BCC244

Alfabeto, String, Linguagem, Gramática

Registro aqui o agradecimento à Profa. Lucília por ceder slides que fazem parte deste materal.

Exemplo: Máquina de Venda

- A máquina de venda retorna uma coca-cola por $0.45
- Ela aceita apenas moedas de $0.25 (quarter) ou de $0.10 (dime)
- Come o seu dinheiro se você não inserir o valor correto ☺

Pode ser modelado pelo pseudo-código:

Exemplo: Máquina de Venda

```
cocaVend(){
  int total = 0, coin;
  while (total != 45){
     receive(coin);
     if ((coin==10 && total==40)
          ||(coin==25 && total>=25))
          reject(coin);
     else
          total += coin;
  }
  return new Coca();
}
```

Exemplo: Máquina de Venda

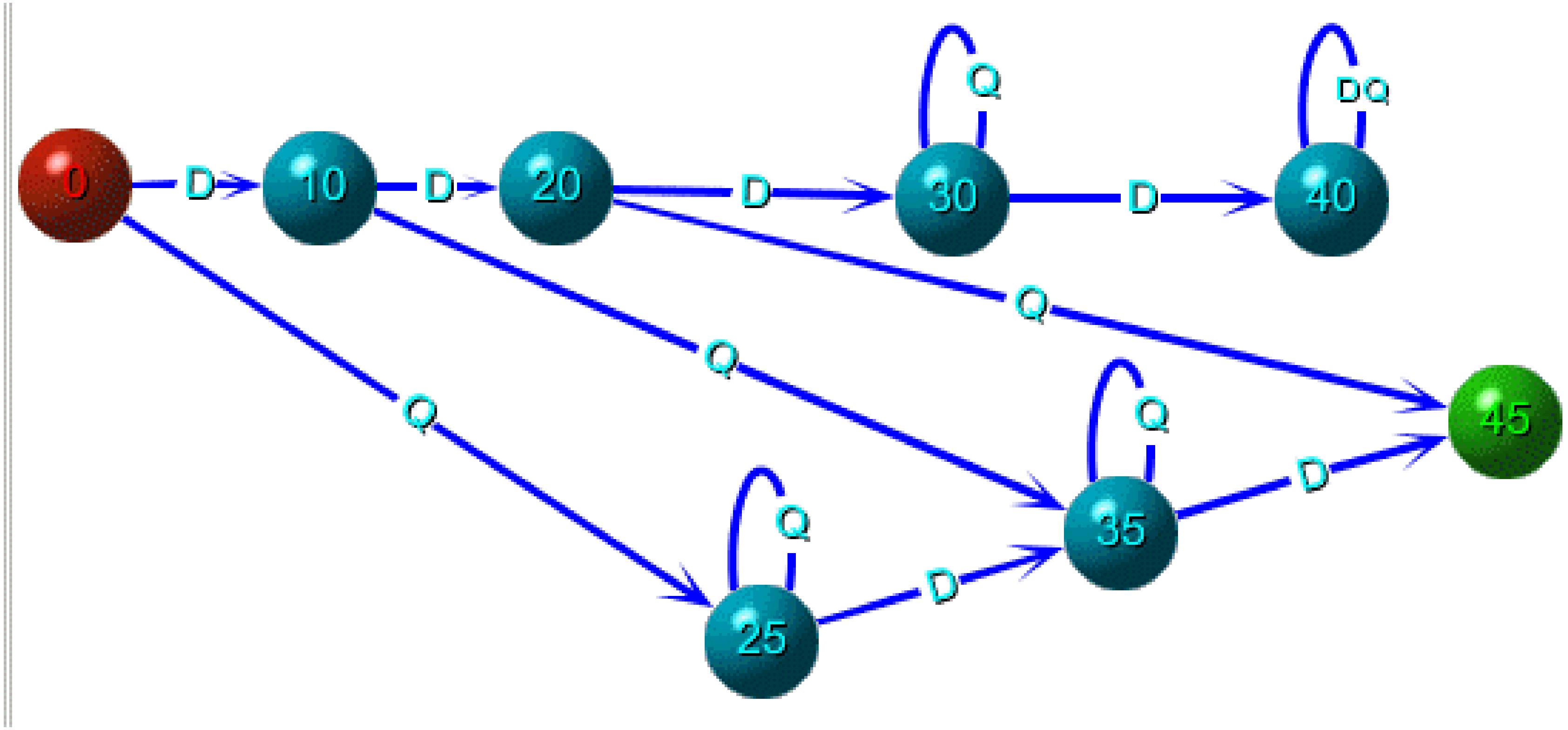
Porque esse modelo é demasiadamente complicado?

Exemplo: Máquina de Venda

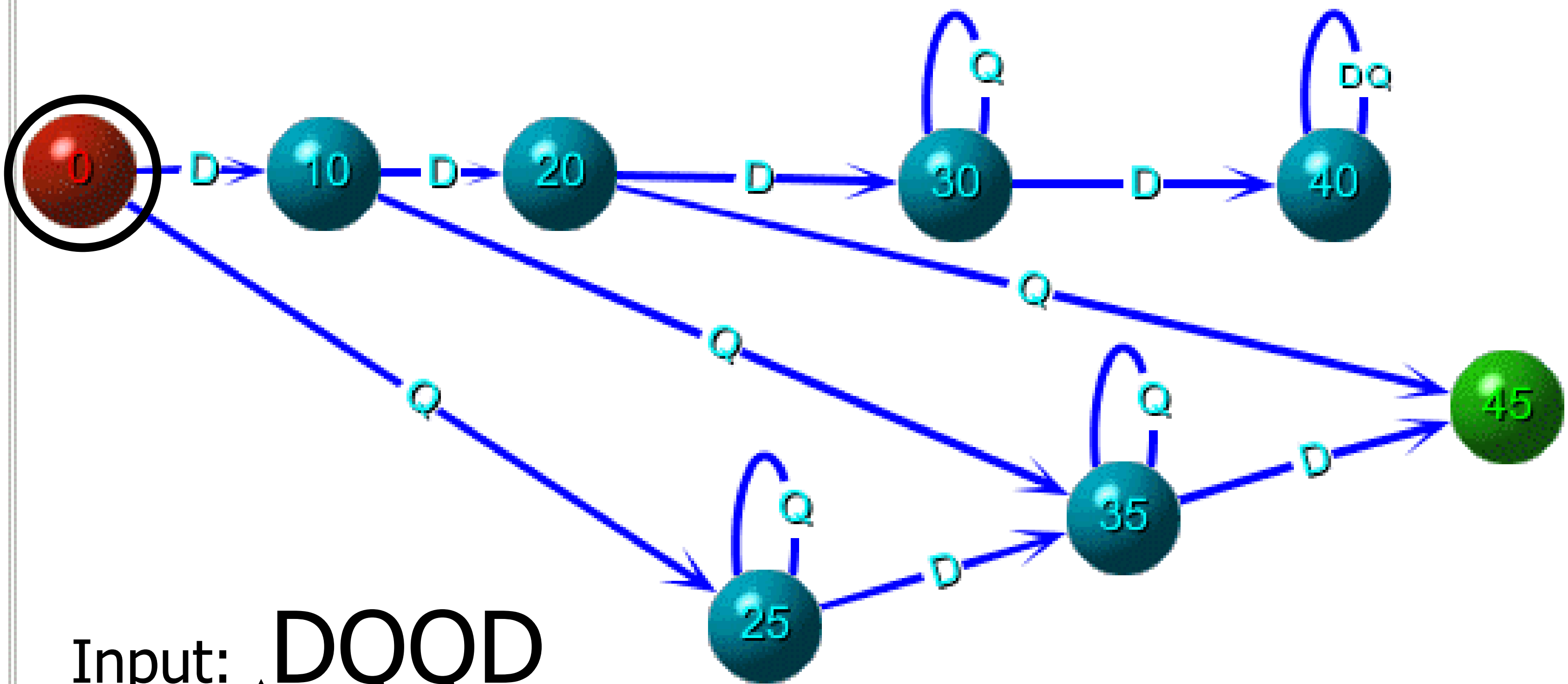
Porque esse modelo é complicado demais?

1) Máquinas de venda já existiam muito antes dos primeiros computadores, ou de Java!
2) Não precisa de fato de `int`'s. Cada `int` introduz 2^{32} possibilidades multiplicativamente!
3) Não é necessário saber como somar inteiros para modelar uma máquina de venda (`total += coin`)
4) if/else, gramática da linguagem Java … são artifícios que apenas complicam a essência do problema

Exemplo: Máquina de Venda



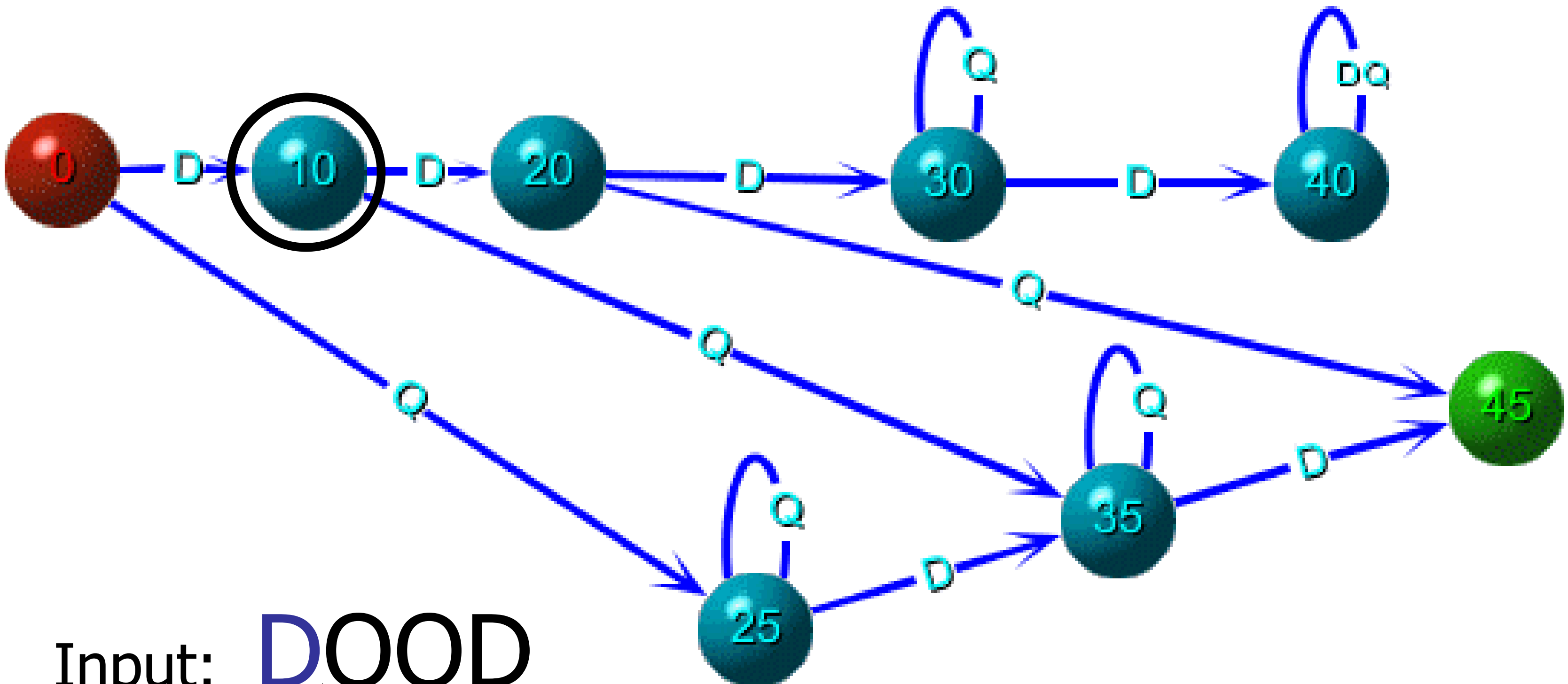
Exemplo: Máquina de Venda



Input: DQQD

Vai inserir um *dime*

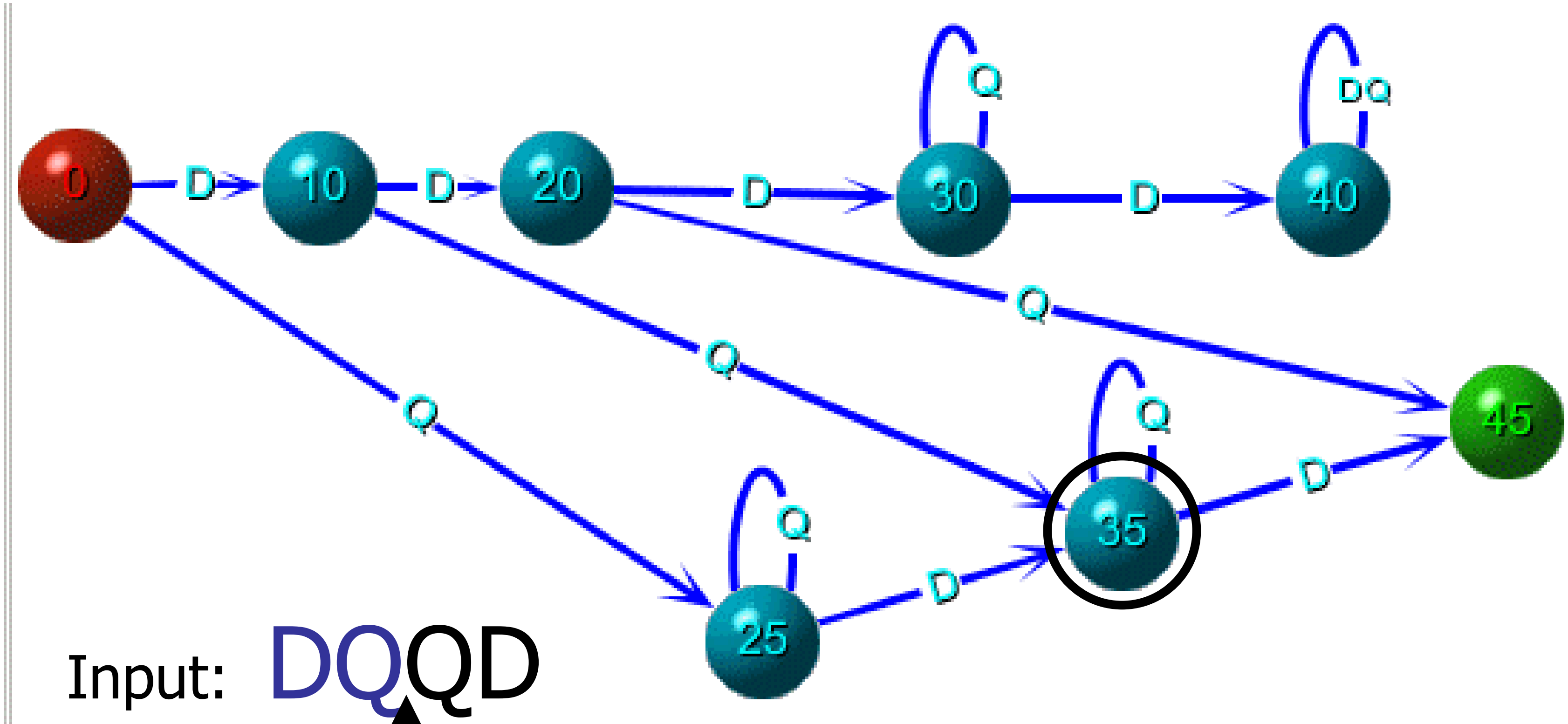
Exemplo: Máquina de Venda



Input: DQQD

Vai inserir um *quarter*

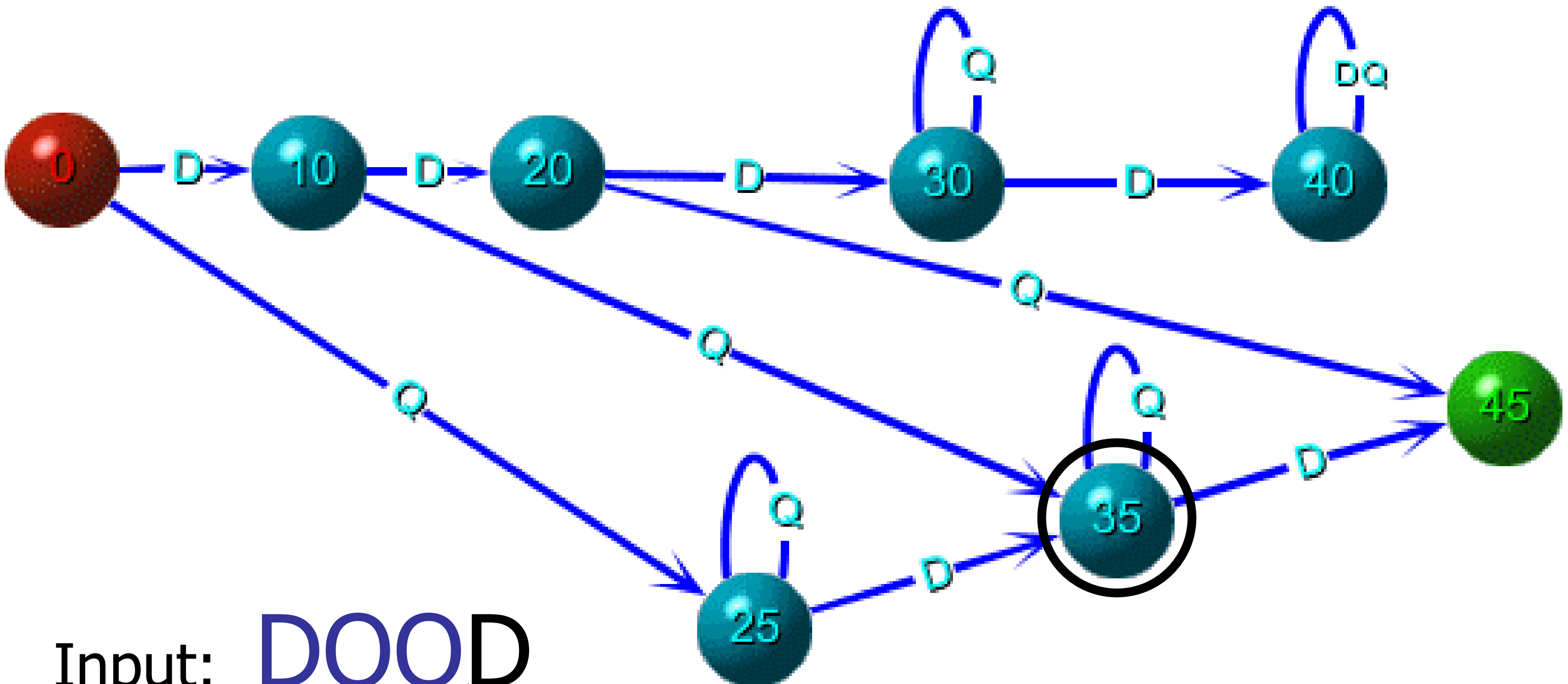
Exemplo: Máquina de Venda



Input: DQQD

Vai inserir um *quarter*

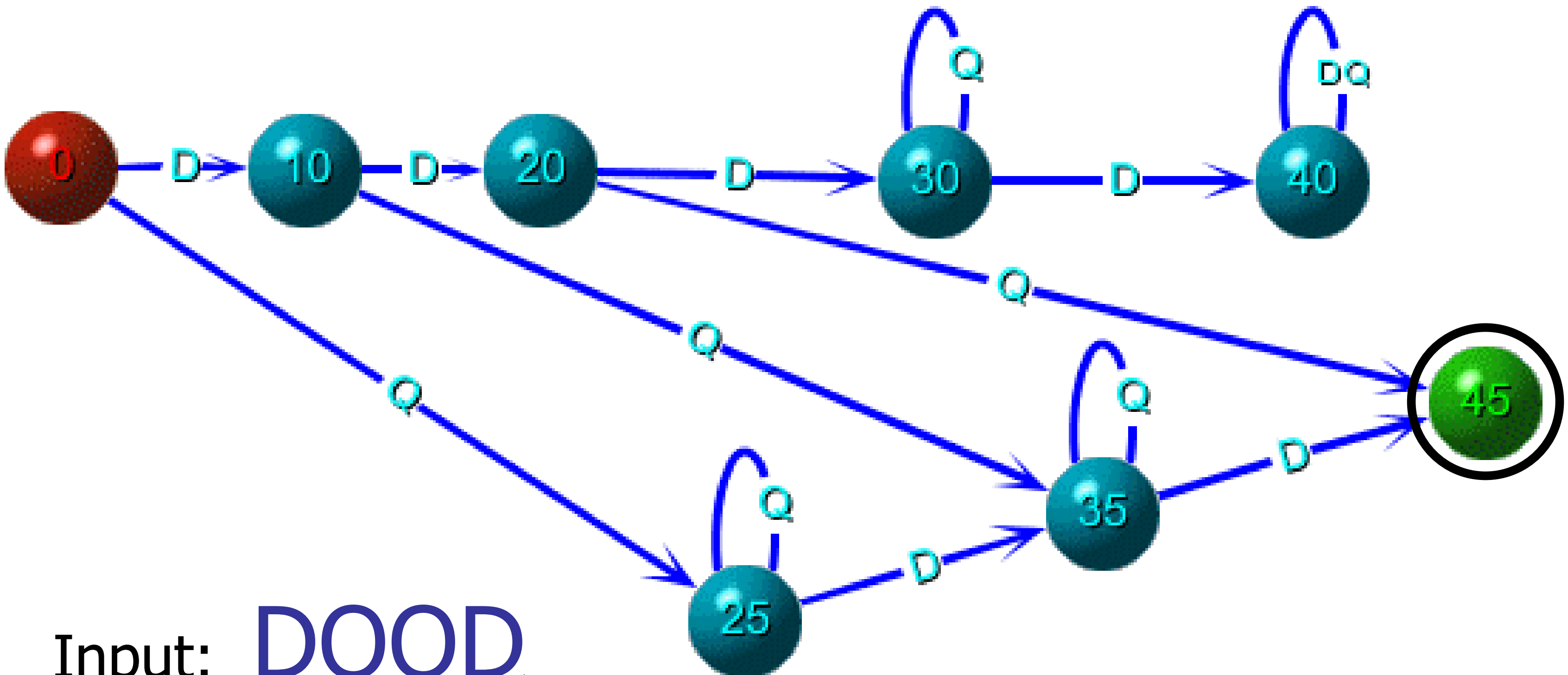
Exemplo: Máquina de Venda



Input: DQQD

Vai inserir um *dime*

Exemplo: Máquina de Venda



Input: DQQD

PRONTO! DINHEIRO ACEITO.

Exemplo: Máquina de Venda

O que tornou esse exemplo mais simples do que o pseudocódigo Java?

Vending Machine Example

1. São necessários apenas de 2 tipos de moedas “D” and “Q” – *símbolos/letras do alfabeto*
2. São necessários apenas 7 possíveis valores totais correntes – *estados/nodos/vertices*
3. Muito mais claro e esteticamente agradável

Podemos agora generalizar e abstrair…

Alfabetos, Strings, Linguagens

DEF: Um ***alfabeto*** Σ é um conjunto de simbolos (caracteres, letras). Um ***string*** (ou palavra) sobre Σ é uma sequencia de símbolos. O ***string vazio*** é um string que não contém nenhum símbolo, e é denotado por ε.

Q1: O que é Σ no exemplo da máquina de venda?

Q2: Quais strings são aceitos/não aceitos pela máquina de venda do exemplo?

Q3: O que significa ε no nosso exemplo?

Alfabetos, Strings, Linguagens

R1: $\Sigma = \{$ D, Q $\}$

R2:

Aceito: QDD, DQD, DDQ, QQQQDD, etc.

Não aceito: Q, D, DD, etc.

DDD … você se ferrou!

R3: ε significa tentar obter uma coca sem pagar nada (Não inserindo qq. moeda).

Alfabetos, Strings, Linguagens

DEF: O ***comprimento*** de um string é o número de símbolos que ele contém (repetições são permitidas).

EX: Os comprimentos dos strings (QDD, DQD, DDQ, QQQQDD) são: 3, 3, 3, 6

Q: Qual é o comprimento de ε ?

Alfabetos, Strings, Linguagens

R: $|\varepsilon| = 0$

Alfabetos, Strings, Linguagens

DEF: A ***concatenação*** de dois strings é o string resultante de colocar o segundo depois (à direita) do primeiro. Dados os strings *u e v*, denotamos sua concatenação por $u \circ v$, ou simplesmente *uv.*

EX: aba ° cate = abacate, QQ ° DD = QQDD, DDD ° *u* não é aceito, qualquer que seja *u* !

Q1: Porque se pode afirmar isso?

Q2: Defina concatenação recursivamente.

Q3: Obtenha uma fórmula para $|u \circ v|$.

Alfabetos, Strings, Linguagens

R1: Você já perdeu o seu dinheiro, não importa que outras moedas vá inserir.

R2: $\varepsilon \circ v = v$

$au \circ v = a(u \circ v)$

R3: $|u \circ v| = |u| + |v|$

Alfabetos, Strings, Linguagens

DEF: O ***reverso*** de um string *u* é denotado por u^R.

EX: $(\text{banana})^R = \text{ananab}$

DEF: Se Σ é um alfabeto, Σ^* denota o conjunto de todos os strings sobre Σ. Uma ***linguagem*** *sobre* Σ é um subconjunto de Σ^*, i.e. um conjunto de strings *cada um* sendo uma seqüência de símbolos de Σ.

Alfabetos, Strings, Linguagens

EX: $\Sigma = \{$ D, Q $\}$

$\Sigma^* = \{\varepsilon,$

D, Q,

DD, DQ, QD, QQ,

DDD, DDQ, DQD, DQQ, QDD, QDQ, QQD, QQQ,

DDDD, DDDQ, … $\}$

Defina $L = \{ u \in \Sigma^* \mid u$ resulta em uma venda $\}$

Exercicio: Quais são os strings de *L com* comprimento 1? E comprimento 2? 3? 4? 5?

Linguagens formais

- Tem uma sintaxe bem befinida
- Tem uma semântica precisa
- Exemplos:
  - Java, C, Pascal, HTML

Exemplos

- Seja $\Sigma=\{0,1\}$. São exemplos de linguagens:
  - $\varnothing$
  - $\{\varepsilon\}$
  - $\{0\}$
  - $\{\varepsilon, 0\}$
  - $\{w \in \Sigma^* \mid 1 \leq |w| \leq 5\}$
  - $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbf{N}\}$

União, interseção e diferença

- Como linguagem é um conjunto podemos usar as operações de conjunto para definir linguagens.
- Sejam L_1 e L_2 linguagens sobre Σ_1 e Σ_2.
  - $L_1 \cup L_2$, uma linguagem sobre $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$
  - $L_1 \cap L_2$, uma linguagem sobre $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$
  - $L_1 - L_2$, uma linguagem sobre Σ_1

Prefixo, sufixo e substring

- Seja uma palavra w=xzy, em que x, y, e z podem ser ε.
  - z é uma substring de w
  - x é um prefixo de w
  - y é um sufixo de w
- Quais são os prefixos, sufixos e substrings de w=abc?

Concatenação de linguagens

- A concatenação de duas linguagens L_1 e L_2 é dada por:
  - $L_1L_2=\{xy \mid x\in L_1 \text{ e } y \in L_2\}$
  - $\{0, 01\}\{00,11,\varepsilon\} =$
- Sejam as linguagens $L_1=\{w\in\{0,1\}^* \mid |w|=5\}$ e $L_2=\{ 0y \mid y\in\{0,1\}^*\}$.
  - $L_1L_1=$
  - $L_1L_2=$
  - $L_2L_1=$
  - $L_2L_2=$

Fecho de Kleene (Kleene star)

- Seja L uma linguagem. L^n sejá usada para denotar L concatenada com L n vezes.
  - $L^0 = \{\varepsilon\}$
  - $L^n = L^{n-1} L$, para $N > 0$
- Fecho de Kleene de uma linguagem L, L*, pode ser definida por:
  - $\varepsilon \in L^*$
  - Se $x \in L^*$ e $y \in L$, então $xy \in L^*$

Fecho positivo de Kleene (Kleene positivo)

- $L^+ = LL^*$
- $L^* = L^+ \cup \{ \varepsilon \}$
- Exemplos:
  - $\emptyset^* =$
  - $\emptyset^+ =$
  - $\{\varepsilon\}^* =$
  - $\{\varepsilon\}^+ =$
  - $\{0\}^* =$
  - $\{0\}^+ =$
  - $\{\varepsilon, 00, 11\}^* =$

Exercício

- Usando operadores de conjunto e linguagem defina sobre $\Sigma=\{0,1\}$:

a) A linguagem dos strings que começam com 0.
b) A linguagem dos strings que possuem a substring 00.
c) A linguagem dos strings que possuem 00 ou 11.
d) A linguagem dos strings que possuem tamanho par.
e) A linguagem dos strings que possuem tamanho ímpar.
f) A linguagem dos strings que terminam com 0 seguido por um número ímpar de 1´s consecutivos.
g) A linguagem dos strings de tamanho par que começam ou terminam com 0.

Exercício

- Forneça definições recursivas para:

a) $\{ 0 \}^* \{ 1 \}^*$

b) $\{ 0^n 1^n \mid n \in \mathbf{N} \}$

c) $\{ w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contém } 00 \}$

d) $\{ w \in \{0,1\}^* \mid |w| \text{ é par} \}$

Gramática

- Uma gramática mostra como gerar os strings de uma linguagem.
- Elemento fundamental
  - Regra – é uma par ordenado *(u, v), u* $\rightarrow$ *v*, onde *u* e *v* são strings formadas com símbolos de dois alfabetos distintos, variáveis e terminais.
    - Variáveis (ou não terminais) são símbolos auxiliares para a geração dos strings de uma linguagem.
    - Terminais são símbolos do alfabeto da linguagem.

Gramática

- Convenção
  - Letras maiúsculas – não terminais
  - Letras minúsculas - terminais
- Exemplo de regra
  - aAB → baA
  - A partir de *aABBaAB* pode-se derivar em *baABaAB*.
- $\Rightarrow$ - representa a relação de derivação
  - $aABBaAB \Rightarrow baABaAB \Rightarrow bbaAaAB$

Gramática

- Uma gramática é uma quádrupla $G=(V, \Sigma, R, P)$, onde:
  - V é o conjunto de variáveis
  - Σ é o conjunto de símbolos terminais
  - R é o conjunto de regras
  - $P \in V$ é a variável de partida
- Exemplo G=({P, A, C}, {a,bc}, R, P), onde R possui as regras:
  1. P $\rightarrow$ aAbc
  2. A $\rightarrow$ aAbC
  3. A $\rightarrow$ ε
  4. Cb $\rightarrow$ bC
  5. Cc $\rightarrow$ cc
  - abc $\in$ L(G)?
  - Aaabbbccc $\in$ L(G)?

Gramática

- Formas sentenciais – são strings gerados a partir da variável de partida, aplicando-se regras gramaticais.
- Sentença – é uma forma sentencial sem variáveis.
- A linguagem definida por uma gramática G, L(G), é o conjunto de sentenças geradas pela gramática.

Gramática

- $\overset{n}{\Rightarrow}$ é definida por:
  - $x \overset{0}{\Rightarrow} x$ para todo x $\in$(V$\cup\Sigma$)*;
  - Se $w \overset{n}{\Rightarrow} xuy \quad e \quad u \rightarrow v \in R$, então $w \overset{n+1}{\Rightarrow} xvy$ para todo w, x, y $\in$ (V $\cup$ Σ)*, n $\geq$ 0.
- $x \overset{*}{\Rightarrow} y$, x deriva y em zero ou mais passos.
- $x \overset{+}{\Rightarrow} y$, x deriva y em um ou mais passos.
- $L(G) = \{w \in \sum^{*} | P \overset{*}{\Rightarrow} w\}$

Gramática

- Exemplo:
  - Seja G=({E, T, N, D}, {+,-, (,), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, R, E), onde R é:

1. E→ E + T
2. E→ E – T
3. E→ T
4. T→ (E)
5. T→ N
6. N→ DN
7. N→D
8. D→0
9. D→1
10. D→2
11. D→3
12. D→4
13. D→5
14. D→6
15. D→7
16. D→8
17. D→9

- Derive 1 + 2 – 3 e 12 - 31

Exercícios

1. Seja G=({S, L}, { (,), a, ; }, R, S) uma gramática onde R é:

   R: S $\rightarrow$ L, S | L

   L $\rightarrow$ (S) | a

   a) a,a $\in$ L(G)?

   b) (a, (a,a)) $\in$ L(G)?

Exercícios

2. Defina gramáticas para:
   a) $\{x \mid x = a^n b^n, n > 0\}$
   b) $\{x \in \{0,1\}^* \mid x = x^R\}$
   c) $\{0\}^+\{1\}^*$
   d) Números binários pares
   e) $\{w0w^R \mid w \in \{1, 2\}^*\}$