# **NP**-Completo

# Problemas NP-Completos "Bolas Mágicas"

Já vimos antes alguns problemas "**NP**-completos". Um deles é o jogo de cartões perfurados. Quem encontrar uma solução polinomial para o problema geral desse jogo ganha o prêmio de e $1,000,000 e também dá a solução para milhares de outros problemas em **NP**.

Resolver qualquer outro problema **NP**-completo daria também os mesmos frutos, já que todos os problemas **NP**-completos são polinomialmente equivalentes entre si: se *P* e *Q* são **NP**-completos, então *P* reduz para *Q* em tempo polinomial e vice versa.

# Problemas NP-Completos

Lista de alguns problemas **NP**-completos:

1. SAT
2. CSAT
3. 3SAT
4. Jogo de Cartões Perfurados
5. Clique
6. Caixeiro Viajante (Traveling Salesperson)
7. Caminho Hamiltoniano

Veja muitos mais em "An Annoted List…" ou no livro de Garey e Johnson's.[1]

# NP-Completo Definição

Já sabemos que significa um problema estar em **NP**. Problemas **NP**-completos são aqueles em **NP** mas também **NP**-difíceis:

DEF: Uma linguagem *L* é ***NP-difícil*** se todo problema *L'* em **NP** reduz por mapeamento polinomial para *L*. Se, além disso, *L* está em **NP**, *L* então é dito ***NP-completo***.

# Mostrando que um problema é **NP**-Completo

Técnica padrão para mostrar que um problema é **NP**-completo.

1) Mostre diretamente que o problema é **NP**.
2) Escolha um problema que já se sabe que é **NP**-completo e mostre uma redução polinomial deste problema ao problema de interesse.

Tipicamente, para o passo (2) é usada alguma variante **NP**-completa de SAT.

# O jogo de cartões perfurados é **NP**-Completo

Vamos mostrar que o Jogo é **NP**-completo. Já fizemos o passo 1. Vamos agora reduzir CSAT ao Jogo em tempo polinomial:

*Prova de que* CSAT *reduz ao Jogo*: A redução Jogo ➔ CSAT é praticamente o reverso da redução CSAT ➔ Jogo, vista anteriormente.

# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

1st IDÉIA: Concentre-se só na coluna esquerda

1) Cada variável é um cartão.
2) Cada cláusula é uma linha.

Quando $x_i$ ocorre na cláusula *j*, o cartão *i* não tem furo na coluna esquerda da linha *j*.

Quando $\neg x_i$ ocorre na cláusula *j*, o cartão *i* não tem furo na coluna direita da linha *j*.

Portanto, o cartão *i* tapa exatamente os furos da esquerda das linhas que correspondem às cláusulas satisfeitas por $x_i$ , enquanto o cartão *i virado* tapa os furos da esquerda que correspondem às cláusulas satisfeitas por $\neg x_i$

# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

EX: Considere a conjunção de 4 cláusulas:

$$\phi = x \wedge y \wedge z \wedge x$$

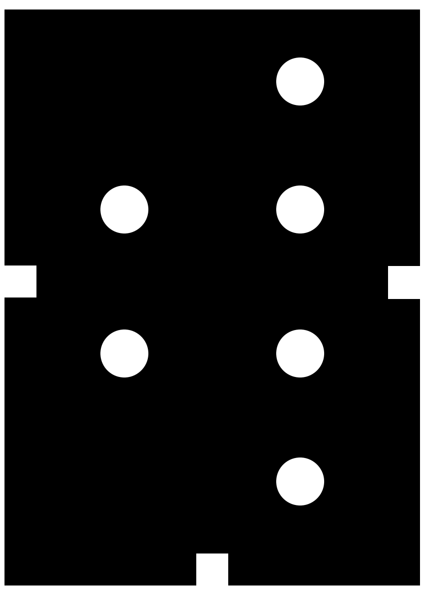
Devemos usar 3 cartões porque existem 3 variáveis, e 4 linhas, porque são 4 cláusulas.

# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

EX: Considere a conjunção de 4 cláusulas:

$$\phi = x \wedge y \wedge z \wedge x$$

Variável $x$

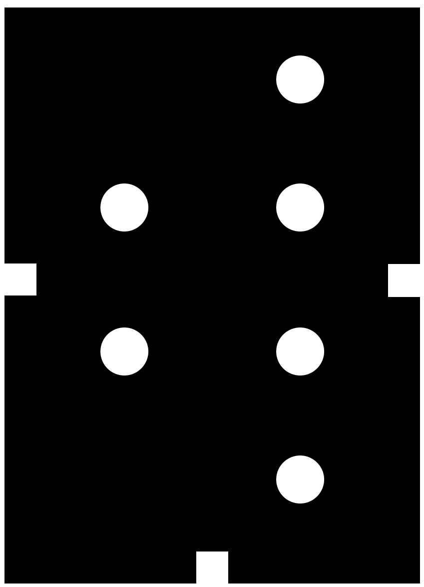


# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

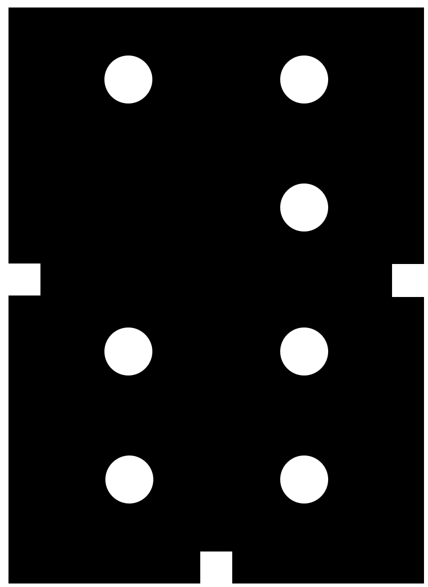
EX: Considere a conjunção de 4 cláusulas:

$$\phi = x \wedge y \wedge z \wedge x$$

Variável $x$



Variável $y$

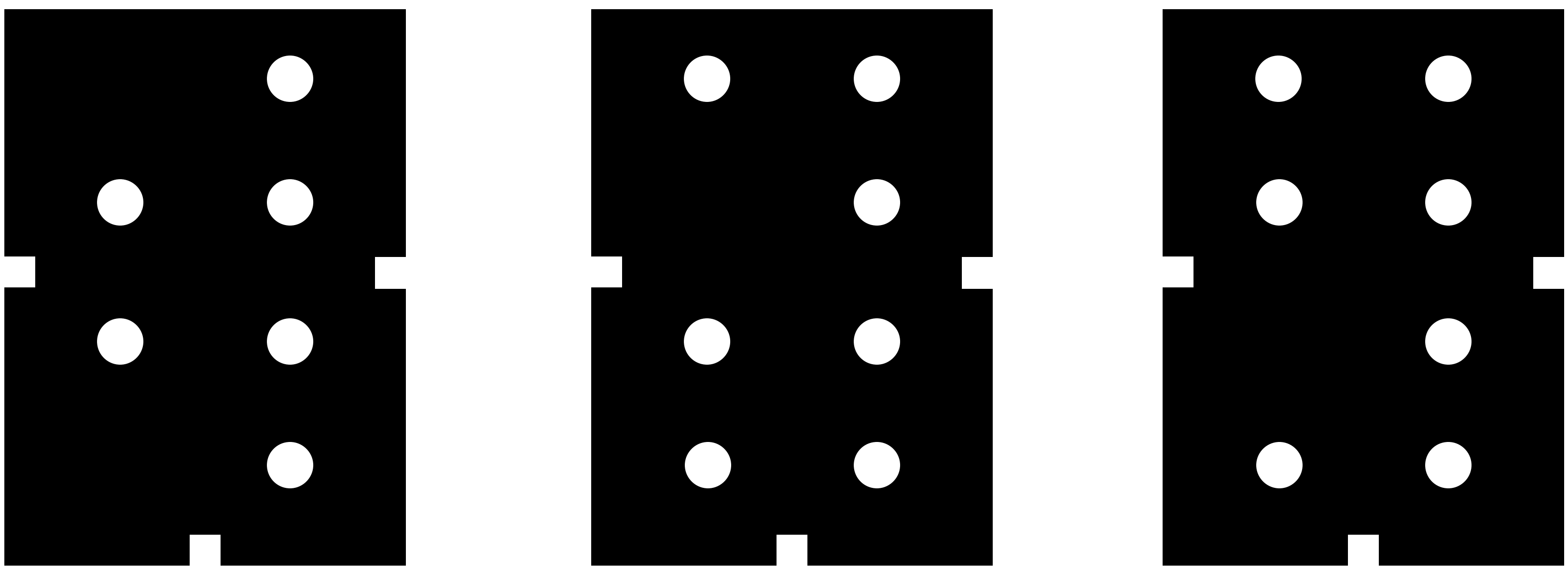


# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

EX: Considere a conjunção de 4 cláusulas:

$$\phi = x \wedge y \wedge z \wedge x$$

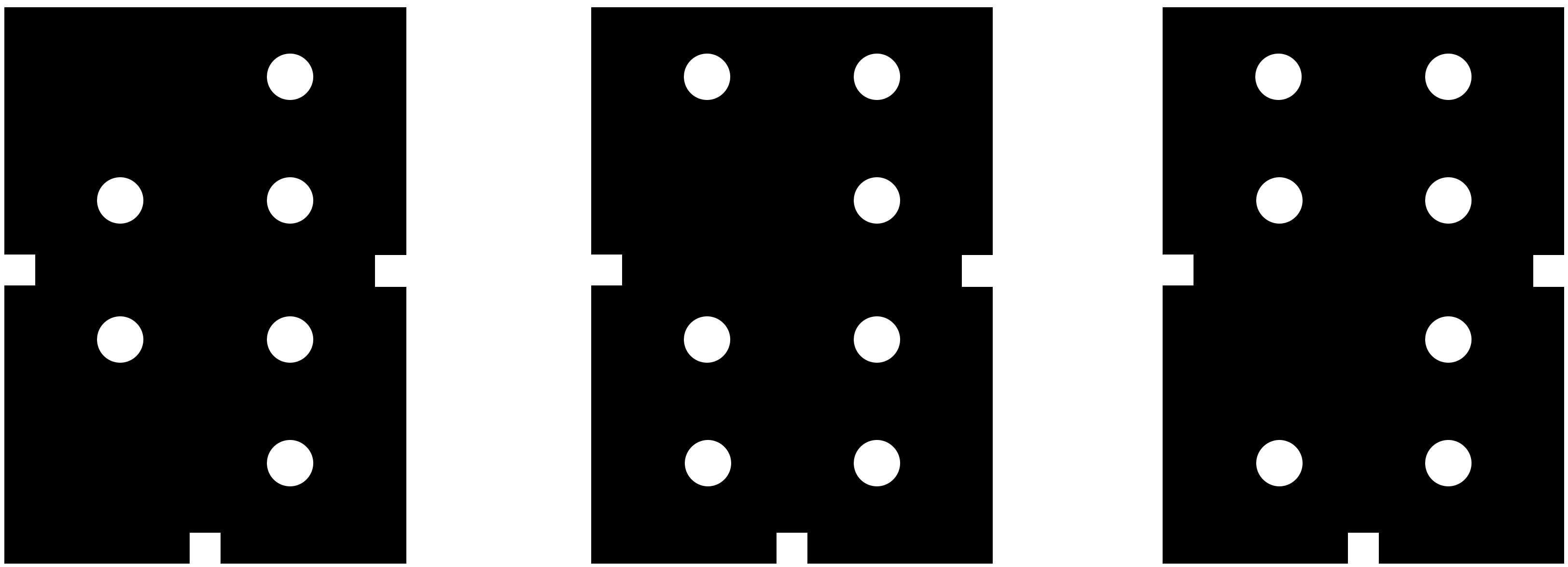
Variável *x* Variável *y* Variável *z*



Q: Algum problema?

# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

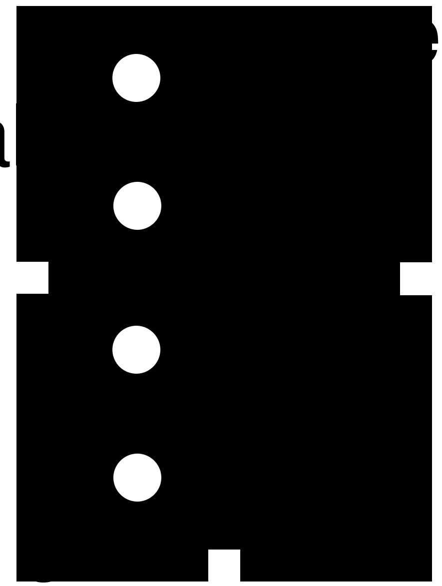
R: Uma coluna pode ser satisfeita, mas não ambas!



Q: Sugestão para corrigir o problema?

# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

R: (2ª. Idéia) Apenas adicione o cartão cuja coluna da direita está completamente tapada, a a coluna da erda completamente ely a



Claim: Isso funciona no caso

De fato…

# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

LEMA: Suponha que uma expressão booleana $\phi$ é transformada em um jogo conforme a 1ª. idéia. Então se $\phi$ não é satisfazível, nem 1 coluna pode ser tapada.

*Prova do lema*: Se 1 coluna pode ser tapada, podemos supor que é a coluna da esquerda, virando todos os cartões, caso contrário. Por construção, cada cartão tapa uma linha exatamente quando sua variável é "true". Portanto, tapar toda a coluna da esquerda significa que $\phi$ é satisfazível. Mostramos que, mesmo quando apenas uma coluna é tapada, $\phi$ é satisfazível, o que é equivalente ao lema.

# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

*Prova de que* 2a. *idéia funciona*:

CASO I. Se $\phi$ é satisfazível então a coluna da esquerda é tapada, e adicionar o último cartão garante que o jogo tem solução.

CASE II. Se $\phi$ não é satisfazível, então, pelo lema anterior, nenhuma das duas colunas é tapada. Adicionar o último cartão tapa só coluna direita e, portanto, o jogo permanece sem solução

Portanto, $\phi$ é satisfazíel sse o jogo contruído tem solução, o que prova a redução de CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados.

# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

Vejamos como funciona e um exemplo mais interesssante que $x \wedge y \wedge z \wedge x$.

Converta

$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$

# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

Converta

$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$

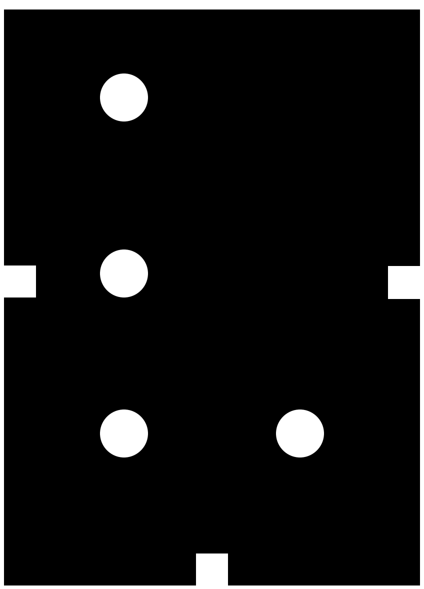
Existem 4 variáveis, portanto 4 cartões.
Existem 3 cláusulas, então 3 linhas.

# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

Converta

$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$

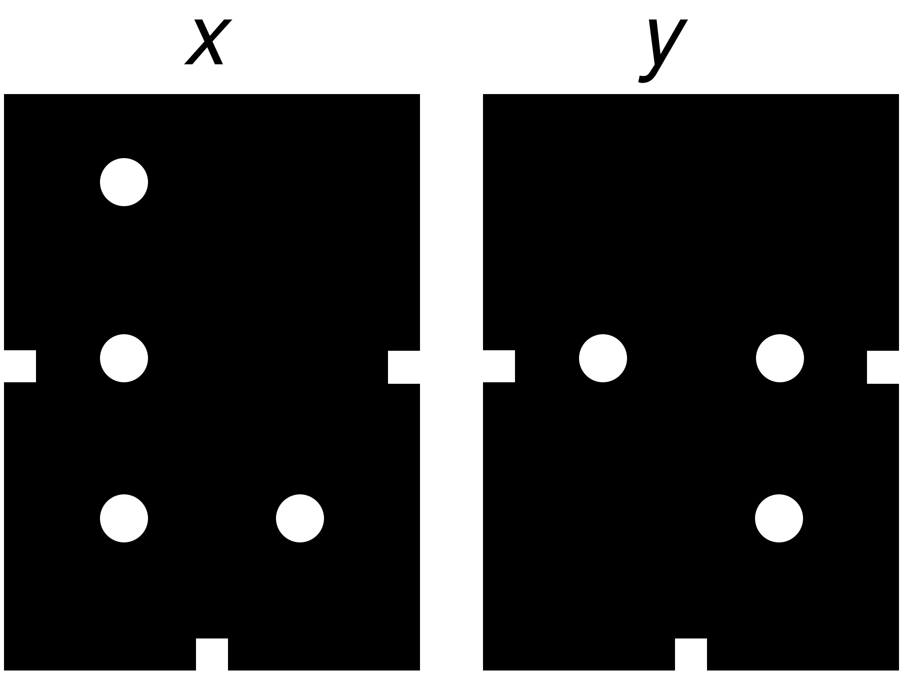
$x$



# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

Converta

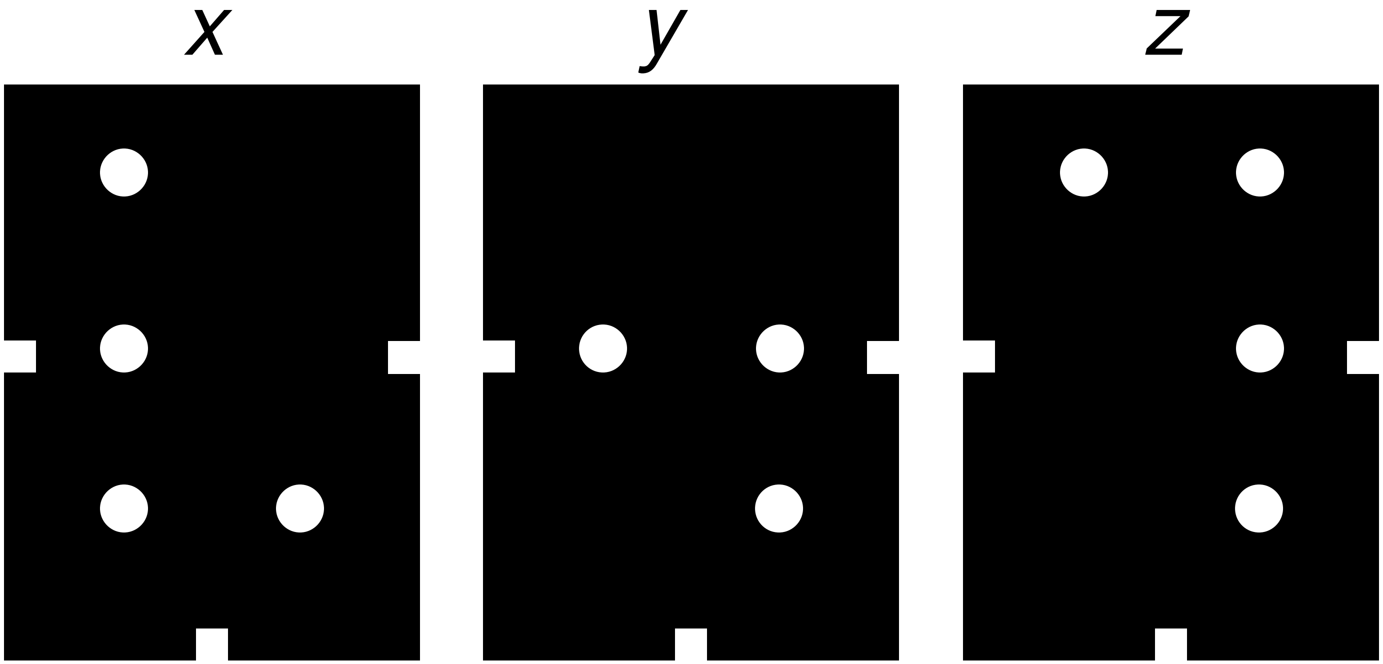
$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$



# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

Converta

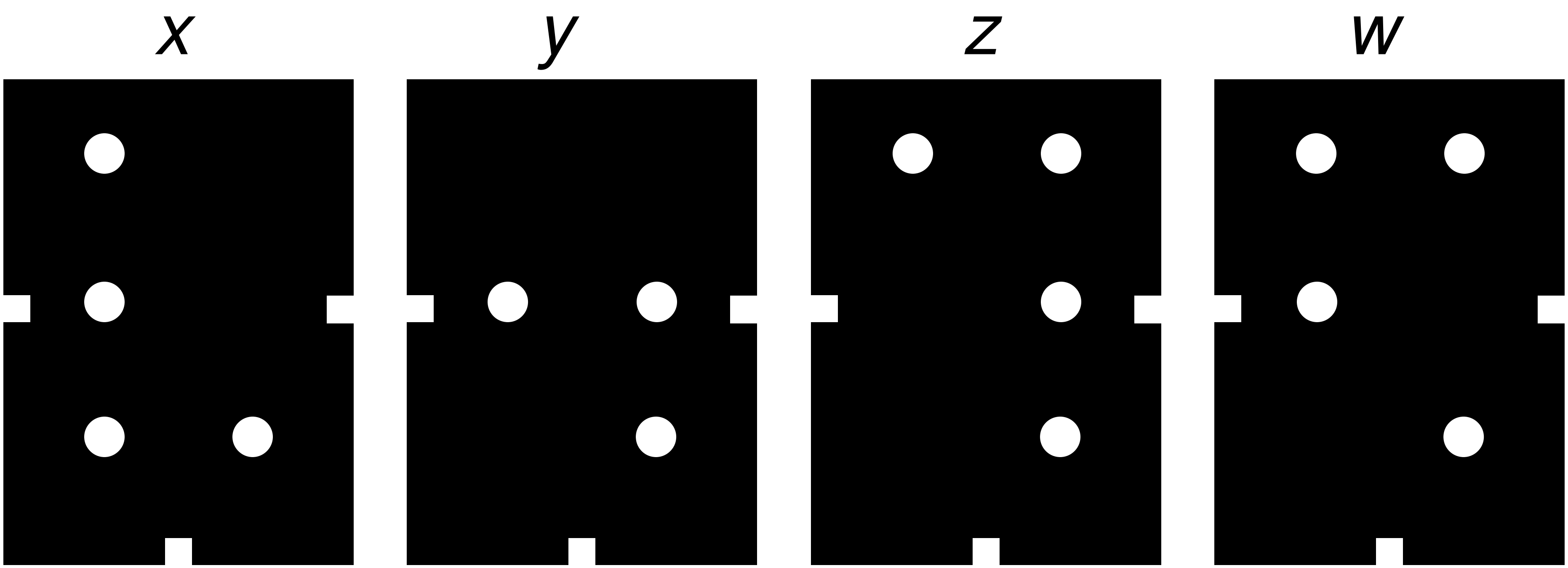
$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$



# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

Converta

$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$




Q: A fórmula é satisfazível?

# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$

R: Sim. Tome $y = z =$ true, $x, w =$ qualquer.

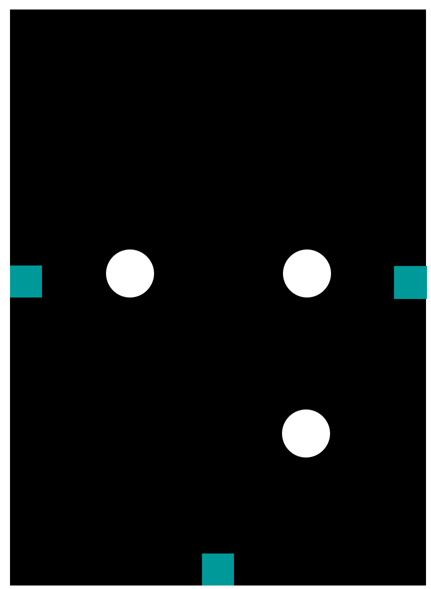
Em termos dos cartões, isso significa que se pode tapar a coluna esquerda usando apenas o 2º. e o 3º. cartões:

# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$

Em termos dos cartões, isso significa que se pode tapar a coluna esquerda usando apenas o 2º. e o 3º. cartões:

+ 2º. cartão:

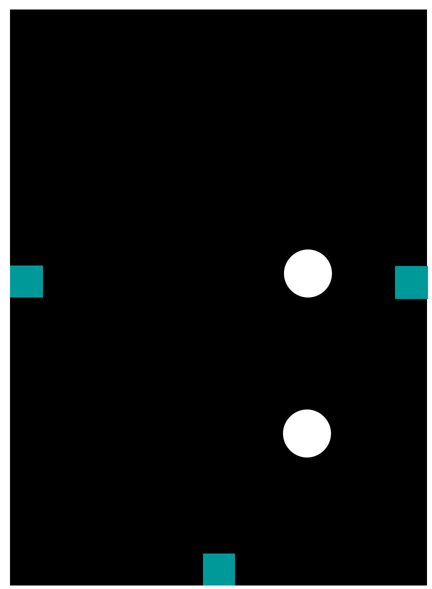


# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$

Em termos dos cartões, isso significa que se pode tapar a coluna esquerda usando apenas o 2º. e o 3º. cartões:

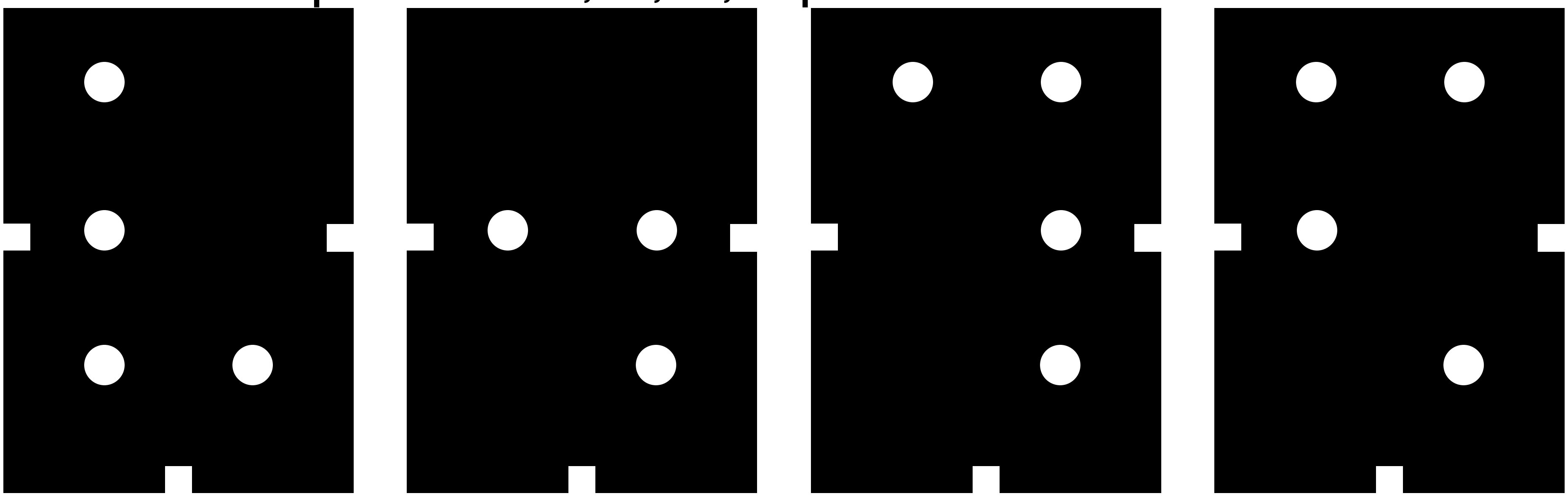
+ 3º. cartão:



# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$

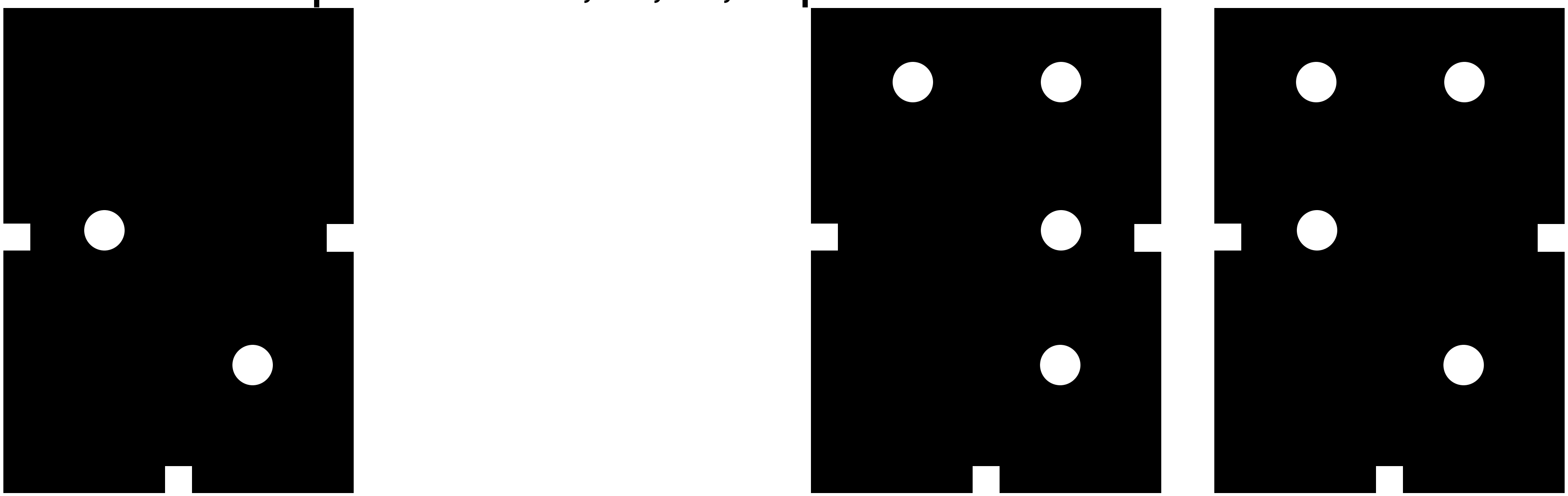
Note que não precisamos do cartão com a coluna direita tapada. Isso porque poderíamos usar a sequência: 1, 2, 3, flip 4.



# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$

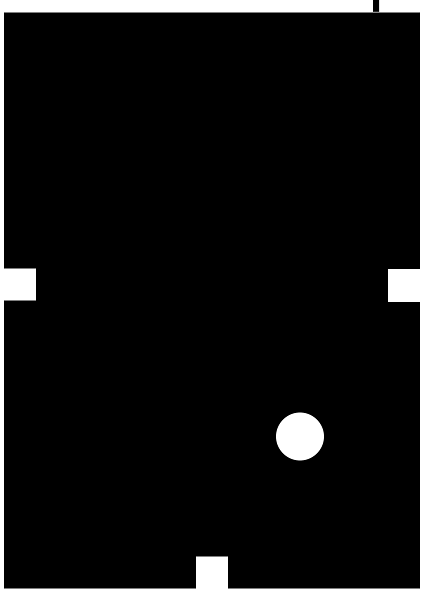
Note que não precisamos do cartão com a coluna direita tapada. Isso porque poderíamos usar a sequência: 1, 2, 3, flip 4.

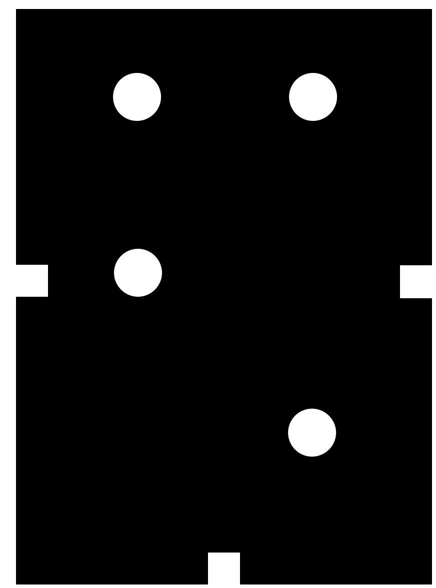


# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$

Note que não precisamos do cartão com a coluna direita tapada. Isso porque poderíamos usar a sequência: 1, 2, 3, flip 4.

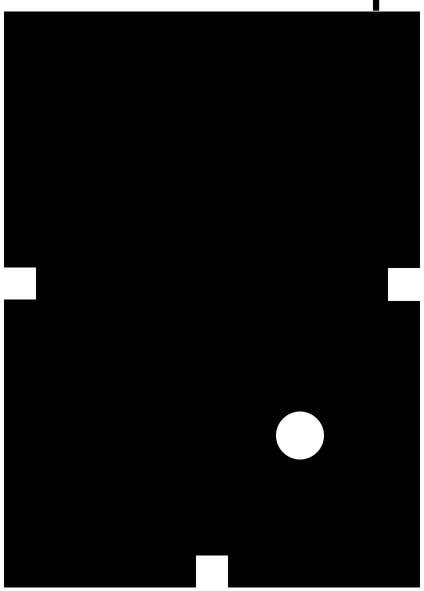


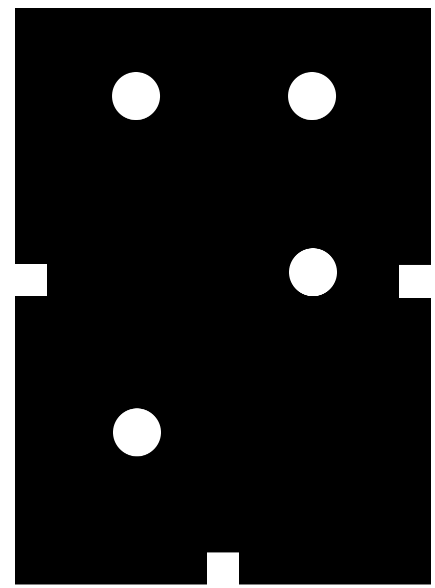


# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$

Note que não precisamos do cartão com a coluna direita tapada. Isso porque poderíamos usar a sequência: 1, 2, 3, flip 4.

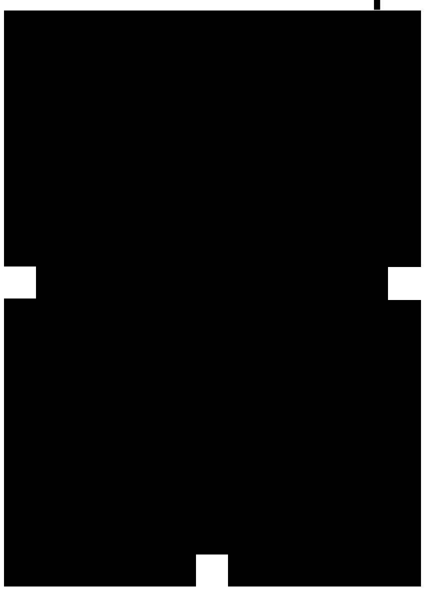




# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

$$(\neg x \vee y \vee \neg y)\wedge(\neg x \vee z \vee \neg w)\wedge(y \vee z \vee w)$$

Note que não precisamos do cartão com a coluna direita tapada. Isso porque poderíamos usar a sequência: 1, 2, 3, flip 4.



Q: O que isso significa em termo da fórmula?

# Reduzindo CSAT ao Jogo de Cartões Perfurados

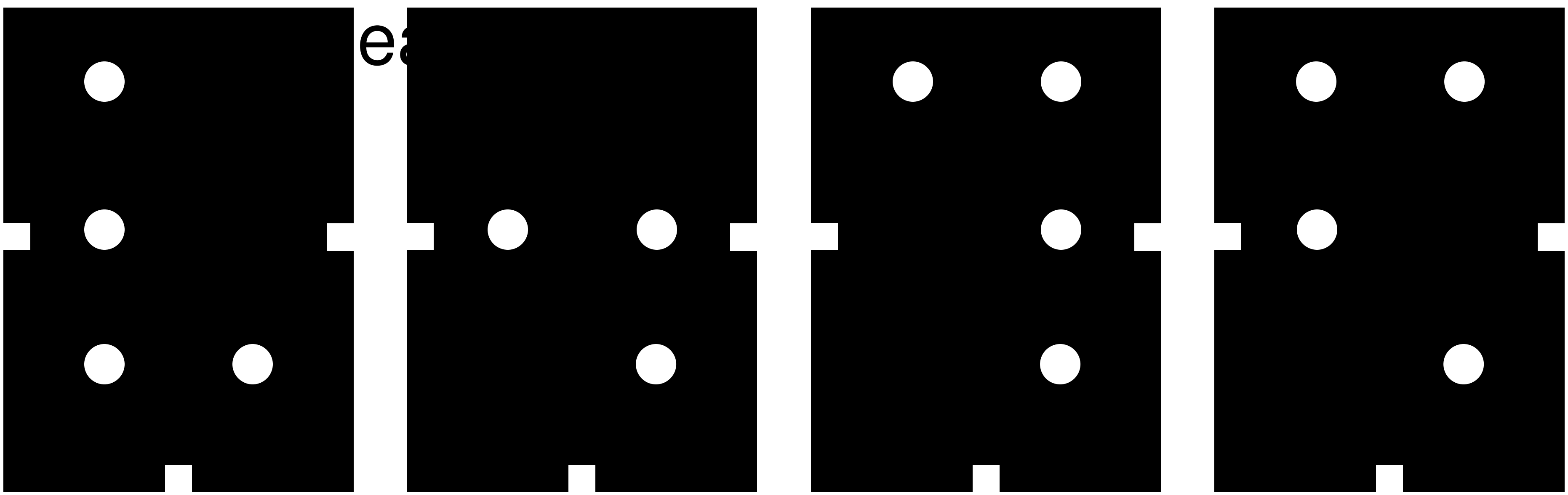
$$(\neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z \vee \neg w) \wedge (y \vee z \vee w)$$

R: $x = y = z =$ true, $w =$ false *e*

$x = y = z =$ false, $w =$ true (*antípoda*)

são ambas soluções da fórmula

ea



# Problema **P** vs. **NP**

O mais importante problema em aberto da Teoria da Computação é determinar se **P** é estritamente contido em **NP**. Intuitivamente, parece não haver uma maneira de simular um número exponencial de ramos de computação de uma NTM em tempo polinomial.

# Hierarquia Conjecturada

Dentro de DEC (decidível) conjecturamos: