Linguagens Regulares, Operações Regulares

Definição de Linguagem Regular

Relembre a definição de linguagem regular:

DEF: A ***linguagem aceita por*** um AF *M* é o conjunto de todos os strings que são aceitos por *M* e é denotada por *L* (*M*).

Queremos entender que tipo de linguagens são regulares. O reconhecimento de elementos de linguagens desse tipo é extremamente rapido! Seria bom saber, por exemplo, quais das seguintes linguagens são regulares:

Exemplos de Linguagens

- Números primos unários:
  - $\{ 11, 111, 11111, 1111111, 11111111111, \ldots \}$
  - $= \{1^2, 1^3, 1^5, 1^7, 1^{11}, 1^{13}, \ldots \}$
  - $= \{ 1^p \mid p \text{ é um número primo} \}$
- Qudrados unários:
  - $\{\varepsilon, 1, 1^4, 1^9, 1^{16}, 1^{25}, 1^{36}, \ldots \}$
  - $= \{ 1^n \mid n \text{ é um quadrado perfeito} \}$
- Strings de bits que são palíndromos:
  - $\{\varepsilon, 0, 1, 00, 11, 000, 010, 101, 111, \ldots\}$
  - $= \{x \in \{0,1\}^* \mid x = x^R \}$

Veremos mais adiante se essas linguagens são ou não regulares.

Linguagens Finitas

Todas as linguagens dos exemplos anteriores têm cardinalidade *infinita*

NOTA: Os strings que constituem a linguagem são finitos (como todos neste curso); entretanto, o conjunto de strings é infinito, em cada um dos exemplos anteriores.

Antes de examinar linguagens infinitas, vamos primeiro nos ater a linguagens finitas.

Linguagens de Cardinalidade 1

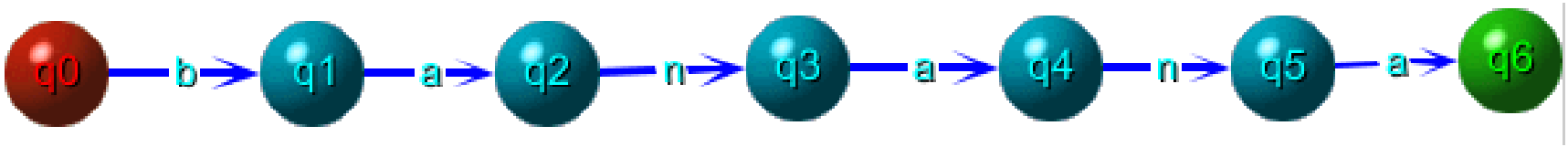
Q: Uma linguagem que contém um único string é regular? Por exemplo,

{ banana }

é regular?

Linguagens de Cardinalidade 1

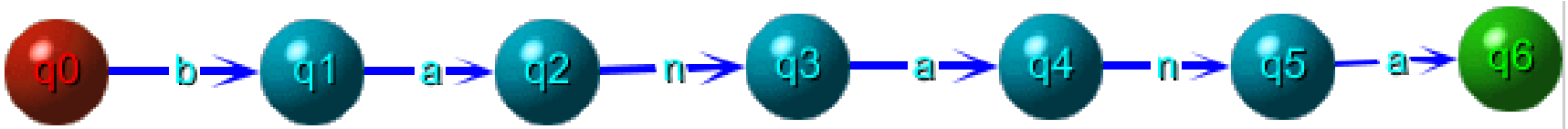
R: Sim.



Q: O que há de errado nesse exemplo?

Linguagens de Cardinalidade 1

R: De fato, nada. Esse é um exemplo de um AF *não determinístico*. Ele constitui uma forma mais concisa de definir a linguagem {banana}



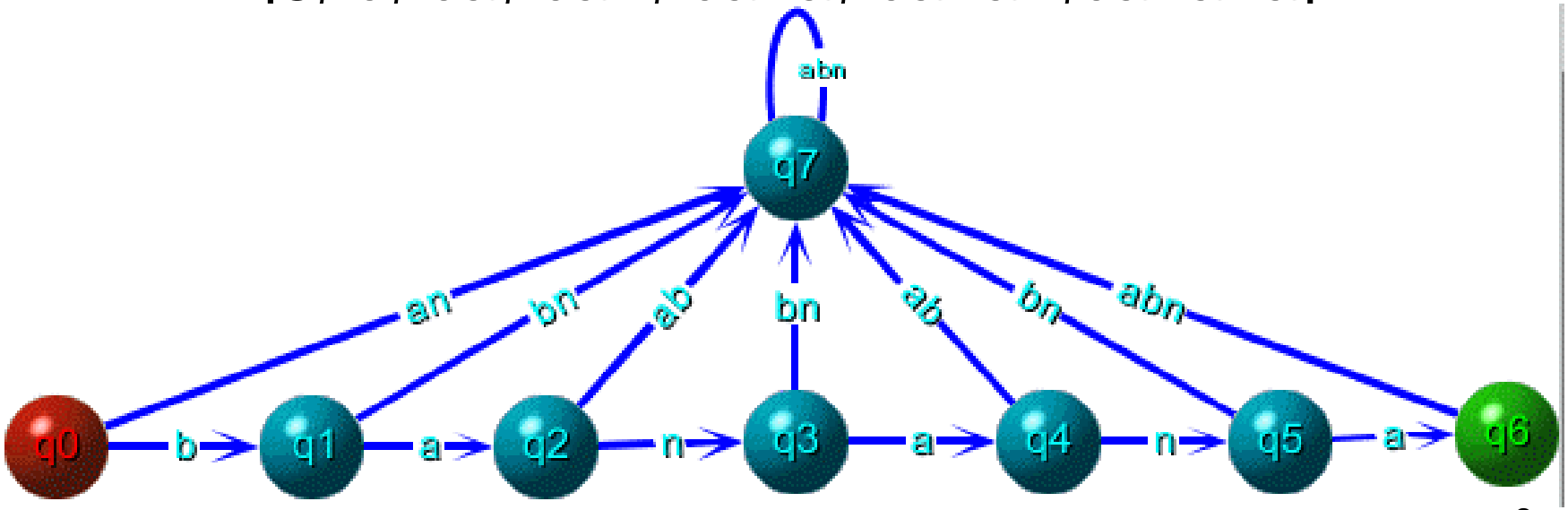
Vamos tratar de não determinismo nas próximas aulas. Então:

Q: Existe uma maneira de corrigir esse autômato, tornando-o determinista?

Linguagens de Cardinalidade 1

R: Sim, basta adicionar um ***estado de falha*** q7; I.e., incluir um estado que "suga" todo os strings diferentes de "banana" – exceto strings que são ***prefixos*** de "banana"

{ε, b, ba, ban, bana, banan,banana}.



Demonstração usando JFLAP

JFlap

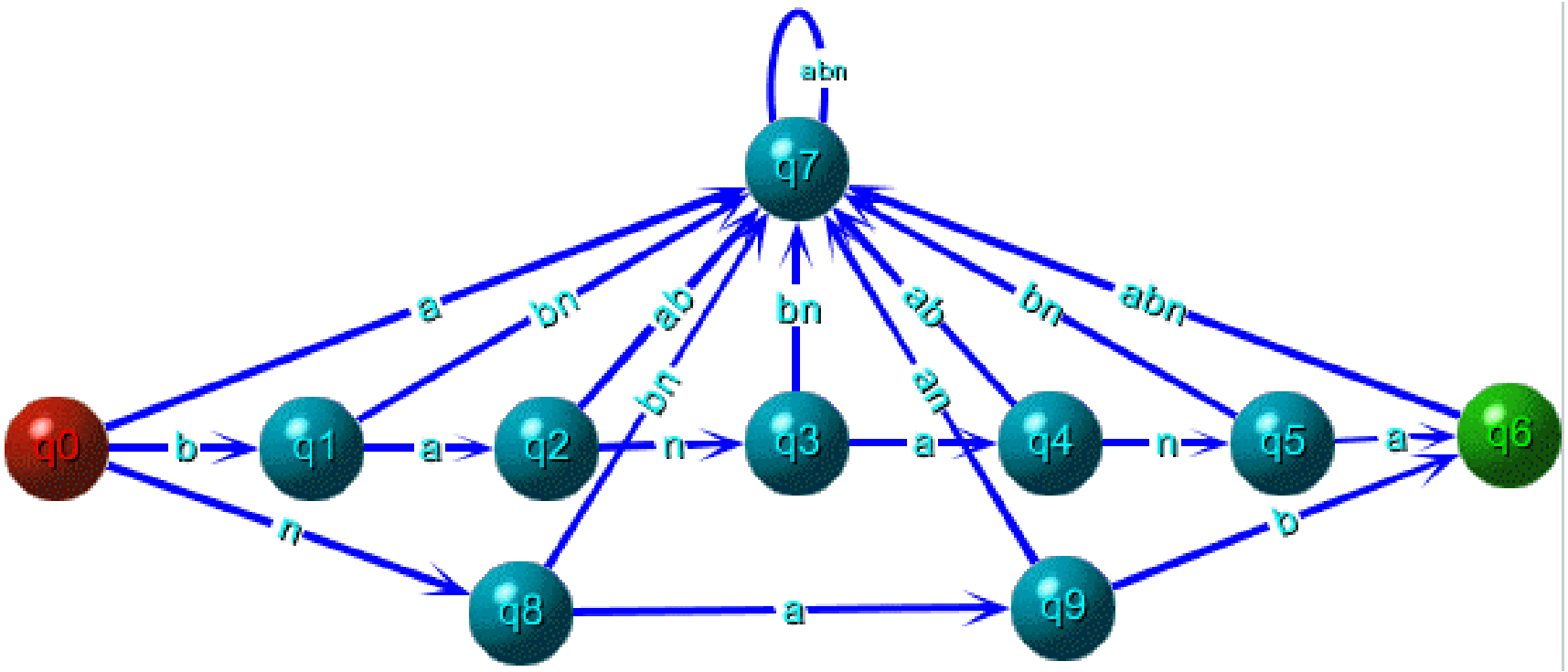
Dois Strings

Q: E linguagens contendo apenas 2 strings são regulares? Por exemplo

{ banana, nab } ?

Dois Strings

R: Apenas adicione uma nova rota:



Número Finito Arbitrário de Strings

Q1: E mais strings? Por exemplo

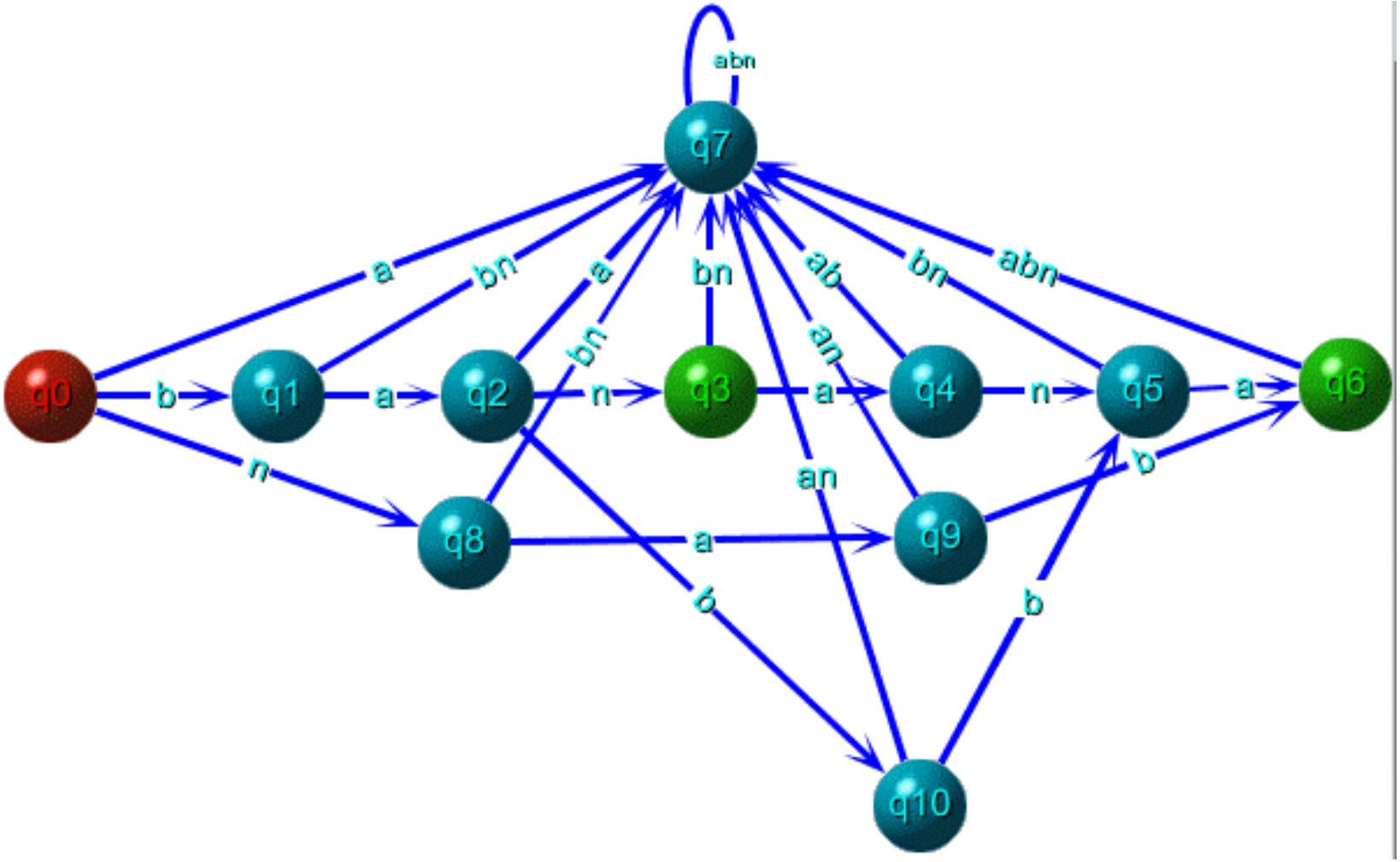
{ banana, nab, ban, babba } ?

Q2: Ou menos (o conjunto vazio):

Ø = {} ?

Número Finito Arbitrário de Strings

R1:



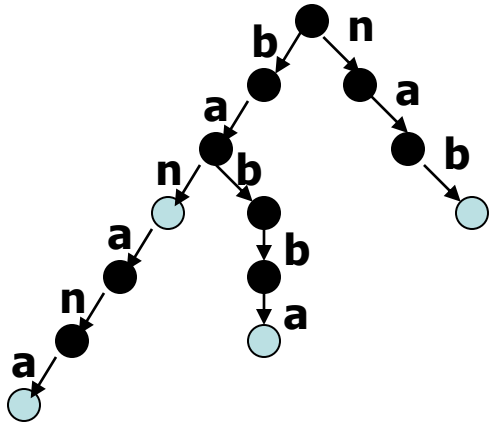
Número Finito Arbitrário de Strings: Linguagem Vazia

R2: Construa um autômato com um único estado e com conjunto de estados de aceitação F *vazio* !

Número Finito Arbitrário de Strings

THM: Toda linguagem finita é regular.

Prova : É sempre possível construir uma árvore em que cada ramo representa um string. Por exemplo:



A raiz é o estado inicial; as folhas são estados de aceitação; adicione um estado de falha para finalizar a construção. □

Cardinalidade Infinita

Q: Toda linguagem regular é finita?

Cardinalidade Infinita

R: Não! Muitas linguagens infinitas são regulares.

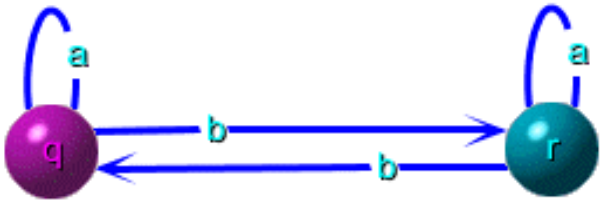
Erro comum 1: Os strings de uma linguagem regular são finitos, portanto a linguagem deve ser finita.

Erro comum 2: Linguagens regulares são – por definição – aceitas por um autômato *finito*, portanto são finitas.

Q: Dê um exemplo de uma linguagem *infinita* mas regular.

Cardinalidade Infinita

– bitstrings com número par de b's



– O exemplo mais simples é Σ^*

– muitos, muitos outros

Exercício: Pense num critério para não finitude

Operações Regulares

Você provavelmente já usou operações regulares ao especificar pesquisas avançadas utilizando programas como `emacs`, `egrep`, `perl`, `python`, etc.

Vamos trabalhar com três operações básicas:

1. União
2. Concatenação
3. Kleene-star (fecho de Kleene)

E uma quarta definida em termos dessas:

4. Kleene-plus (fecho positivo de Kleene)

Operações Regulares – Tabela Resumo

Operação	Simbolo	Versão UNIX	Significado
União	$\cup$	|	casa um dos padrões
Concatenação	$\bullet$	*implicito em* UNIX	casa os padrões em sequencia
Kleene-star	$*$	$*$	casa o padrão 0 ou mais vezes
Kleene-plus	$+$	$+$	casa o padrão 1 ou mais vezes

Operações Regulares – União

UNIX: para pesquisar todas as linhas contendo vogais em um texto, podemos usaro o comando

```
egrep -i `a|e|i|o|u'
```

O padrão "*vogal* " é casado por qualquer linha que contenha um dos símbolos a, e, i, o ou u.

Q: O que é um padrão de string?

Padrão de String

A: Uma boa maneira de definir um padrão de string é como um conjunto de strings, i.e. uma linguagem. A linguagem para um dado padrão é o conjunto de todos os strings que satifazem o predicado do padrão.

EX: *padrão-vogal* =

{ strings que contenham pelo menos um dos símbolos: a e i o u }

Padrões UNIX vs. Padrões em Computabilidade

Em UNIX, supõe-se implicitamente que um string tem um padrão se esse padrão ocorre como *substring* deste.

Nesse curso, entretanto, um padrão deve especificar o string *completo*, e não apenas um substring.

Operações Regulares – União

Linguagens formais: Dados os padrões

A = {aardvark}, B = {bobcat},

C = {chimpanzee}

a união desses padrões resulta em

$A \cup B \cup C$ = {aardvark, bobcat,
chimpanzee}

Operações Regulares - Concatenação

UNIX: pra pesquisar todas as ocorrências duplas consecutivas de vogais, usamos:

```
egrep -i `(a|e|i|o|u)(a|e|i|o|u)'
```

O padrão "*vogal* " foi repetido.

Usamos parênteses para especificar onde exatamente ocorre a concatenação.

Operações Regulares - Concatenação

Linguagens formais. Considere o resultado anterior:

L = {aardvark, bobcat, chimpanzee}

Q: Qual é a linguagem resultante de concatenar L com ela própria:

$$L \bullet L \ ?$$

Operações Regulares - Concatenação

A: $L \bullet L$ =

{aardvark, bobcat, chimpanzee}•{aardvark, bobcat, chimpanzee}

=

{aardvarkaardvark, aardvarkbobcat, aardvarkchimpanzee,
bobcataardvark, bobcatbobcat, bobcatchimpanzee,
chimpanzeeaardvark, chimpanzeebobcat, chimpanzeechimpanzee}

Q1: O que é $L \bullet \{\varepsilon\}$?

Q2: O que é $L \bullet \emptyset$?

Álgebra de Linguagens

A1: $L \bullet \{\varepsilon\} = L$. De modo geral, $\{\varepsilon\}$ é a ***identidade*** da "álgebra" de linguagens. I.e., se pensarmos na concatenação como sendo multiplicação, $\{\varepsilon\}$ age como o número 1.

A2: $L \bullet \emptyset = \emptyset$. Dualmente a $\{\varepsilon\}$, $\emptyset$ age como o número zero, obliterando qq string com o qual é concatenado.

Nota: Na analogia entre números e linguagens, a adição corresponde à união e a multiplicação corresponde à concatenação, formando assim uma "álgebra".

Operações Regulares – Kleene-*

UNIX: pesquisar por linhas que consistem puramente de vogais (incluinso a linha vazia):

```
egrep -i `^(a|e|i|o|u)*$'
```

NOTA: `^` and `$` são símbolos especiais em expressões regulares UNIX que ligam o padrão ao *início* e ao *fim* da linha, respectivamente. Isso pode ser usado para converter uma operação regular de Linguagens Formais em uma expressão regular UNIX equivalente.

Operações Regulares – Kleene-*

Linguagens formais : Considere a linguagem

$$B = \{ \text{ba}, \text{na} \}$$

Q: Qual é a linguagem B^* ?

Operações Regulares – Kleene-*

A:

B * = { ba, na }*=

{ ε,

ba, na,

baba, bana, naba, nana,

bababa, babana, banaba, banana,

nababa, nabana, nanaba, nanana,

babababa, bababana, … }

Operações Regulares – Kleene-+

Kleene-+ é tal como Kleene-* exceto que o padrão deve ocorrer *pelo menos uma vez*.

UNIX: pesquisar por linhas que consistem puramenente de vogais (exceto linha vazia):

```
egrep -i `^(a|e|i|o|u)+$'
```

Linguagens formais : B^+ = { ba, na }$^+$=

{ ba, na,

baba, bana, naba, nana,

bababa, babana, banaba, banana,

nababa, nabana, nanaba, nanana,

babababa, bababana, … }

Gerando Linguagens Regulares

A razão pela qual linguagens regulares são chamadas regulares é a seguinte:

THM: Linguagens regulares são aquelas que podem ser geradas a partir de linguagens finitas pela aplicação de operações regulares.

Esse teorema será provado adiante.

Q: Podemos começar a partir de linguagens ainda mais básicas que linguagens finitas arbitrárias?

Gerando Linguagens Regulares

R: Sim. Podemos começar com linguagens que consistem de um único string, os quais consistem de um único caractere. Essas são chamadas linguagens regulares “atômicas”.

EX: Para gerar a linguagem finita

$$L = \{ \text{banana, nab} \}$$

Podemos começar com as linguagens atômicas

$$A = \{a\},\ B = \{b\},\ N = \{n\}.$$

Então podemos expressar L como:

$$L = (B \bullet A \bullet N \bullet A \bullet N \bullet A) \cup (N \bullet A \bullet B)$$

Exercício

1. Expressar as linguagens a seguir na forma de uma expressão regular, no estilo de expressões regulares UNIX, e usando operações regulares.

a. A linguagem *L* sobre o alfabeto {0,1} cujos strings possuem tamanho múltiplo de 3 ou terminam com 1.

b. A linguagem *L* sobre o alfabeto {0,1} cujos strings começam com 0 e terminam com 10 ou com 11

2. Construa o AFD dos itens anteriores usando o JFlap

Propriedades de Fecho de Linguagens Regulares.

Gerando Linguagens Regulares

Recorde a seguinte teorema:

THM: Linguagens regulares são aquelas que podem ser geradas a partir de linguagens finitas pela aplicação de operações regulares.

Em particular, o teorema implica que, quando aplicamos uma operação regular a linguagens regulares o resultado é uma linguagem regular. I.e., o conjunto das linguagens regulares é ***fechado*** sob as operações de *união*, *concatenação* e *Kleene-**.

Fecho de Linguagens Regulares

OBJETIVO: Mostrar que o conjunto das linguagens regulares é *fechado* sob operações regulares. I.e., dadas linguagens regulares L_1 e L_2, mostrar:

1. $L_1 \cup L_2$ é regular,
2. $L_1 \bullet L_2$ é regular,
3. L_1^* é regular.

2 e 3 serão provados adiante, depois de vermos NFA's. Já provamos 1.

Outras Construções

A ***diferença*** de dois conjuntos é definida por

$$A - B = \{X \in A \mid X \notin B\}$$

Q: Como modificar a construção da união/interseção para a diferença de duas linguagens?

Diferença

R: Aceite o string apenas quando o primeiro autômato aceita e o segundo não. I.e.

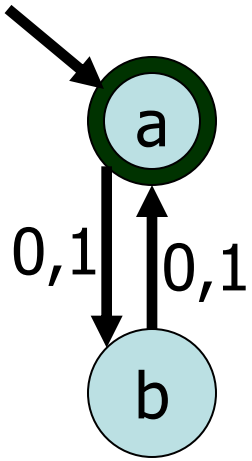
$$M_{-} = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta_1 \times \delta_2 , (q_{0,1}, q_{0,2}), F_{-})$$

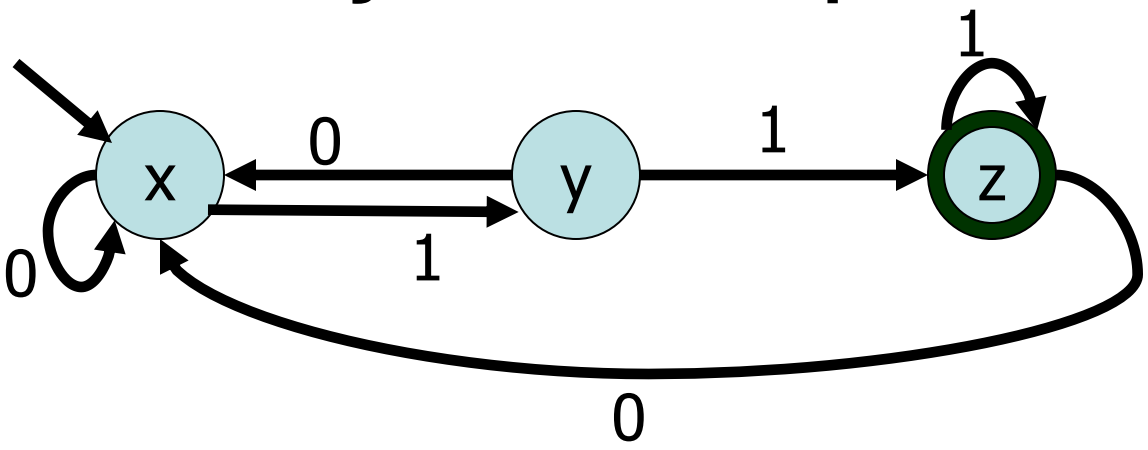
onde $F_{-} = F_1 \times Q_2 - Q_1 \times F_2$

Aplicando ao exemplo:

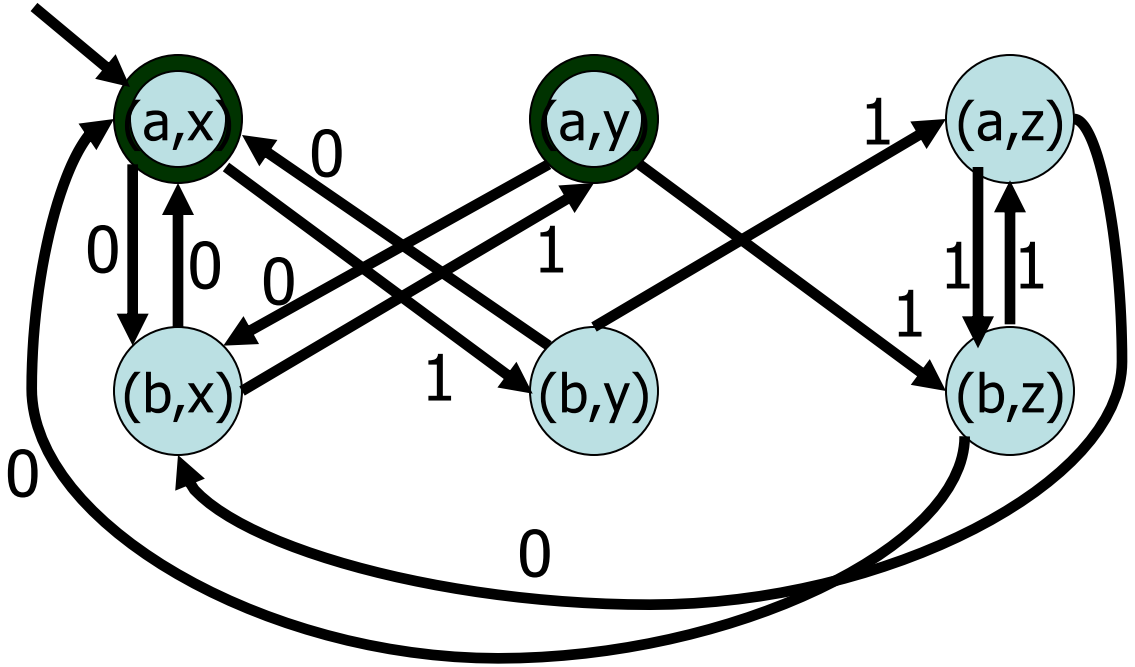
({0,1}{0,1})* - {0,1}*{11}

Diferença: Exemplo





Autômato Diferença:



Outras Construções

A ***diferença simétrica*** de dois conjuntos é

$$A \oplus B = A \cup B - A \cap B$$

Q: Como modificar a construção anteriror para aceitar a diferença simétrica de duas linguagens?

Diferença Simétrica

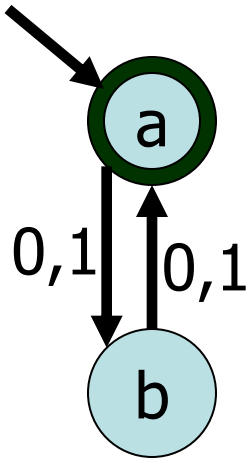
R: Aceite o string quando exatamente um dos automatas originais o aceita. I.e.

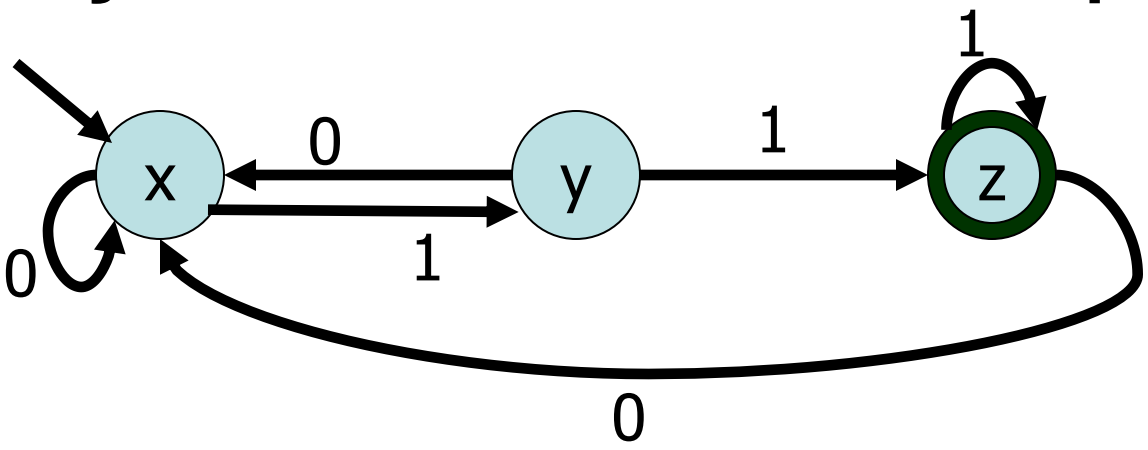
$$M_{\oplus} = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta_1 \times \delta_2, (q_{0,1}, q_{0,2}), F_{\oplus})$$

onde $F_{\oplus} = F_{\cup} - F_{\cap}$

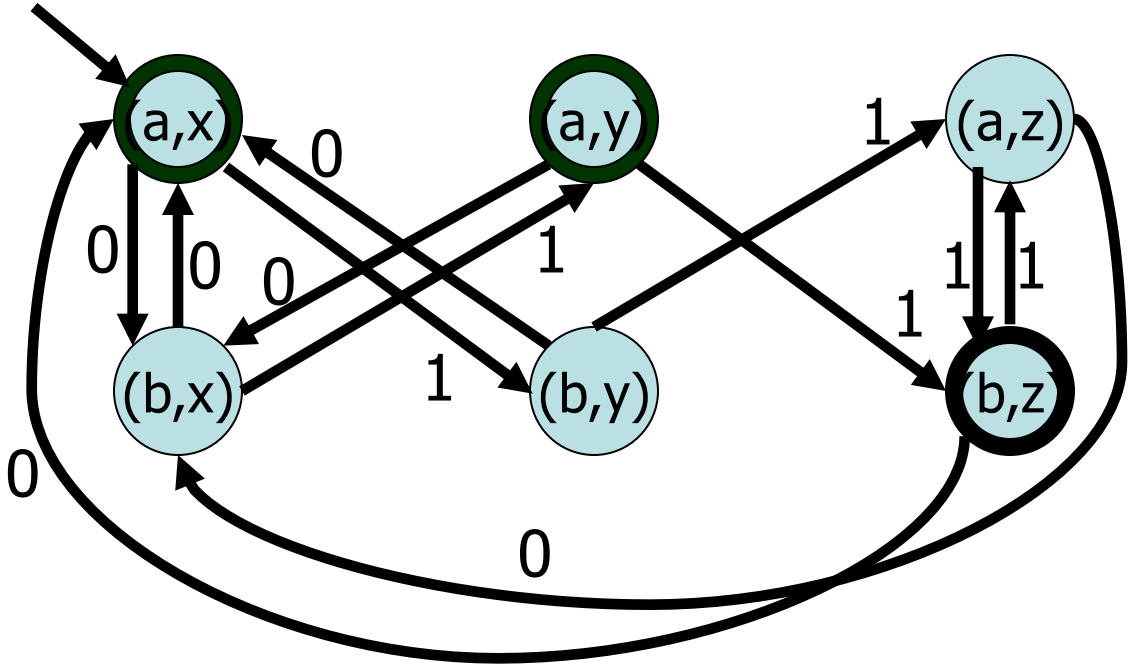
Aplicando ao nosso exemplo:

Diferença Simétrica: Exemplo





Autômato Diferença Simétrica:



Fecho de Linguagens Regulares - Resumo

Mostramos *construtivamente* que o conjunto das linguagens regulares é fechado sob as operations booleanas. I.e., dadas linguagens regulares L_1 e L_2 vimo que:

1. $L_1 \cup L_2$ is regular,
2. $L_1 \cap L_2$ is regular,
3. $L_1 – L_2$ is regular,
4. $L_1 \oplus L_2$ is regular,
5. $\overline{L_1}$ is regular.

No. 1 é também uma operação regular. Ainda precisamos mostrar que linguagens regulares são fechadas sob concatenação e Kleene-*.