

Linguagens Não Decidíveis

Linguagens Não Decidíveis

Existem questões de natureza computacional que não podem ser resolvidas por meio de um algoritmo? Uma possível abordagem para responder a essa pergunta é codificar problemas como linguagens e perguntar:

- Existem linguagens não decidíveis?
- Existem linguagens que não são nem mesmo reconhecíveis?
- Podemos construir um exemplo específico de linguagem não decidível?
- Existem linguagens não decidíveis de importância prática?

Linguagens Não Decidíveis

Prova de Existência

Vamos começar com uma prova indireta de que existem linguagens não decidíveis. De fato, vamos provar que existem linguagens não **reconhecíveis**, e nem **co-reconhecíveis**:

Lembre-se que uma linguagem L sobre um alfabeto Σ é reconhecível se existe uma TM que aceita todo string $s \in L$ (podendo possivelmente entrar em loop se $s \notin L$).

DEF: Uma linguagem L sobre o alfabeto Σ é **coreconhecível** se $\Sigma^* - L$ é reconhecível.

Linguagens Não Decidíveis

Prova de Existência

A idéia é simples: Vamos mostrar que existem mais linguagens do que TM's (ou programas).

Note que essa prova não é construtiva: mostra que deve existir uma linguagem não reconhecível mas não mostra qual ela seria.

Toda TM pode ser codificada como um string binário. Consequentemente, a cardinality¹ do conjunto de TM's não é maior que a de $\{0,1\}^*$.

THM: O conjunto de strings $\{0,1\}^*$ é *enumerável*.

Conjunto Enumerável

Relembre a noção de conj. *enumerável*:

- Um conjunto S é *contável* se existe uma função injetora $f : S \rightarrow \mathbf{N}$ de S para o conjunto dos números naturais. Um conjunto infinito é *enumerável* se existe uma bijeção $\mathbf{N} \rightarrow S$. (i.e., S é dito enumerável se é infinito e contável).

Enumerabilidade de $\{0,1\}^*$

Prova. Intuitivamente podemos obter uma função injetora $f: \mathbf{N} \rightarrow \{0,1\}^*$ listando os strings em ordem lexicográfica:

ε 0 1 00 01 10 11 000 001 010 011 100...

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12...

Podemos definir f recursivamente:

$$f(n) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{if } n = 1 \\ 0^{k+1}, & \text{if } f(n-1) = 1^k \\ u01^k, & \text{if } f(n-1) = u10^k \end{cases}$$

Enumerabilidade de {Linguagens-TM}

Consequentemente, como toda TM é descrita por um bitstring, apenas podem existir tantas TM's quanto bitstrings.

Não Enumerabilidade de $P(\Sigma^*)$

Veremos entretanto, a seguir, que o conjunto potência $P(\{0,1\}^*)$ – o conjunto de todas as linguagens binárias! – não é contável. Como corolário, o número de linguagens binárias é maior do que o de linguagens reconhecíveis ou co-reconhecíveis. Portanto:

THM: Existe uma linguagem binária que não é nem reconhecível nem coreconhecível.

Vamos então provar que $P(\{0,1\}^*)$ não é contável:

Não Enumerabilidade de $P(\Sigma^*)$

Note que qq subconjunto $T \in P(\Sigma^*)$ pode ser visto como uma função $f: \Sigma^* \rightarrow \{0,1\}$: $f(x) = 1$ se $s \in T$; $f(x) = 0$ se $s \notin T$.

EX: Considere a função $f: \Sigma^* \rightarrow \{0,1\}$ defined by the following table:

x	ϵ	0	1	00	01	10	11	000	001	010	011	100	101	111	0000	...
$f(x)$	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	...

Q: Qual é a linguagem representada por f ?

Não Enumerabilidade de $P(\Sigma^*)$

x	ε	0	1	00	01	10	11	000	001	010	011	100	101	111	0000	...
$f(x)$	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	...

R: f representa **pal.**

Suponha que $P(\Sigma^*)$ fosse enumerável. Então seria possível obter uma bijeção de \mathbf{N} em $P(\Sigma^*)$ e portanto listar todas as linguagens binárias em uma sequência

$$L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, \dots$$

que supostamente contém *toda* linguagem de bitstrings. Essa lista determina uma tabela cujas linhas descrevem a função característica associada a cada linguagem:

Não Enumerabilidade de $P(\Sigma^*)$

← strings in $\{0,1\}^*$ →

	ε	0	1	00	01	10	11	...
L_1	1	1	1	1	0	0	1	
L_2	0	0	0	0	0	0	0	
L_3	1	0	0	0	0	0	0	
L_4	1	1	0	1	0	0	0	
L_5	1	1	1	1	1	1	1	
L_6	0	0	1	0	0	0	1	
L_7	1	0	0	1	1	1	1	
...								

Não Enumerabilidade de $P(\Sigma^*)$

Diagonal Diabólica de Cantor

Usando o argumento de *diagonalização* de Cantor podemos criar L_{evil} – uma linguagem que *não* está na lista. I.e., usamos a tabela para criar uma linha que se poderá provar que não está na tabela, provando que a tabela não contém todas as linguagens binárias – o que contradiz a hipótese de que $P(\Sigma^*)$ é enumerável.

Não Enumerabilidade de $P(\Sigma^*)$

Diagonal Diabólica de Cantor

L_{evil} é criada do seguinte modo: A coluna j de L_{evil} é o oposto da coluna j da linha j de L_j . Em outras palavras, L_{evil} é a **anti-diagonal** da tabela. Isso garante que L_{evil} difere de todas as linguagens listadas na tabela em pelo menos um string: Se L_j contém o $j^{\text{ésimo}}$ string, então L_{evil} não o contém, e se L_j não contém o $j^{\text{ésimo}}$ string, então L_{evil} o contém.

Vejamos como isso é feito:

Diagonalização de Cantor

← strings in $\{0,1\}^*$ →

	ε	0	1	00	01	10	11	...
L_1								
L_2								
L_3								
L_4								
L_5								
L_6								
L_7								
...								
L_{evil}								

Diagonalização de Cantor

← strings in $\{0,1\}^*$ →

	ε	0	1	00	01	10	11	...
L_1	1	1	1	1	0	0	1	
L_2								
L_3								
L_4								
L_5								
L_6								
L_7								
...								
L_{evil}	0							

Diagonalização de Cantor

← strings in $\{0,1\}^*$ →

	ε	0	1	00	01	10	11	...
L_1	1	1	1	1	0	0	1	
L_2	0	0	0	0	0	0	0	
L_3								
L_4								
L_5								
L_6								
L_7								
...								
L_{evil}	0	1						

Diagonalização de Cantor

← strings in $\{0,1\}^*$ →

	ε	0	1	00	01	10	11	...
L_1	1	1	1	1	0	0	1	
L_2	0	0	0	0	0	0	0	
L_3	1	0	0	0	0	0	0	
L_4								
L_5								
L_6								
L_7								
...								
L_{evil}	0	1	1					

Diagonalização de Cantor

← strings in $\{0,1\}^*$ →

	ε	0	1	00	01	10	11	...
L_1	1	1	1	1	0	0	1	
L_2	0	0	0	0	0	0	0	
L_3	1	0	0	0	0	0	0	
L_4	1	1	0	1	0	0	0	
L_5								
L_6								
L_7								
...								
L_{evil}	0	1	1	0				

Diagonalização de Cantor

← strings in $\{0,1\}^*$ →

	ε	0	1	00	01	10	11	...
L_1	1	1	1	1	0	0	1	
L_2	0	0	0	0	0	0	0	
L_3	1	0	0	0	0	0	0	
L_4	1	1	0	1	0	0	0	
L_5	1	1	1	1	1	1	1	
L_6								
L_7								
...								
L_{evil}	0	1	1	0	0			

Diagonalização de Cantor

← strings in $\{0,1\}^*$ →

	ε	0	1	00	01	10	11	...
L_1	1	1	1	1	0	0	1	
L_2	0	0	0	0	0	0	0	
L_3	1	0	0	0	0	0	0	
L_4	1	1	0	1	0	0	0	
L_5	1	1	1	1	1	1	1	
L_6	0	0	1	0	0	0	0	1
L_7								
...								
L_{evil}	0	1	1	0	0	1		

Diagonalização de Cantor

← strings in $\{0,1\}^*$ →

	ε	0	1	00	01	10	11	...
L_1	1	1	1	1	0	0	1	
L_2	0	0	0	0	0	0	0	
L_3	1	0	0	0	0	0	0	
L_4	1	1	0	1	0	0	0	
L_5	1	1	1	1	1	1	1	
L_6	0	0	1	0	0	0	1	
L_7	1	0	0	1	1	1	1	
...								
L_{evil}	0	1	1	0	0	1	0	

Uma linguagem não decidível

Agora sabemos que existe uma linguagem não reconhecível. De fato, a *maioria* das linguagens são não reconhecíveis, já que a cardinalidade de $P(\Sigma^*)$ é um infinito maior do que o da cardinalidade de Σ^* ! Entretanto, a prova existencial não é construtiva.

Gostaríamos de encontrar um exemplo de tal linguagem.

THM: A_{TM} é reconhecível, mas não decidível

A_{TM} : Reconhecível mas Não Decidível

A_{TM} pode ser reconhecida do seguinte modo:

“Sobre a entrada $\langle M, x \rangle$:

1. Simule a execução da TM M sobre x
2. Se M aceita, então ACCEPT”

Esse algoritmo nos diz quando strings são aceitos, mas se o string é rejeitado, pode não haver uma saída, já que M pode, nesse caso, entrar em um loop infinito e, portanto, o algoritmo também entraria em loop ao simular M .

A_{TM} : Reconhecível mas Não Decidível

A_{TM} não é decível:

Suponha por contradição, que A_{TM} seja decidível. Então existe alguma TM, digamos D , que decide A_{TM} . Considere a codificação implícita $M \rightarrow \langle M \rangle$. Vamos usar D para construir uma TM diabólica E (usando diagonalização de Cantor), de modo a mostrar que A_{TM} não pode ser decidível.

A TM diabólica

$E =$ “Sobre a entrada w

1. Se w não codifica uma TM, REJECT.
2. Senão, seja M a TM codificada por w
Simule a execução da máquina D sobre a entrada $\langle M, w \rangle$.
3. Se D aceita, REJECT
4. Se D rejeita, ACCEPT”

Como D é um decisor, E também o é.

A TM diabólica

Permanece a seguinte incômoda questão:

E aceita ou rejeita o próprio código $\langle E \rangle$?

CASO 1) Aceita. Então D rejeita a entrada $\langle E, \langle E \rangle \rangle$. Portanto, pelo passo 4 do pseudocódigo de E , temos que E não aceita $\langle E \rangle$. Isso contradiz a hipótese de aceitação!

CASE 2) Rejeita. Então D aceita a entrada $\langle E, \langle E \rangle \rangle$. Portanto, pelo passo 3 do pseudocódigo de E , temos que E aceita $\langle E \rangle$. Isso contradiz a hipótese de rejeição!

Como nenhum caso pode ocorrer, conclui-se que D não pode existir! \square

Consequências em Java

A não decidibilidade de A_{TM} tem consequências importantes:

THM (assumindo a tese de Church-Turing):

Não existe um algoritmo capaz de decidir se um programa Java arbitrário pára. I.e. a linguagem

$\text{Halt}_{\text{Java}} = \{ \text{programas Java que} \\ \text{eventualmente páram} \}$

não é decidível.

Não decidibilidade de $\text{Halt}_{\text{Java}}$

Porque? Suponha que $\text{Halt}_{\text{Java}}$ fosse decidível. Note que existem simuladores de TM's escritos em Java. Tal simulador **TMSimulate.java** tem como entrada dois argumentos – **arg1**, **arg2** – sendo **arg1** a codificação de uma TM e **arg2** um string sobre o qual a TM será executada. O simulador **TMSimulate.java** contém um método:

```
public static boolean run(String arg1, String arg2)
que retorna true sse  $M$  accepts arg2.
```

Não decidibilidade de $\text{Halt}_{\text{Java}}$

A contradição: O seguinte programa então resolveria A_{TM} , contradizendo o fato de que esse problema não é decidível (assumindo que TM's podem, por sua vez, simular – o que segue da tese de Church-Turing, mas pode também ser demonstrado diretamente).

Não decidibilidade de $\text{Halt}_{\text{Java}}$

```
public class D{
    public static void main(String[] args) {
        if (TMSimulate.run(args[0], args[1]))
            System.exit(0);
        else
            while (true);
    }
}
```

Portanto, se existisse um algoritmo para decidir a parada de programas Java, ele poderia decidir A_{TM} , verificando quando o programa acima pára!

Não decidibilidade de E_{TM} e EQ_{TM}

Lembre-se que E_{TM} é o problema definido como:

“Dada uma TM M , $L(M) = \emptyset$?”

E EQ_{TM} é o problema de igualdade:

“Dadas TM's M e M' , $L(M) = L(M')$?”

Note que EQ_{TM} é pelo menos tão difícil quanto E_{TM} , pois E_{TM} é um caso especial de EQ_{TM} .

Q: Porque?

Não decidibilidade de E_{TM} e EQ_{TM}

R: Basta que a segunda TM M' seja uma TM que rejeita qualquer entrada!

Portanto, para provar que EQ_{TM} não é decidível basta mostrar que E_{TM} não é decidível:

THM: E_{TM} não é decidível.

Prova. Suponha que E_{TM} seja decidível. Seja F um decisor para E_{TM} . Vamos usar F para resolver A_{TM} , aplicando F a uma classe de TM's cujo propósito é codificar instâncias do problema de aceitação como instâncias do problema de linguagem vazia.

Não decidibilidade de E_{TM} e EQ_{TM}

Dada uma TM M e um string w construímos a TM $K_{M,w}$ cuja linguagem é não vazia sse w é aceito por M . A descrição de $K_{M,w}$ é a seguinte:

“Sobre a entrada x

1. Apague x e substitua por w .
2. Simule a execução de M sobre a entrada w .”

Então, se M aceita w , $K_{M,w}$ aceita *qualquer* x ! Por outro lado, se M não aceita w , então $K_{M,w}$ rejeita todo x ou entra em loop infinito para todo x . Resumindo:

$$L(K_{M,w}) = \begin{cases} \Sigma^*, & \text{if } w \in L(M) \\ \{ \}, & \text{if } w \notin L(M) \end{cases}$$

Não decidibilidade de E_{TM} e EQ_{TM}

Se E_{TM} fosse decidível poderíamos decidir quando $L(K_{M,w})$ é vazia e, portanto, decidir quando M aceita w , já que:

$$L(K_{M,w}) = \begin{cases} \Sigma^*, & \text{if } w \in L(M) \\ \{\}, & \text{if } w \notin L(M) \end{cases}$$

Isso completa a prova de que E_{TM} e, por consequência, EQ_{TM} não são decidíveis \square

A idéia é um caso particular de uma técnica geral para mostrar que um novo problema não é decidível: usar *redução* de um problema não decidível p/ esse problema.

Não Decidibilidade de ALL_{TM}

O mesmo fato

$$L(K_{M,w}) = \begin{cases} \Sigma^*, & \text{if } w \in L(M) \\ \{\}, & \text{if } w \notin L(M) \end{cases}$$

mostra que o problema de determinar se uma TM aceita todas as entradas também não é decidível. Formalmente:

ALL_{TM} = “Dada uma TM M , $L(M) = \Sigma^*$?”

Q: E_{TM} é reconhecível? É co-reconhecível? E ALL_{TM} ?

Mais sobre E_{TM}

R: E_{TM} é co-reconhecível, mas não reconhecível:

Podemos dizer quando a linguagem de uma TM *não* é vazia, simulando a TM para todas as entradas e então produzindo a saída NÃO-VAZIA quando a TM aceita algum string. E_{TM} não é reconhecível, porque, caso o fosse, isso significaria que E_{TM} seria decidível, o que já provamos que não é verdade.

Mais sobre ALL_{TM}

ALL_{TM} é um exemplo de linguagem que não é reconhecível, nem co-reconhecível. Portanto, é um exemplo explícito de linguagem que anteriormente provamos existir, pelo argumento de cardinalidade. Não podemos dizer “NÃO” para ALL_{TM} pois, invertendo o argumento anterior, isso significaria que poderíamos dizer “NÃO” para A_{TM} . Portanto, ALL_{TM} não é co-reconhecível. Além disso, ALL_{TM} não é reconhecível, como se mostra a seguir:

ALL_{TM} : Nem Reconhecível nem Coreconhecível

Suponha que ALL_{TM} seja reconhecível. Como TM's enumeradoras podem ser convertidas para TM's aceitadoras, poderíamos reconhecer se uma TM enumera todos os strings. P/ cada par TM-string (M, w) , considere o enumerador $E_{M,w}$:

1. Simule execução de M sobre w em *background*.
2. Ao mesmo tempo, imprima Σ^* .
3. Se a simulação em *background* aceita, PARE!
4. Se rejeita, imprima Σ^* indefinidamente.

Por construção, $L(E_{M,w}) = \Sigma^*$ sse M não aceita w .
Responder "SIM" para ALL_{TM} significa responder "NÃO" para A_{TM} , o que é impossível!

Exercício

- A linguagem L_d , a “linguagem da diagonalização”, que consiste de todos os strings w tais que a TM representada por w não aceita a entrada w , é reconhecível?