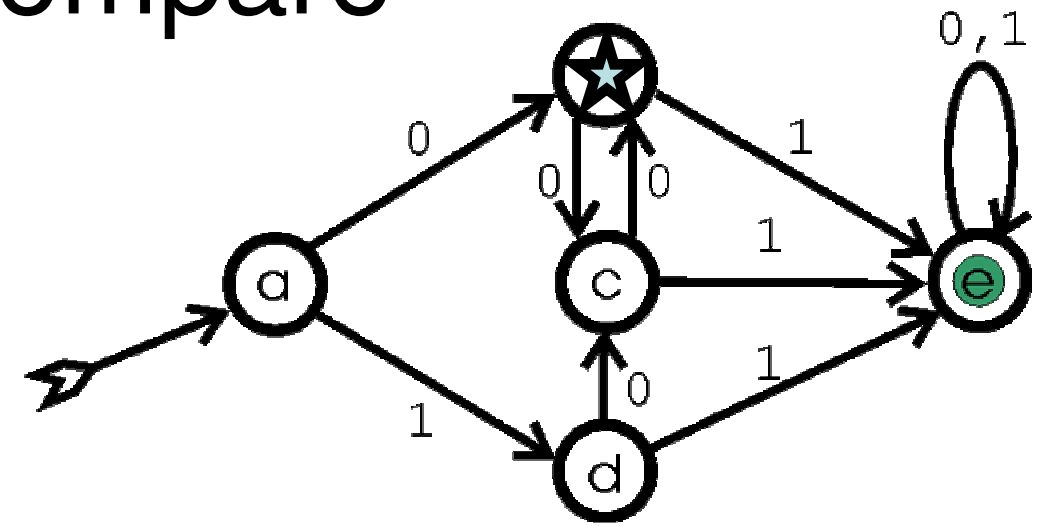
Minimização: Exemplo. Compare

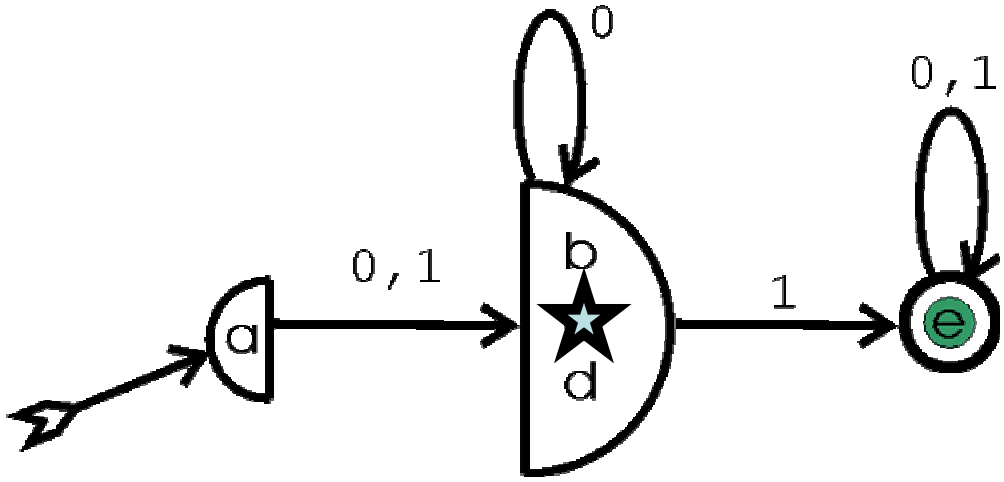
10000



Minimização: Exemplo. Compare

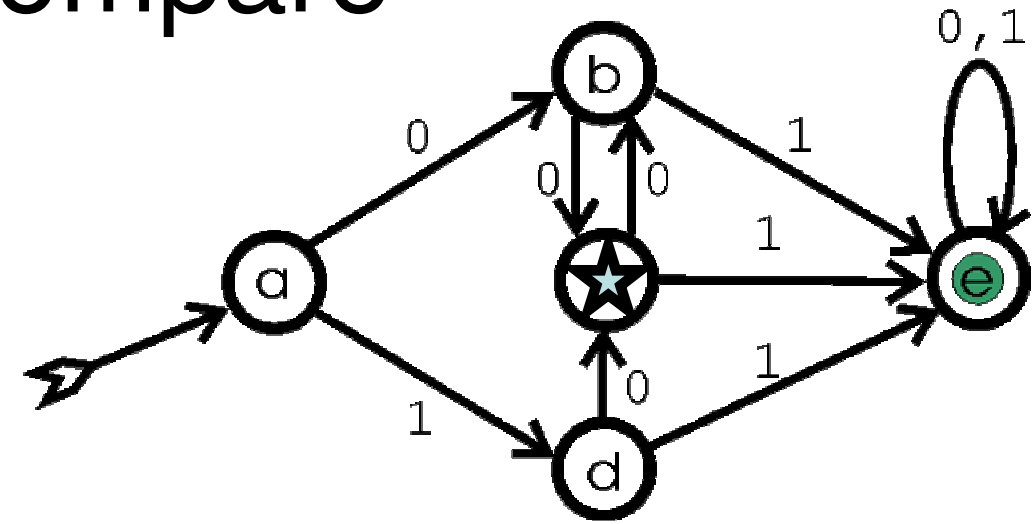
10000

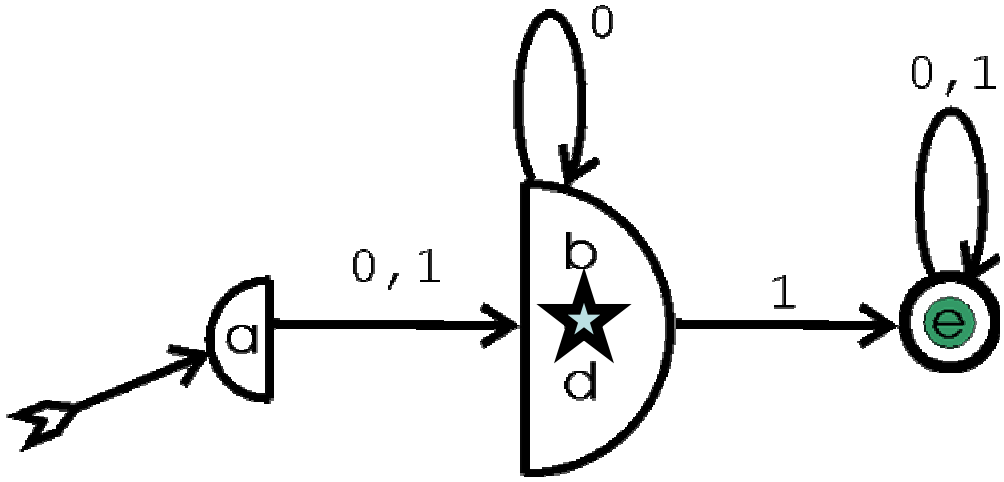




Minimização: Exemplo. Compare

10000

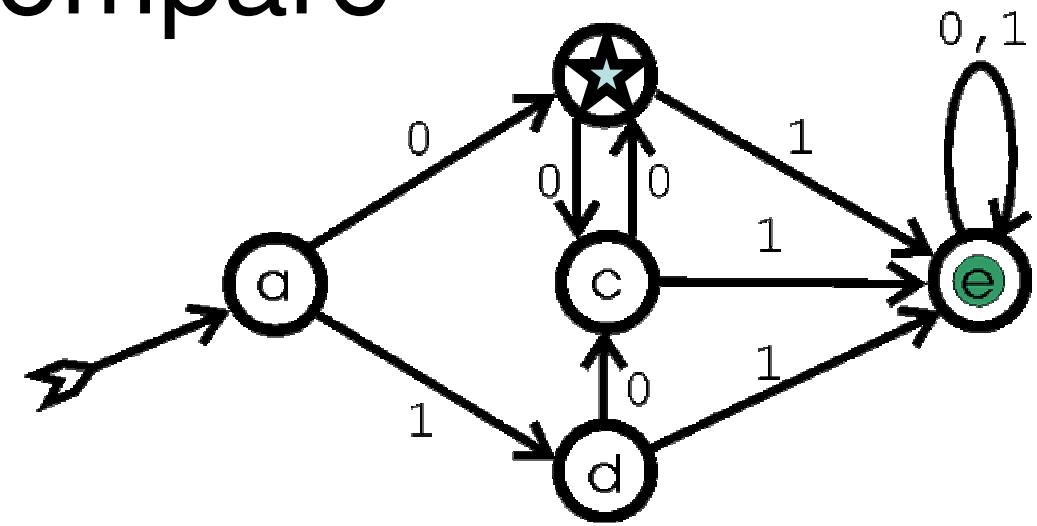


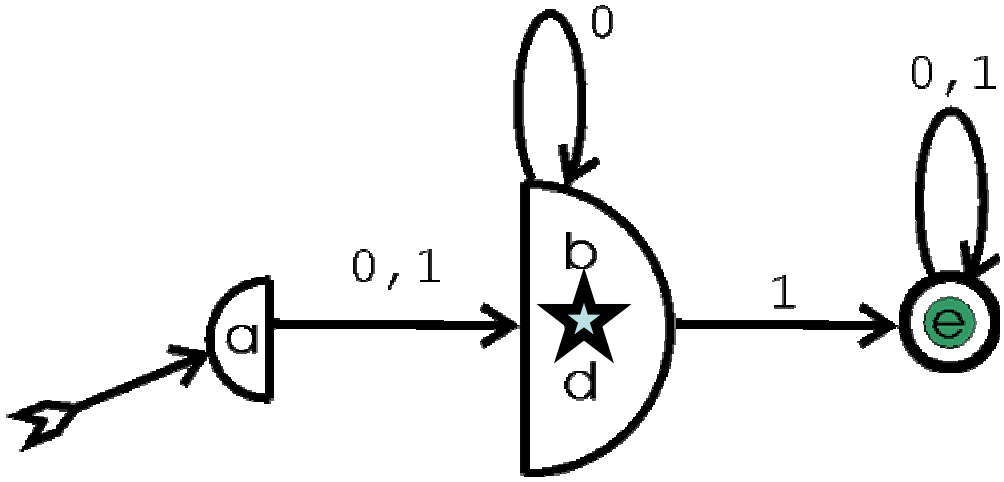


Minimização: Exemplo. Compare

10000

REJEITA.





Minimização: Prova

O algoritmo apresentado produz um AF irredutível. Porque esse AF seria o menor AF possível que reconhece a linguagem aceita pelo AF original?

Questão análoga em cálculo: Por que um mínimo local seria um mínimo global? *Nem sempre* é o caso!

Minimização: Prova

THM (Myhill-Nerode): O algoritmo de minimização produz um autômato mínimo equivalente.

Proof. Vamos mostrar que qq autômato irredutível é mínimo para a linguagem *L* que ele aceita:

Dizemos que strings $u, v \in \Sigma^*$ são ***indistinguíveis*** se para todo sufixo *x*, $ux \in L$ sse $vx \in L$.

Note que se *u* e *v* *são* distinguíveis, os caminhos, a partir do estado inicial, rotulados por *u* e por *v* devem terminar em estados diferentes.

Minimização: Prova

Consequentemente, o número de estados em um AFD para *L* deve ser pelo menos igual ao ao número de strings mutuamente distinguíveis de *L*.

Mas um AFD irredutível tem a propriedade de que todo estado dá origem a outro string mutuamente distinguível do anterior!

Portanto, qq outro AFD para *L* deve ter pelo menos tantos estados quantos os de um AFD irredutível.

Vejamos como essa prova funciona:

Minimização: Prova. Exemplo

A “spanning tree” dos strings {ε,0,01,00} é um conjunto de estados mutuamente distinguíveis (caso contrário ocorreria redundância, AFD teria sido reduzido).

Qualquer outro AFD para *L* tem ≥4 estados.