Autômato Finito Não Determinístico

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

- Um AFN é uma quíntupla $(Q, \Sigma, \delta, I, F)$, onde:
  - Q é um conjunto finito de um ou mais de estados;
  - Σ é um alfabeto;
  - I, um subconjunto de Q, é um conjunto não vazio de estados iniciais;
  - F, um subconjunto de Q, é o conjunto de estados finais;
  - δ, a função de transição, é uma função total de $Q \times \Sigma$ para $\wp(Q)$.
- Observe que um AFD é um caso particular de AFN.

Exemplo AFN

- $(\{e_1, e_2\}, \{0,1\}, \delta, \{e_1\}, \{e_2\})$, em que δ é

δ	0	1
e_1	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1\}$
e_2	$\varnothing$	δ

Função de transição estendida

- Seja um AFN *M=(Q, Σ, δ, I, F)*. A função de transição estendida $\hat{\delta}$, é uma função de $\wp$(Q) x Σ* para $\wp$(Q), definida recursivamente como:

$\hat{\delta}(\phi, w) = \phi$ para todo w ∈ Σ*

$\hat{\delta}(A, \varepsilon) = A$ para todo A ⊆ Q

$\hat{\delta}(A, ay) = \hat{\delta}(\cup_{q \in A} \delta(q, a), y)$ para todo A ⊆ Q , a ∈ Σ e y ∈ Σ*.

$$L(M) = \{w \in \sum{}^* \mid \hat{\delta}(I, w) \cap F \neq \phi\}$$

Exercícios

- Construa AFNs para as seguintes linguagens:

1. $\{0,1\}^*\{1010\}$, $\Sigma = \{0,1\}$
2. $\{0,00\}\{11\}^*$, $\Sigma = \{0,1\}$
3. $\{a,b,c\}^*\{abc\}\{a,b,c\}^*$, $\Sigma = \{a,b,c\}$
4. $\{a,b,c\}^* \{abc,bca\}$, $\Sigma = \{a,b,c\}$

AFN → AFD

Construção de subconjuntos de estados

Dado um AFN $N = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, o AFD equivalente é

$M(N) = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ onde

- O conjunto de estados de M é o *conjunto potência* de Q : $Q' = P(Q)$={todos os subconjuntos de Q}
- Cada estado de aceitação de M consiste de um subconjunto que contém um estado de aceitação. I.e. $F' = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$
- O estado inicial de M é o conjunto $q_0' = I$

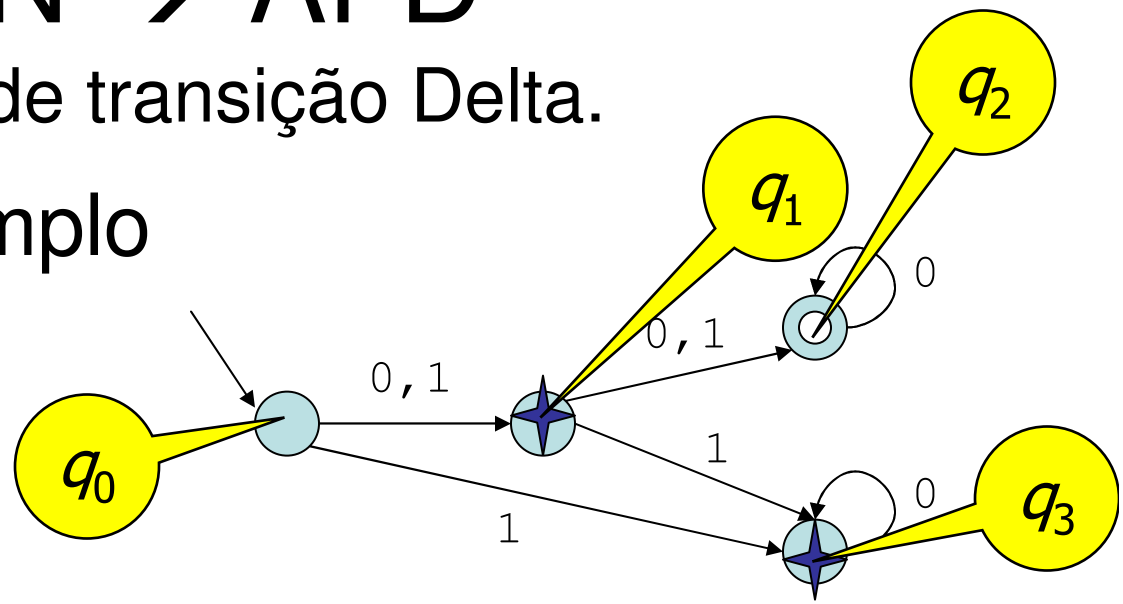
a função δ' é descrita a seguir:

AFN → AFD

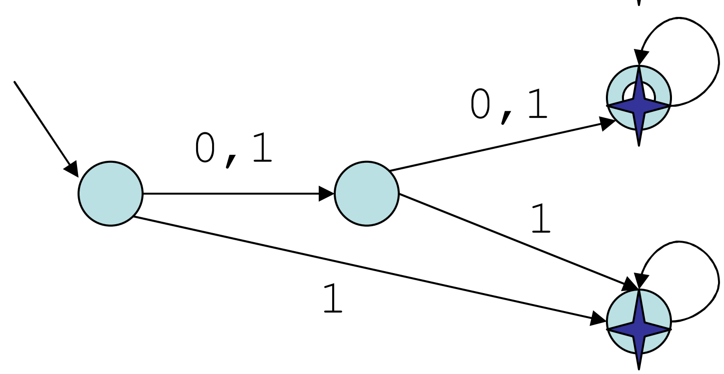
Função de transição Delta.

Considere o exemplo

Antes de ler 1:



Depois de ler 1:



Q: Porque $\delta'(\{q_1,q_2\},1) = \{q_2,q_3\}$?

AFN → AFD

Função de transição Delta.

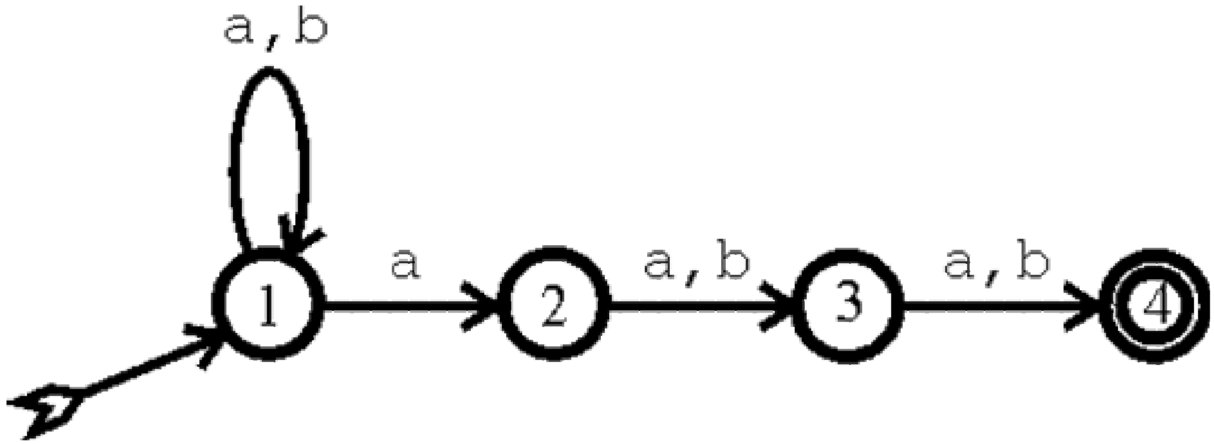
De modo geral temos:

$$\delta'(S,a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q,a) = \{q' \in Q \mid \exists q \in S, q' \in \delta(q,a)\}$$

Isso completa a definição formal da construção do AFD cujos estados são subconjuntos de estados do AFN original.

AFN → AFD: na prática.

Vamos ver como o procedimento de conversão funciona na prática.

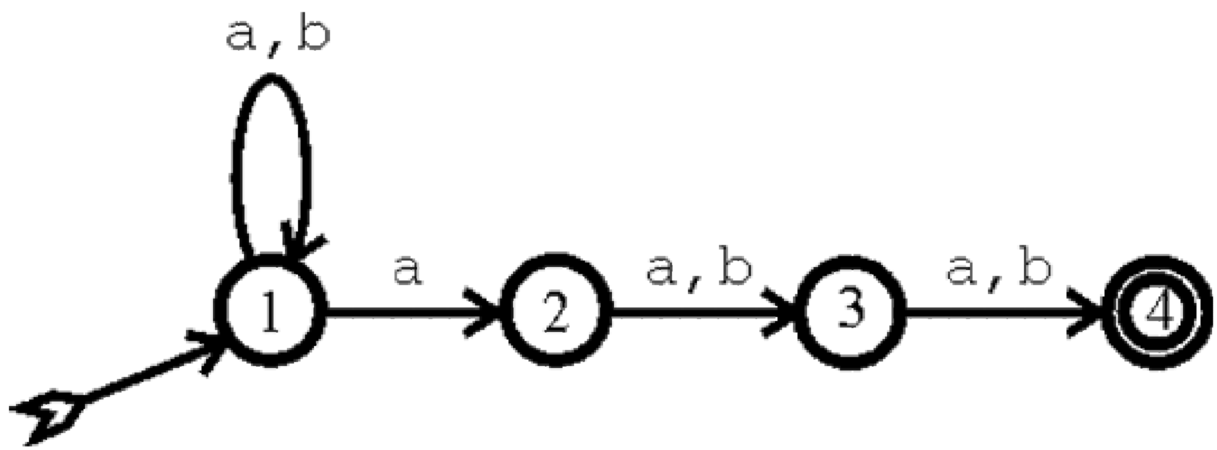


Q1: Qual é a linguagem aceita pelo AFN?

Q2: Quantos estados tem o AFD correspondente nesse caso?

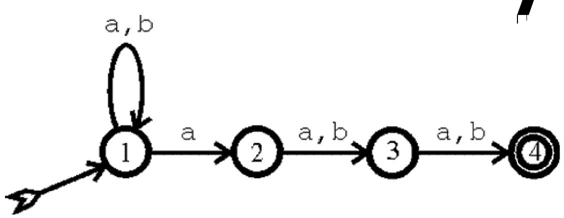
AFN → AFD: na prática.

R1: $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid 3^{o.}$ bit de x a partir da direita é a$\}$



R2: $16 = 2^4$ estados.

É um número bastante grande! Seria bom se pudermos construir apenas os estados úteis, i.e., aqueles atingíveis a partir do estado inicial.

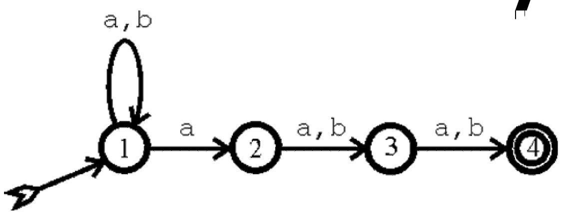


AFN → AFD: na prática.

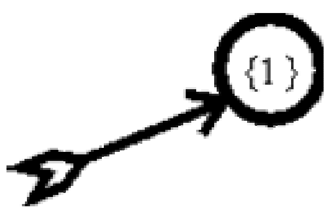
Podemos de fato construir apenas os estados de que precisamos. Começando a partir do estado inicial, fazemos uma pesquisa em largura sobre o grafo!

O primeiro estado será {1}:

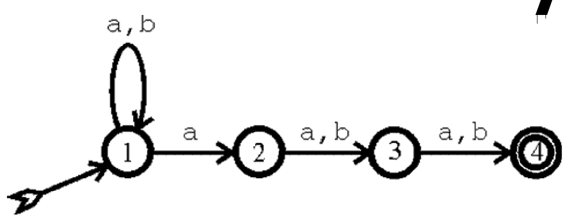
AFN → AFD: na prática.



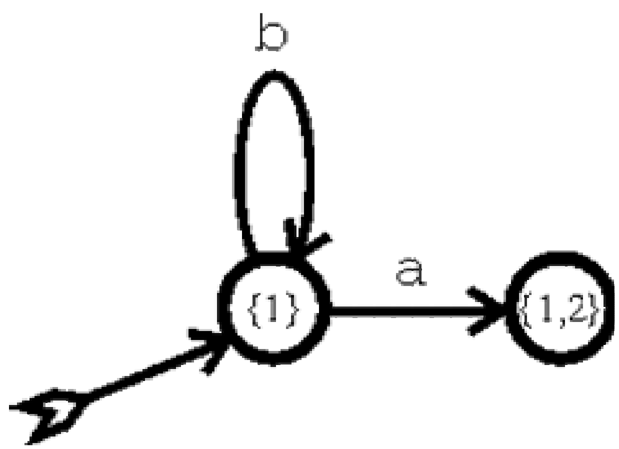
Comece com {1}:



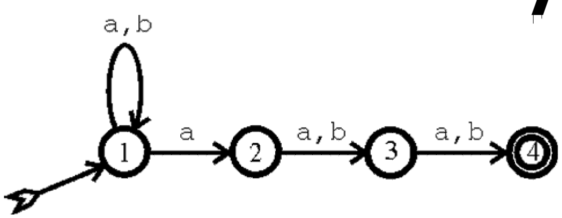
AFN → AFD na prática.



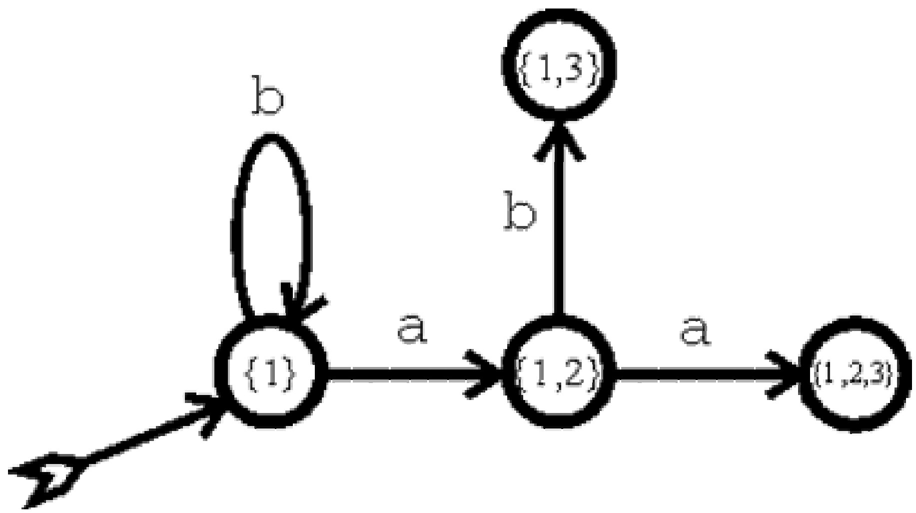
Prossiga: note que $\delta(1,a) = \{1,2\}$.



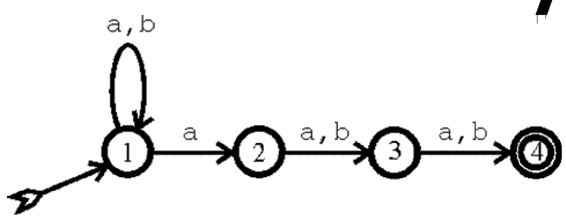
AFN → AFD na prática.



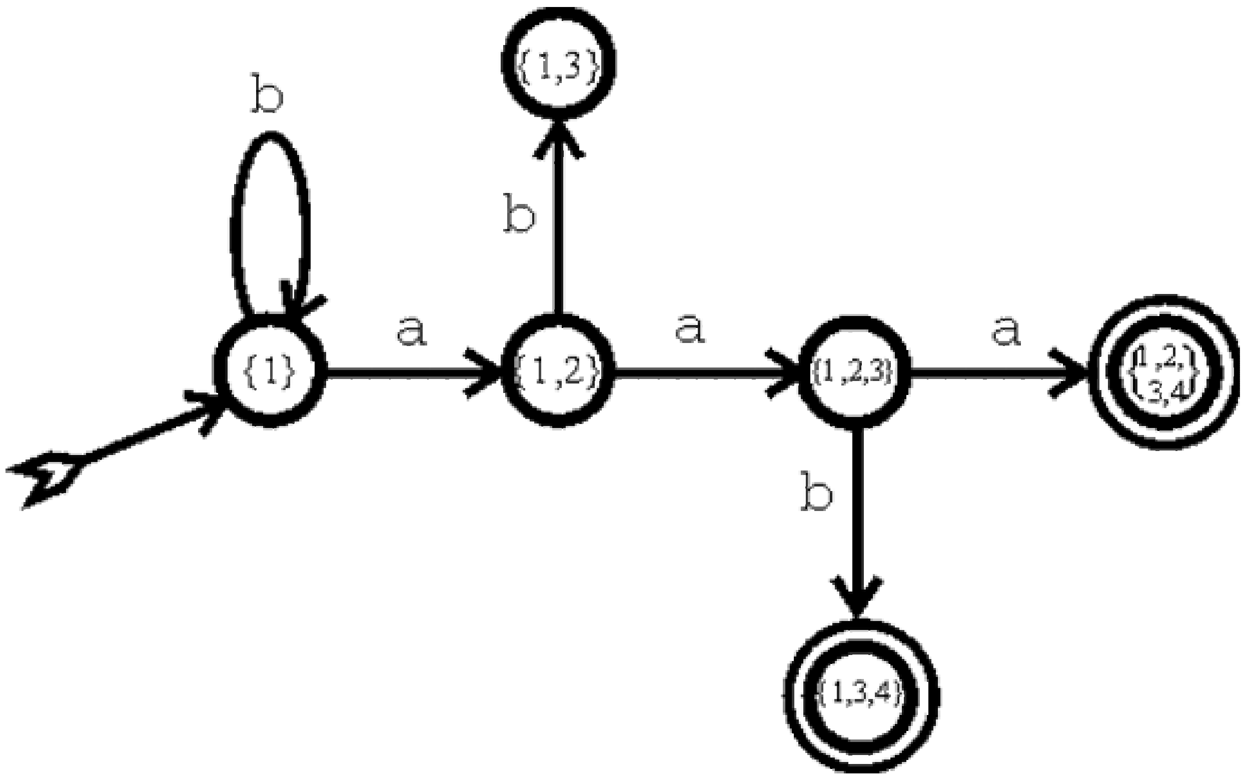
Prossiga: note que $\delta'(\{1,2\},a) = \{1,2,3\}$.



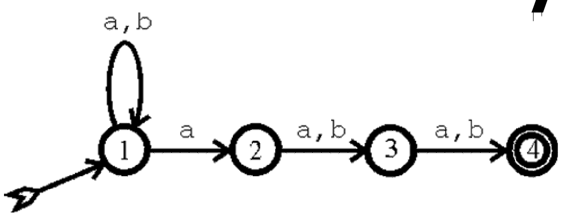
AFN → AFD na prática.



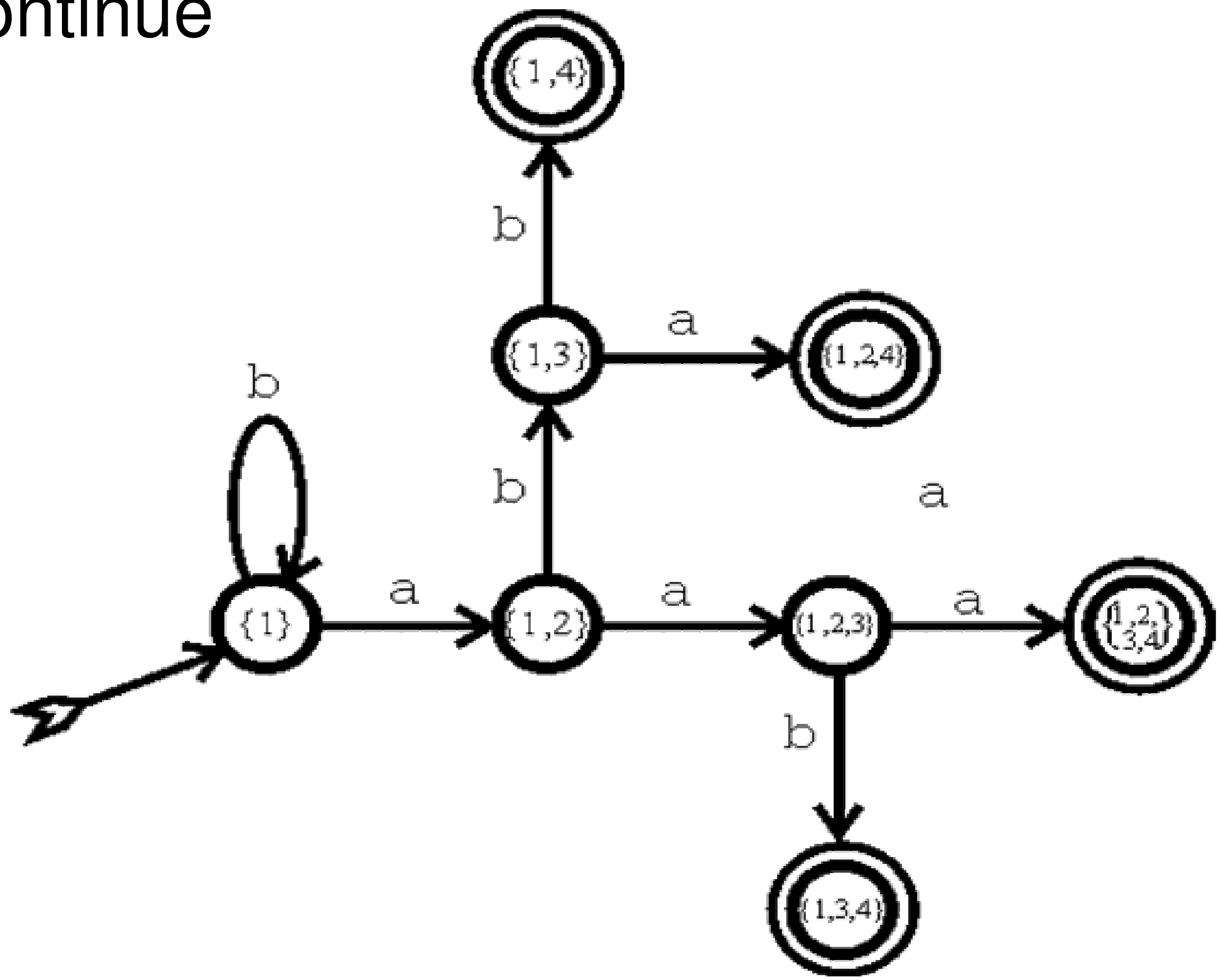
Prossiga: note que $\delta'(\{1,2,3\},a) = \{1,2,3,4\}$



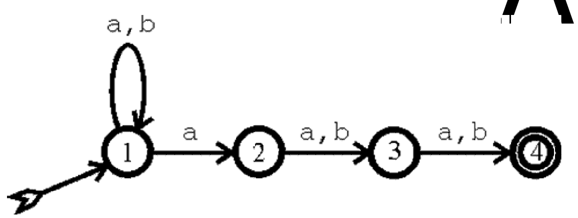
AFN → AFD na prática.

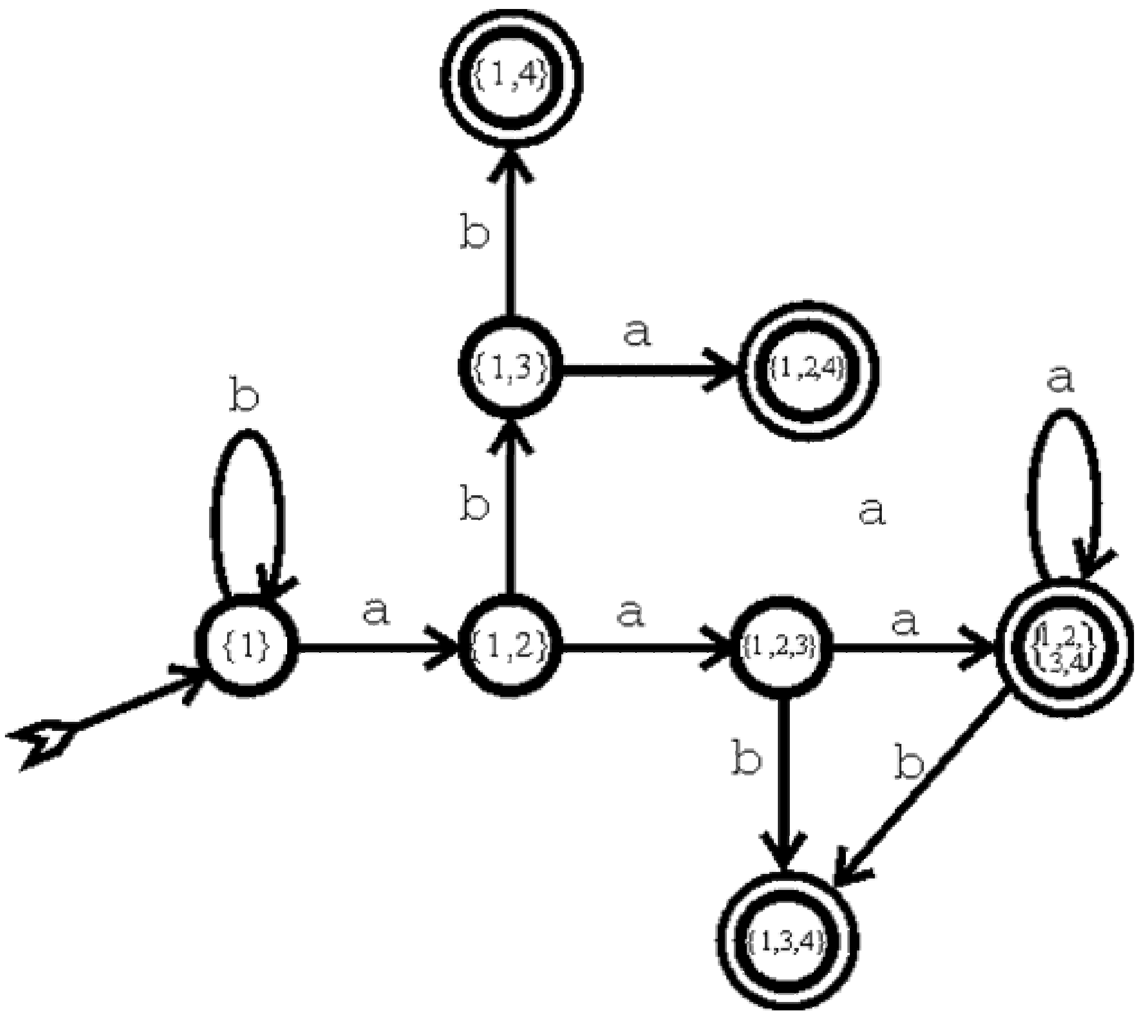


Continue

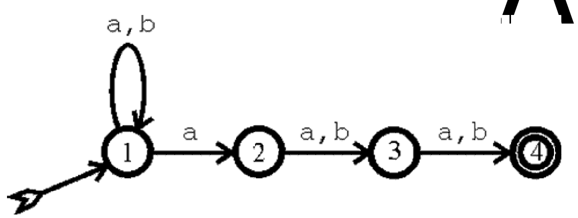


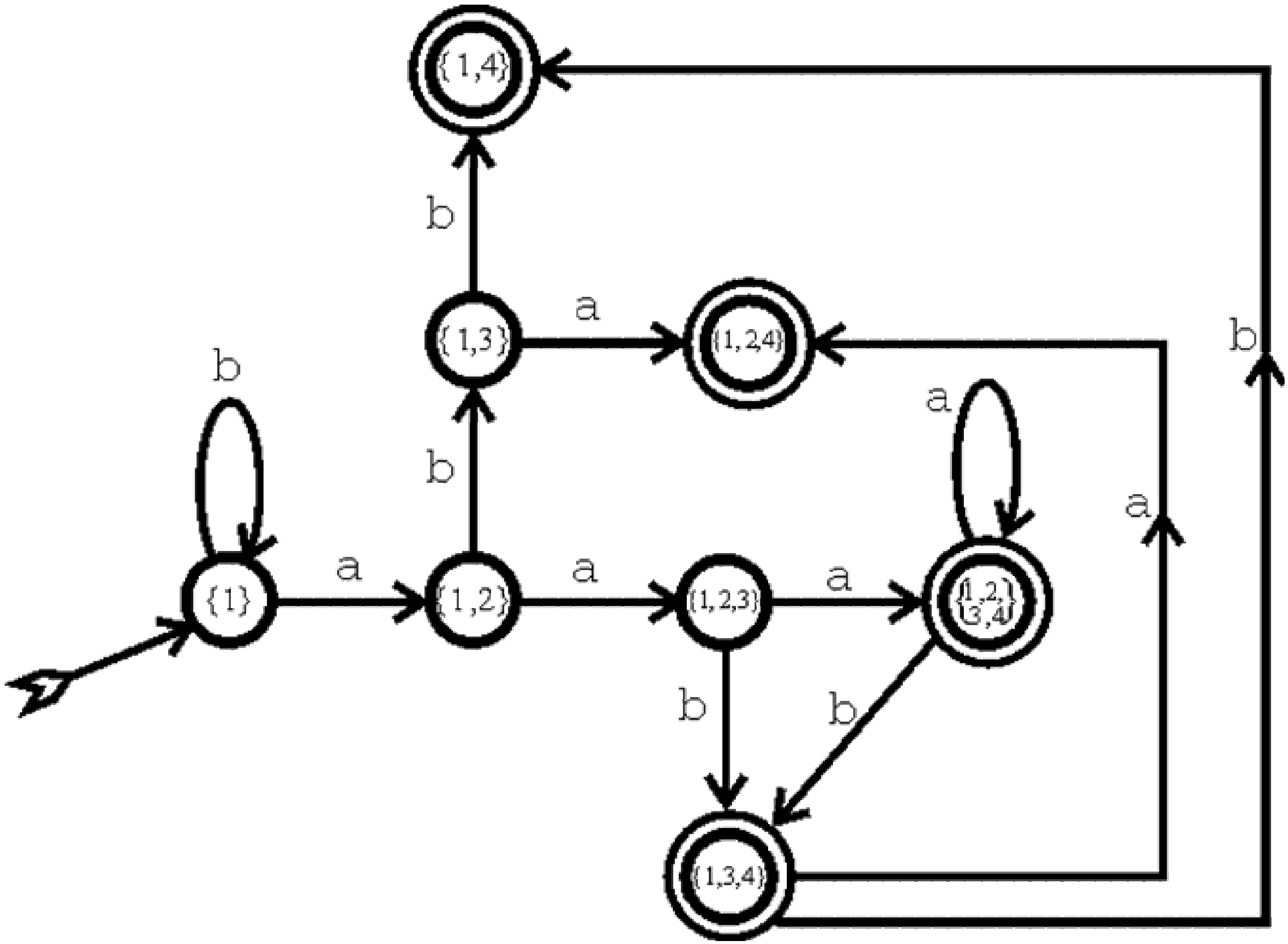
AFN → AFD : na prática.



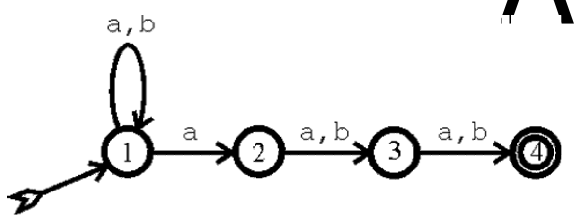


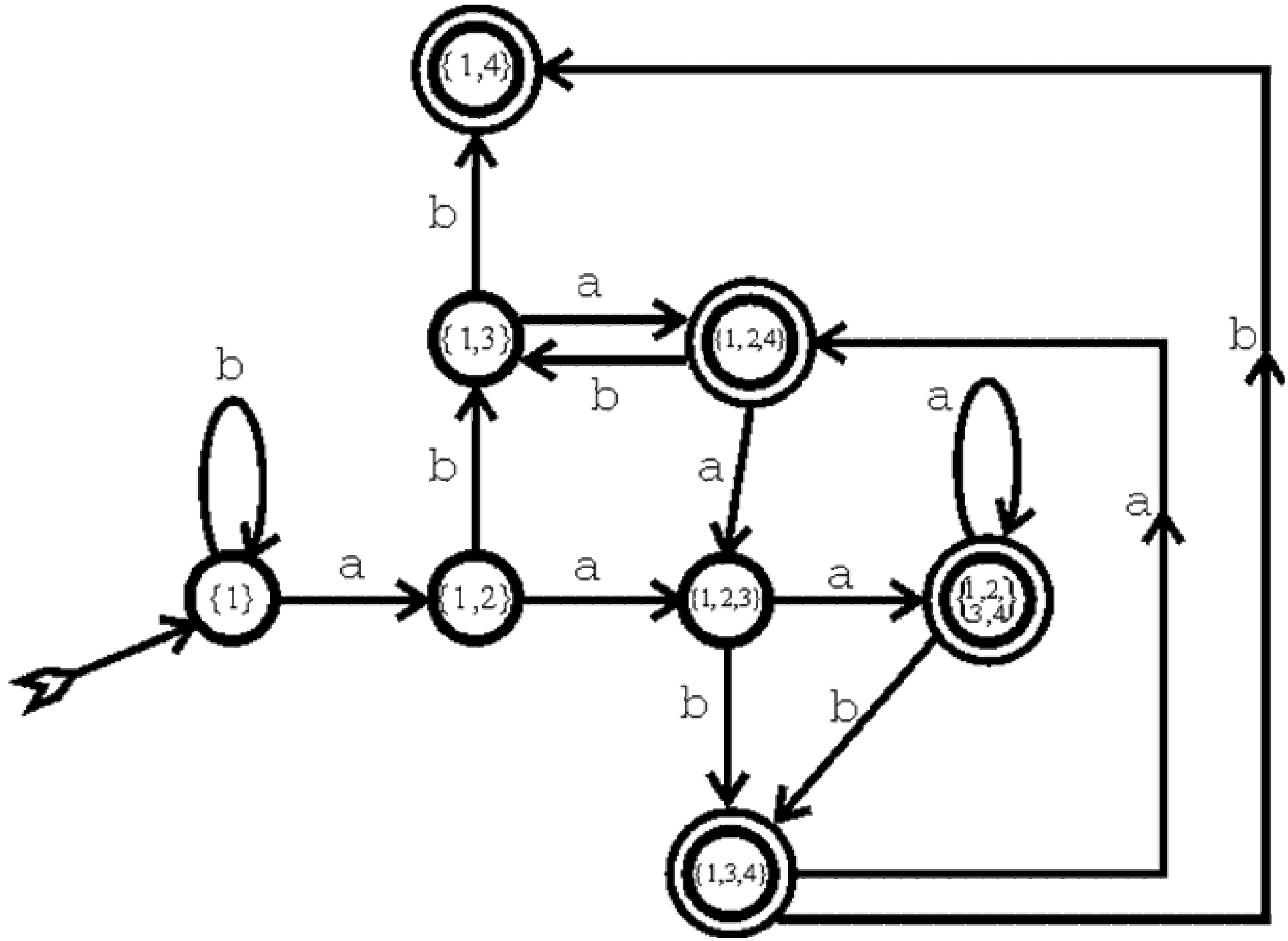
AFN → AFD : na prática.



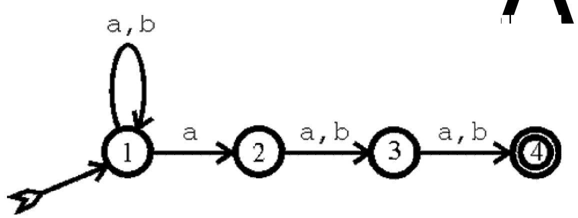


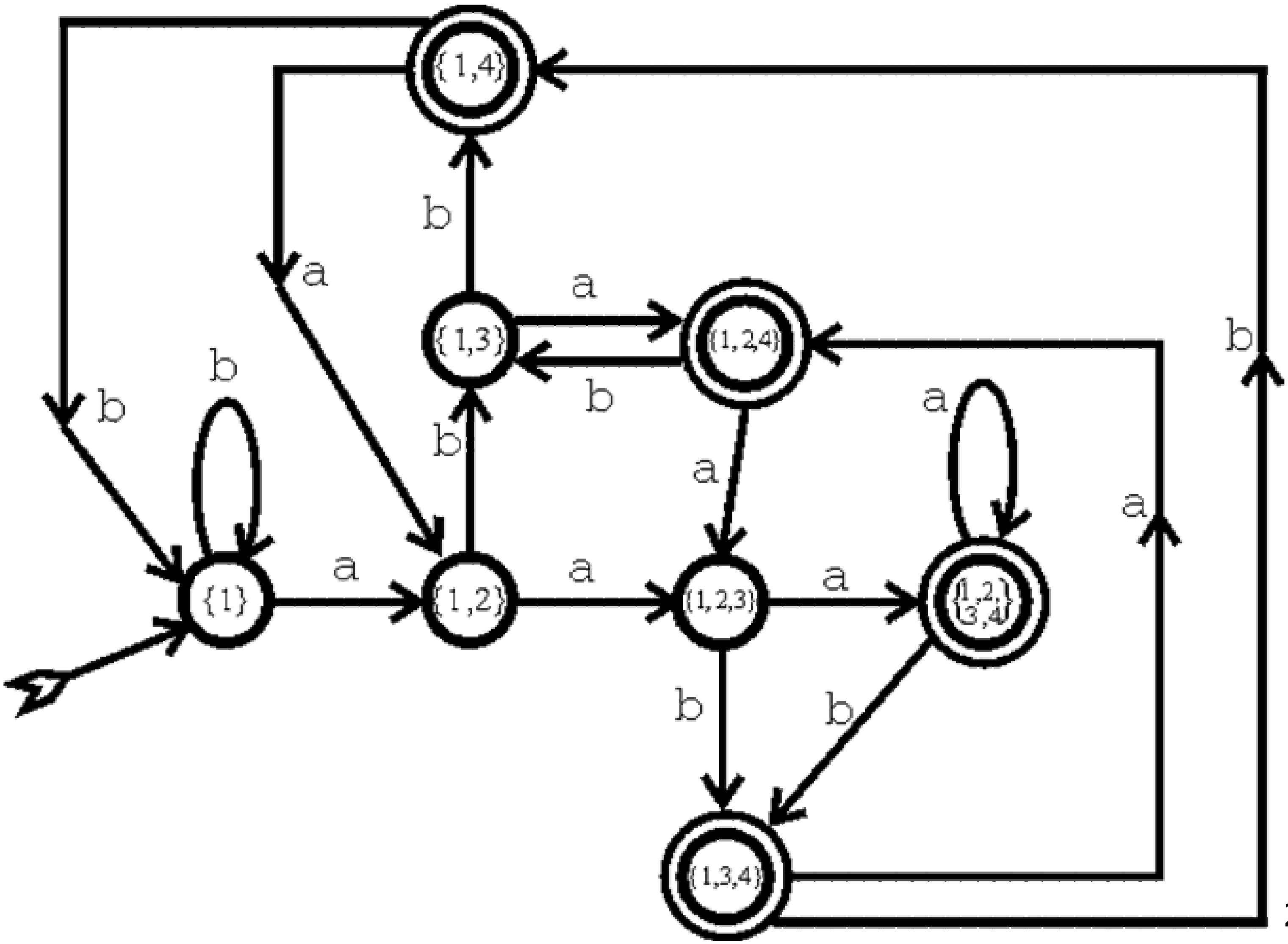
AFN → AFD : na prática.





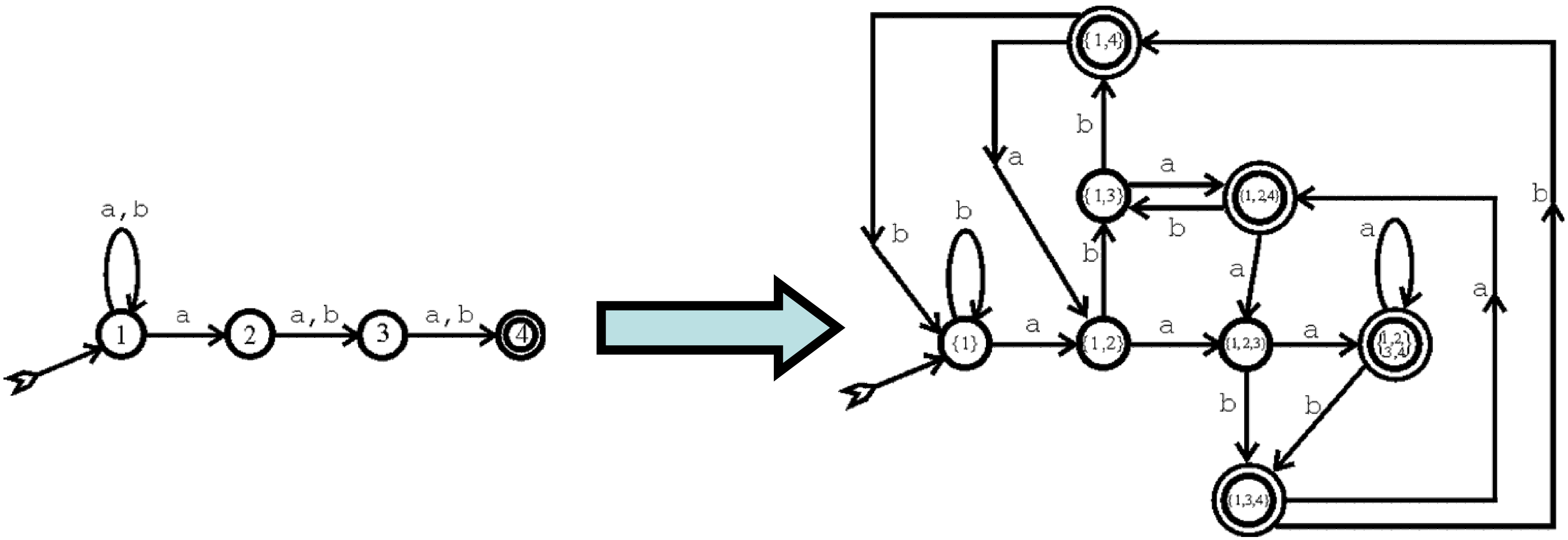
AFN → AFD : na prática.





AFN → AFD : na prática.

Resumindo:



Portanto, economizamos 50% do esforço não construindo todos os possíveis estados.

Exercício

- Transforme os AFNs do exercício anterior em AFDs.

AFN Estendido (AFNE)

- Um AFNE é uma quíntupla (Q, Σ, δ, I, F), onde:
  - Q, Σ, I e F são como os de um AFN e
  - δ é uma função parcial QxD para P(Q), onde D é algun subconjunto finito de Σ^*.
- Exemplo: M=({1,2,3},{0,1}, δ,{1},{2,3})

δ	ε	1	00	11
1	{2}	{3}	$\varnothing$	$\varnothing$
2	$\varnothing$	$\varnothing$	{2}	$\varnothing$
3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	{3}

AFN com transições ε (AFN-ε)

- Um AFN-ε é uma quíntupla $(Q, \Sigma, \delta, I, F)$, onde:
  - Q, Σ, I e F são como os de um AFN e
  - δ é uma função total $Qx(\Sigma \cup \{\varepsilon\})$ para $P(Q)$.
- Exemplo: $M=(\{1,2,3,4,5\},\{0,1\}, \delta,\{1\},\{2,3\})$

δ	ε	0	1
1	$\{2\}$	$\{3\}$	$\varnothing$
2	$\varnothing$	$\{4\}$	$\varnothing$
3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{5\}$
4	$\varnothing$	$\{2\}$	$\varnothing$
5	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{3\}$

Fecho-ε

- Seja um AFN-ε $M=(Q, \Sigma, \delta, I, F)$. A função fecho ε para M, fε, é uma função de P(Q) em P(Q), definida recursivamente como:
  - $f\varepsilon(\emptyset) = \emptyset$
  - $f\varepsilon(X) = X \cup f\varepsilon(\cup_{e\in X}\ \delta(e, \varepsilon))$, para $X \neq \emptyset$.
- Exemplo: AFN-ε M=({p0, p1, i0,i1},{0,1},δ,{p0},{i1})

δ	ε	0	1
p0	{p1}	{i0}	{p0}
p1	$\emptyset$	{p1}	{i1}
i0	$\emptyset$	{p0}	{i0}
i1	$\emptyset$	{i1}	{p1}

AFN-ε → AFN

- Para obter um AFN equivalente a um AFN-ε, basta eliminar as transições ε, utilizando a função fecho-ε.
- Seja um AFN-ε M =(Q, Σ, δ, I, F). Uma AFN equivalente a M seria M' = (Q, Σ, δ', I', F), onde:
  - I' = fε(I)
  - δ'(e, a) = fε(δ(e, a)), para cada e $\in$ Q e a $\in$ Σ.

Exercício

- Construa AFDs para:
  - $\{uavbxcy \mid u,v,x,y \in \{a,b,c\}^*\}$
  - $\{w \in \{a,b\}^* \mid$ w começa com a e tem tamanho par$\}$
  - $\{w \in \{a,b\}^* \mid$ w tem um número ímpar de b’s$\}$