Projeto e Análise de Algoritmos
Aula 8:
Algoritmos Gulosos (DPV 5; CLRS 4)

DECOM/UFOP
2013/1 – 5º. Período
Anderson Almeida Ferreira
Adaptado do material de Andréa Iabrudi Tavares

Comparação dos Problemas

Seja um grafo G=(V,E) e uma função de custo w, pede-se

- Caixeiro Viajante
  Ciclo que passe uma única vez por todos os vértices e tenha peso mínimo.

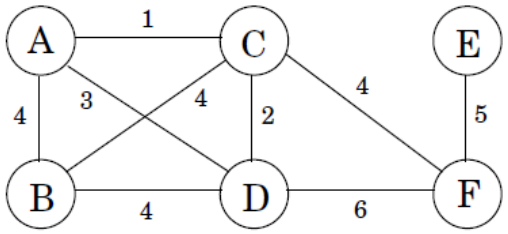
- Árvore Geradora Mínima
  Árvore que passe por todos os vértices e tenha peso mínimo.

Algoritmos Gulosos

- Algoritmos míopes
  - Escolha “óbvia” a cada passo
  - Escolhe e depois resolve subproblema.
  - Solução construtiva.
- Quando é ótimo
  - Melhor decisão local é melhor decisão global.
  - Mostrar que a solução é ótima normalmente ajuda a formular o problema.
  - Sub-estrutura ótima (princípio da otimalidade)

Árvores Geradoras Mínimas (AGM)

- Conectar computadores por rede, cada link com um custo de manutenção



Propriedades

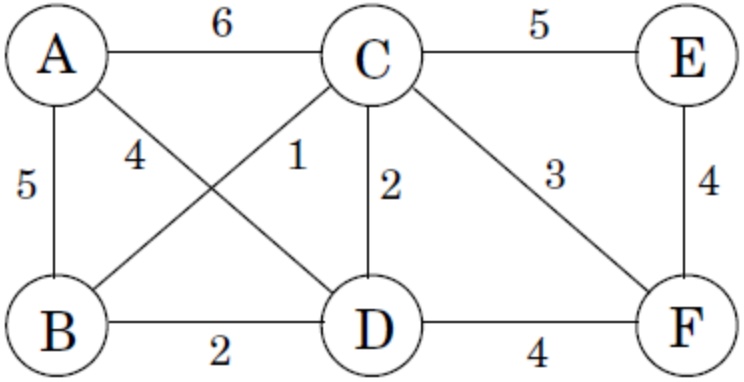
Grafo G=(V,E,w) conexo n=|V|
Solução é uma árvore (n-1 arestas)

Formulação

Dado um grafo G=(V,E,w), encontrar árvore A=(V,E_A ,w) $E_A \subseteq E$ tal que w(E_A) é mínimo.

Guloso AGM: Algoritmo de Kruskal

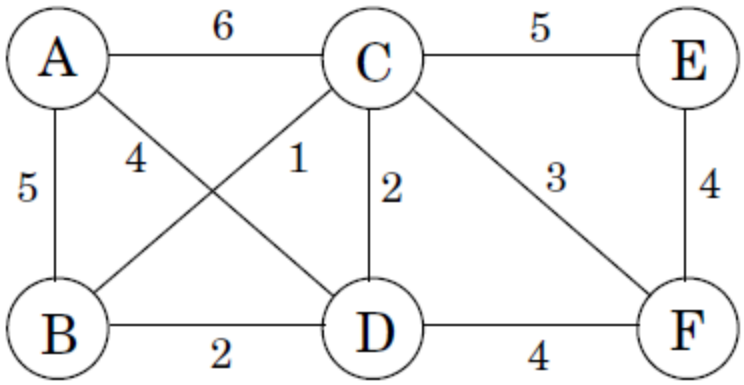
- Adicione sempre a aresta de menor peso que não forma ciclo (1956).

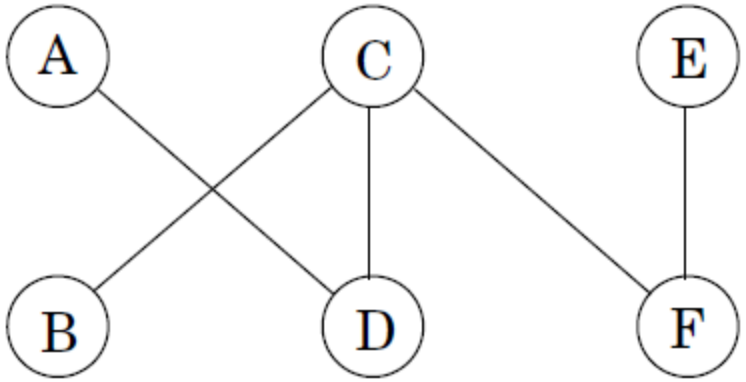


Desempates: ordem lexicográfica

Guloso AGM: Algoritmo de Kruskal

- Adicione sempre a aresta de menor peso que não forma ciclo.

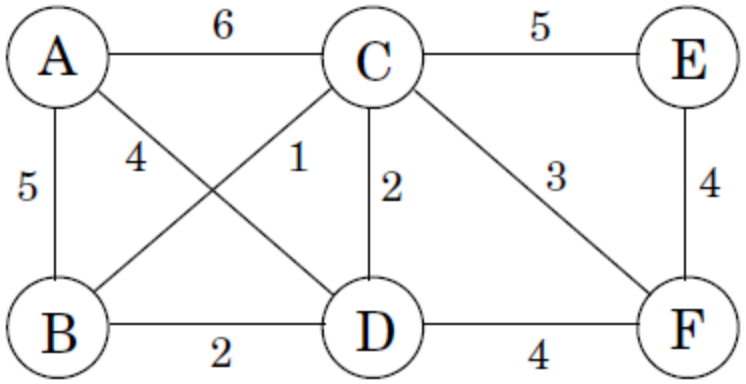




Está correto, ou seja, é ótimo?????

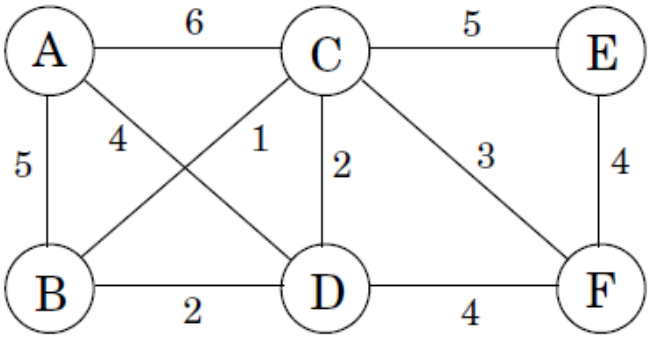
Kruskal está correto: cortes

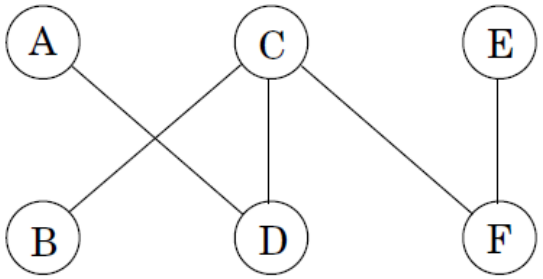
- Partição (S,V-S) ou
  de forma equivalente conjunto de arestas.

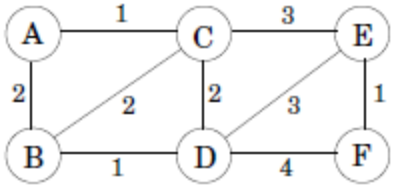


Kruskal está correto

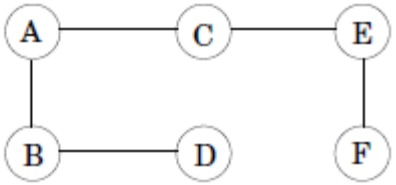
Seja X um subconjunto das arestas E_A de uma AGM. Seja qualquer subconjunto S de vértices tal que X não cruze S e V-S e seja *e* a aresta mais leve do corte. Então X U {e} faz parte de alguma AGM.



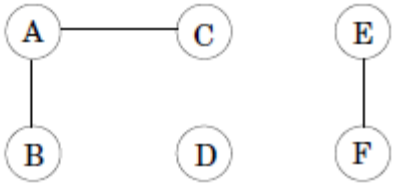




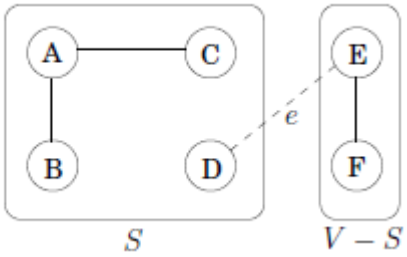
MST T:



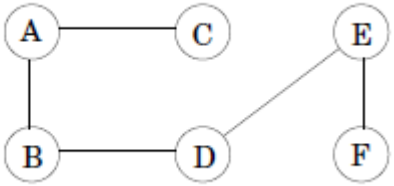
Edges X:



The cut:



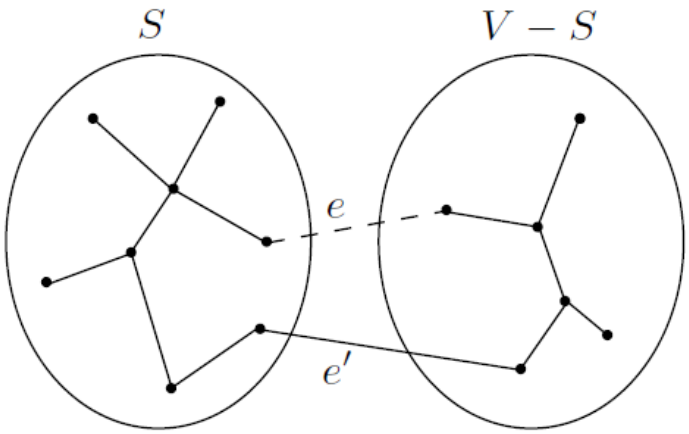
MST T':



Kruskal está correto

- Prova

  Seja X um subconjunto das arestas E_A de uma AGM. Seja qualquer subconjunto S de vértices tal que X não cruze S e V-S e seja *e* a aresta mais leve do corte. Então X U {e} faz parte de alguma AGM.



Guloso AGM: Algoritmo de Kruskal

```
procedure kruskal(G, w)
Input:    A connected undirected graph G = (V, E) with edge weights w_e
Output:   A minimum spanning tree defined by the edges X

X = {}
Sort the edges E by weight
for all edges {u, v} ∈ E, in increasing order of weight:
    if {u, v} ∪ X sem ciclo
        add edge {u, v} to X
```

Algoritmo está correto como visto anteriormente.
Depende de ordenação de arestas (m log m ou m – linear).
Faz O(m) vezes a operação de verificação de ciclo.

Guloso AGM: Algoritmo de Kruskal

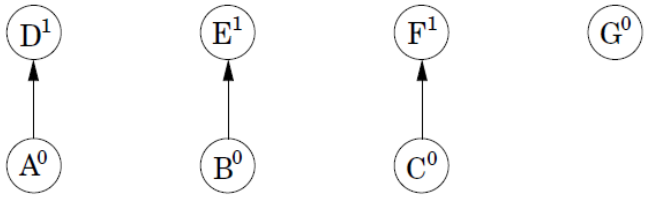
```
procedure kruskal (G, w)
Input:    A connected undirected graph G = (V, E) with edge weights w_e
Output:   A minimum spanning tree defined by the edges X

X = {}
Sort the edges E by weight
for all edges {u, v} ∈ E, in increasing order of weight:
   if {u, v} ∪ X sem ciclo
      add edge {u, v} to X
```

Complexidade depende de qual operação? De saber se há ciclo...

Conjuntos Disjuntos
Mesmo componente em log(n)

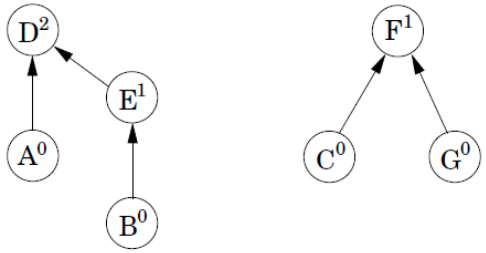
makeset(A), makeset(B), ..., makeset(G):

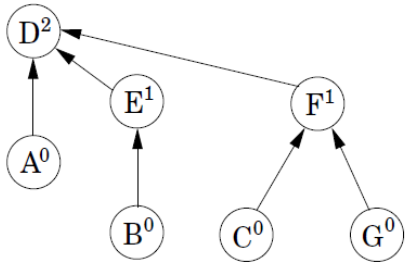
union(A, D), union(B, E), union(C, F):



union(B, G):

union(C, G), union(E, A):





Guloso AGM: Algoritmo de Kruskal

```
procedure kruskal(G, w)
Input:    A connected undirected graph G = (V, E) with edge weights w_e
Output:   A minimum spanning tree defined by the edges X

for all u ∈ V:
   makeset(u)

X = {}
Sort the edges E by weight
for all edges {u, v} ∈ E, in increasing order of weight:
   if find(u) ≠ find(v):
      add edge {u, v} to X
      union(u, v)
```

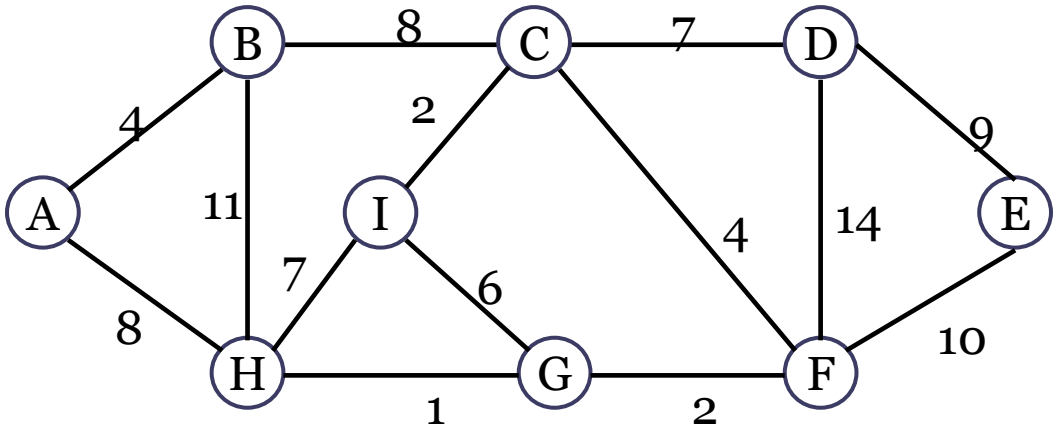
Algoritmo para componentes disjuntos

Propriedade 1: $\text{rank}(x) < \text{rank}(\pi(x))$

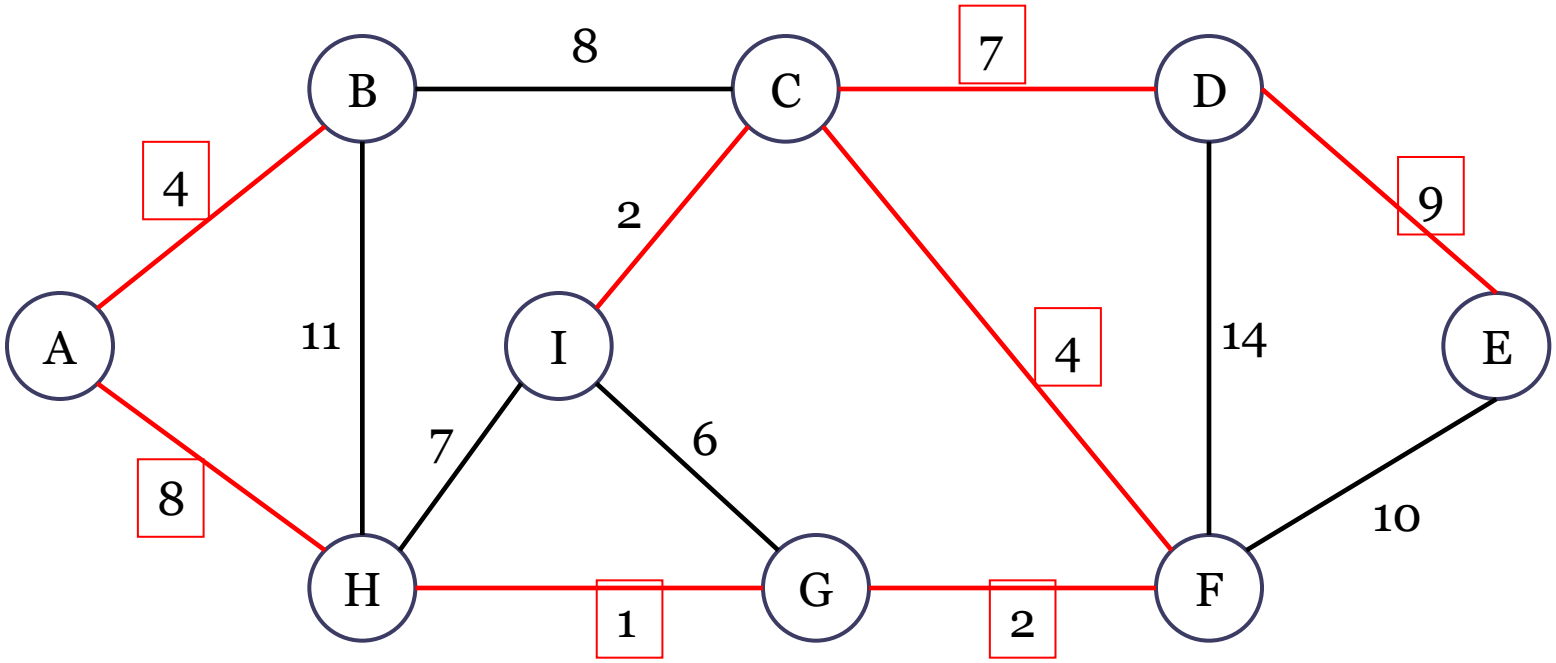
Propriedade 2: rank da raiz é *k*, pelo menos 2^k

```
procedure makeset(x)
π(x) = x
rank(x) = 0
```

```
procedure union(x, y)
r_x = find(x)
r_y = find(y)
if r_x = r_y:   return
if rank(r_x) > rank(r_y):
    π(r_y) = r_x
else:
    π(r_x) = r_y
    if rank(r_x) = rank(r_y):   rank(r_y) = rank(r_y) + 1
```




```
procedure union(x, y)
r_x = find(x)
r_y = find(y)
if r_x = r_y:  return
if rank(r_x) > rank(r_y):
    π(r_y) = r_x
else:
    π(r_x) = r_y
    if rank(r_x) = rank(r_y):  rank(r_y) = rank(r_y) + 1
```


A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
11
8
2
7
4
6
7
14
9
10
1
2

Guloso AGM: Algoritmo de Kruskal

```
procedure kruskal(G, w)
Input:    A connected undirected graph G = (V, E) with edge weights w_e
Output:   A minimum spanning tree defined by the edges X

for all u ∈ V:
   makeset(u)

X = {}
Sort the edges E by weight
for all edges {u, v} ∈ E, in increasing order of weight:
   if find(u) ≠ find(v):
      add edge {u, v} to X
      union(u, v)
```

Complexidade?

Guloso AGM: Algoritmo de Kruskal

```
procedure kruskal(G, w)
Input:    A connected undirected graph G = (V, E) with edge weights w_e
Output:   A minimum spanning tree defined by the edges X

for all u ∈ V:
   makeset(u)

X = {}
Sort the edges E by weight
for all edges {u, v} ∈ E, in increasing order of weight:
   if find(u) ≠ find(v):
      add edge {u, v} to X
      union(u, v)
```

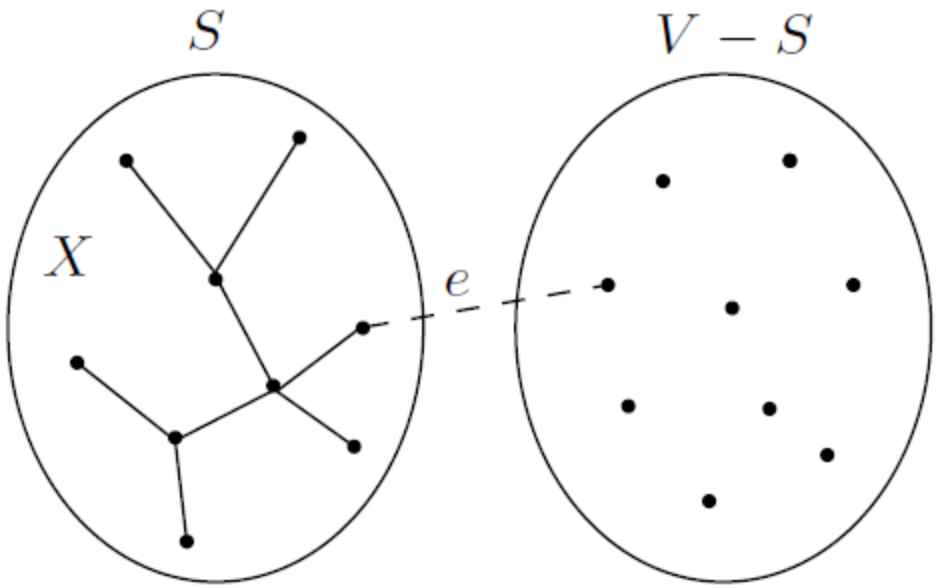
Complexidade?

$$T(n) = \Theta(m \log n)$$

$$\Theta(n \log n) \leq T(n) \leq \Theta(n^2 \log n)$$

Guloso AGM: Algoritmo de Prim

- Cresça a árvore, colocando sempre a menor aresta que liga X aos vértices que faltam (1930 Jarnik, 1957 Prim, 1959 Dijkstra)



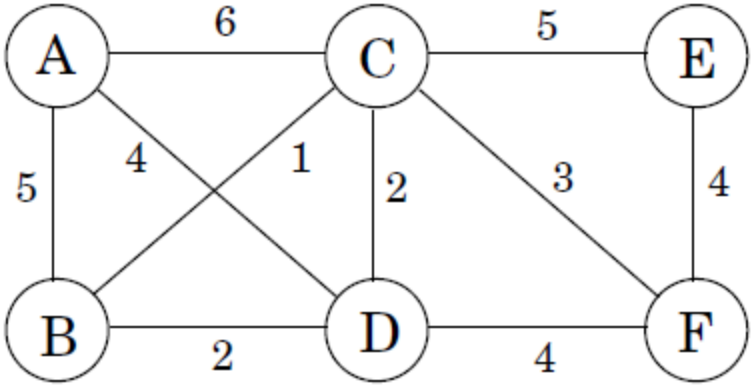
decom departamento de computação

Guloso AGM: Algoritmo de Prim

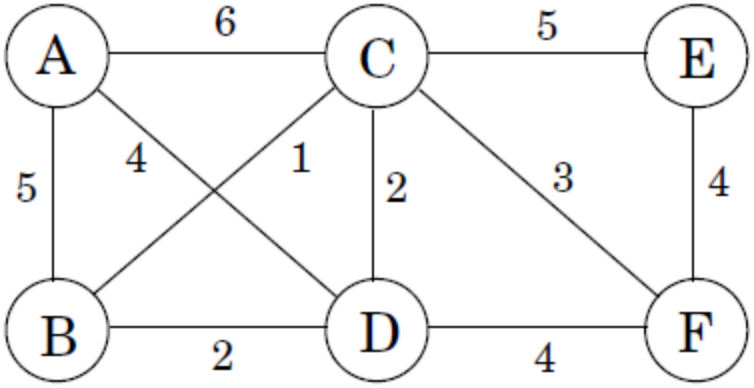
```
procedure prim(G, w)
Input:    A connected undirected graph G = (V, E) with edge weights w_e
Output:   A minimum spanning tree defined by the array prev

for all u ∈ V:
    cost(u) = ∞
    prev(u) = nil
Pick any initial node u_0
cost(u_0) = 0

H = makequeue(V)      (priority queue, using cost-values as keys)
while H is not empty:
    v = deletemin(H)
    for each {v, z} ∈ E:
        if cost(z) > w(v, z):
            cost(z) = w(v, z)
            prev(z) = v
            decreasekey(H, z)
```

Guloso Menor caminho: Dijkstra

```
procedure dijkstra(G, l, s)
Input:   Graph G = (V, E), directed or undirected;
         positive edge lengths {l_e : e ∈ E}; vertex s ∈ V
Output:  For all vertices u reachable from s, dist(u) is set
         to the distance from s to u.

for all u ∈ V:
    dist(u) = ∞
    prev(u) = nil
dist(s) = 0

H = makequeue(V)   (using dist-values as keys)
while H is not empty:
    u = deletemin(H)
    for all edges (u, v) ∈ E:
        if dist(v) > dist(u) + l(u, v):
            dist(v) = dist(u) + l(u, v)
            prev(v) = u
            decreasekey(H, v)
```



Set S	A	B	C	D	E	F
$\{\}$	0/nil	∞/nil	∞/nil	∞/nil	∞/nil	∞/nil
A		$5/A$	$6/A$	$4/A$	∞/nil	∞/nil
A, D		$2/D$	$2/D$		∞/nil	$4/D$
A, D, B			$1/B$		∞/nil	$4/D$
A, D, B, C					$5/C$	$3/C$
A, D, B, C, F					$4/F$	



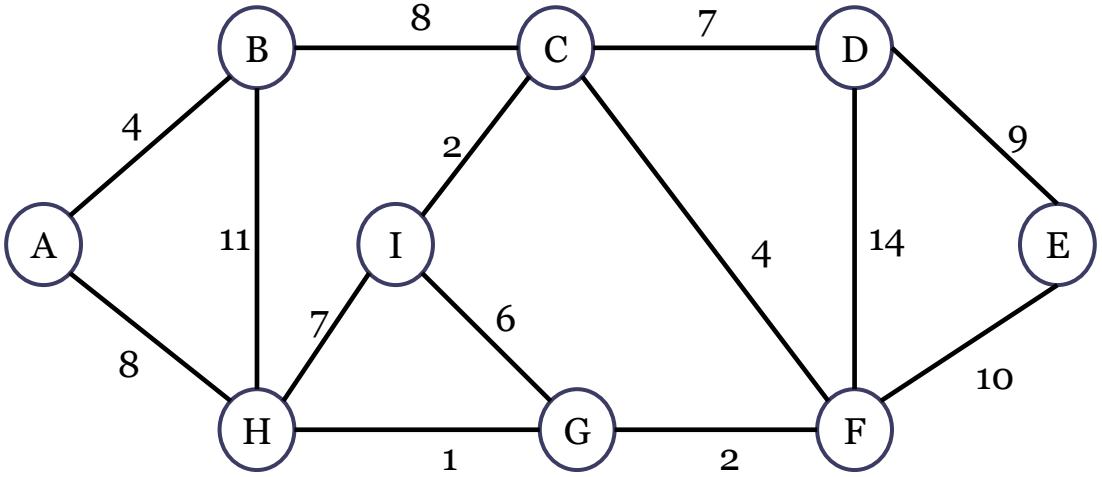
Atenção: apesar de ser linear nesse exemplo, representa qualquer árvore.

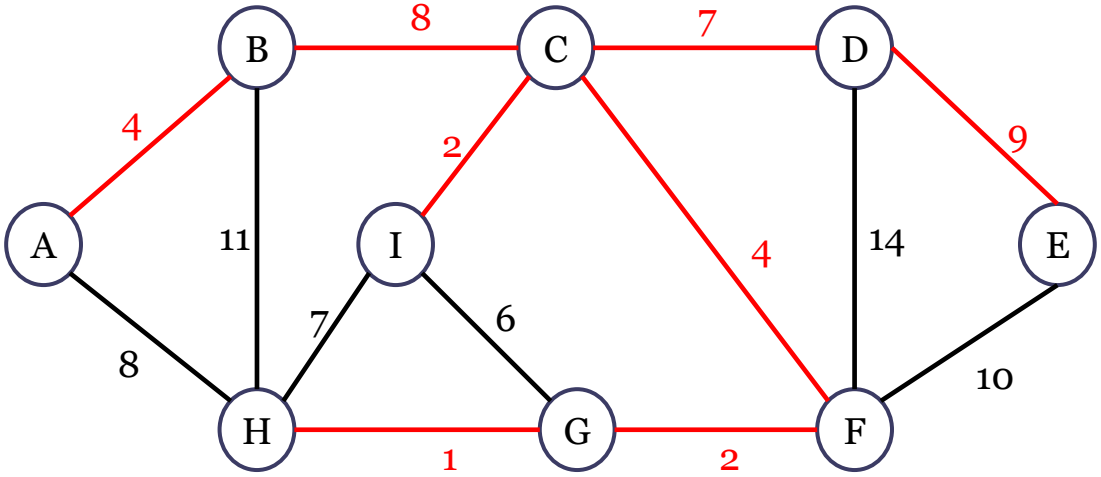
prev: permite recuperar árvore

Set S	A	B	C	D	E	F
$\{\}$	$0/\text{nil}$	∞/nil	∞/nil	∞/nil	∞/nil	∞/nil
A		$5/A$	$6/A$	$4/A$	∞/nil	∞/nil
A, D		$2/D$	$2/D$		∞/nil	$4/D$
A, D, B			$1/B$		∞/nil	$4/D$
A, D, B, C					$5/C$	$3/C$
A, D, B, C, F					$4/F$	

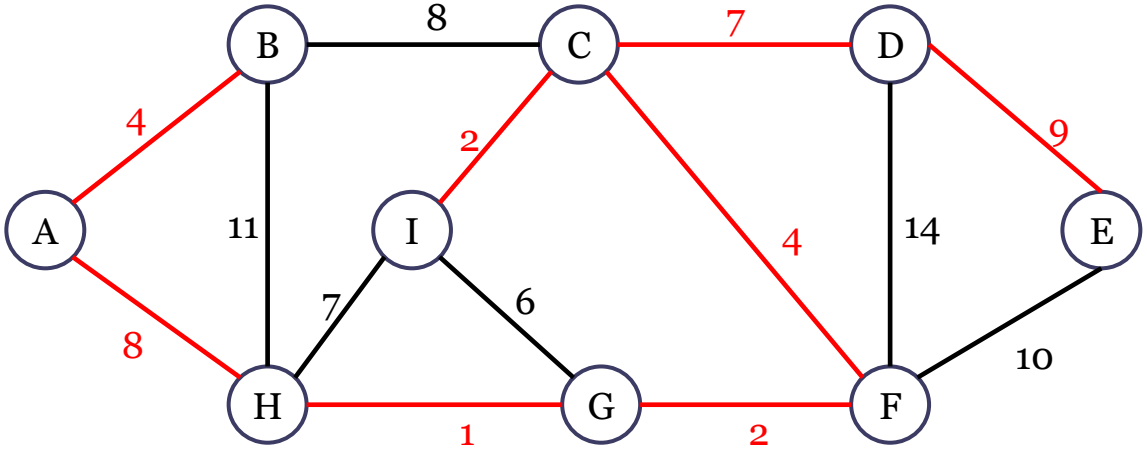
Outro exemplo:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Prim%27s_algorithm
- http://en.wikipedia.org/wiki/Kruskal%27s_algorithm


A
B
C
D
E
F
G
H
I
4
8
8
7
2
9
11
4
14
7
6
10
1
2



Árvores podem ser diferentes, mas têm o mesmo peso!

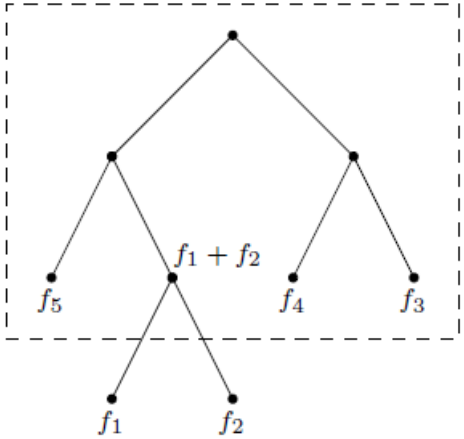


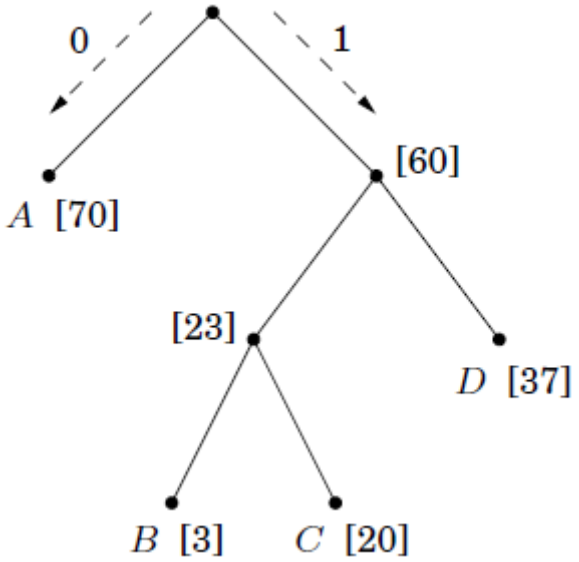
Código de Huffman

Symbol	Frequency
A	70 million
B	3 million
C	20 million
D	37 million

Código de Huffman

Symbol	Frequency
A	70 million
B	3 million
C	20 million
D	37 million





Symbol	Codeword
A	0
B	100
C	101
D	11

Código de Huffman – Fazendo as árvores

Symbol	Frequency
A	70 million
B	3 million
C	20 million
D	37 million

Código de Huffman

- 1952, David Huffman
- Compressão (MP3, por exemplo)
- Propriedades
  - Número variável de bits
  - Não-ambiguidade (árvore binária completa)

Algoritmo Guloso: Huffman Ótimo

```
procedure Huffman(f)
Input:  An array f[1···n] of frequencies
Output:  An encoding tree with n leaves

let H be a priority queue of integers, ordered by f
for i = 1 to n:  insert(H, i)
for k = n + 1 to 2n − 1:
  i = deletemin(H),  j = deletemin(H)
  create a node numbered k with children i, j
  f[k] = f[i] + f[j]
  insert(H, k)
```

Huffman: Está correto?

```
procedure Huffman(f)
Input:  An array f[1···n] of frequencies
Output:  An encoding tree with n leaves

let H be a priority queue of integers, ordered by f
for i = 1 to n:  insert(H,i)
for k = n+1 to 2n−1:
  i = deletemin(H),  j = deletemin(H)
  create a node numbered k with children i,j
  f[k] = f[i] + f[j]
  insert(H,k)
```

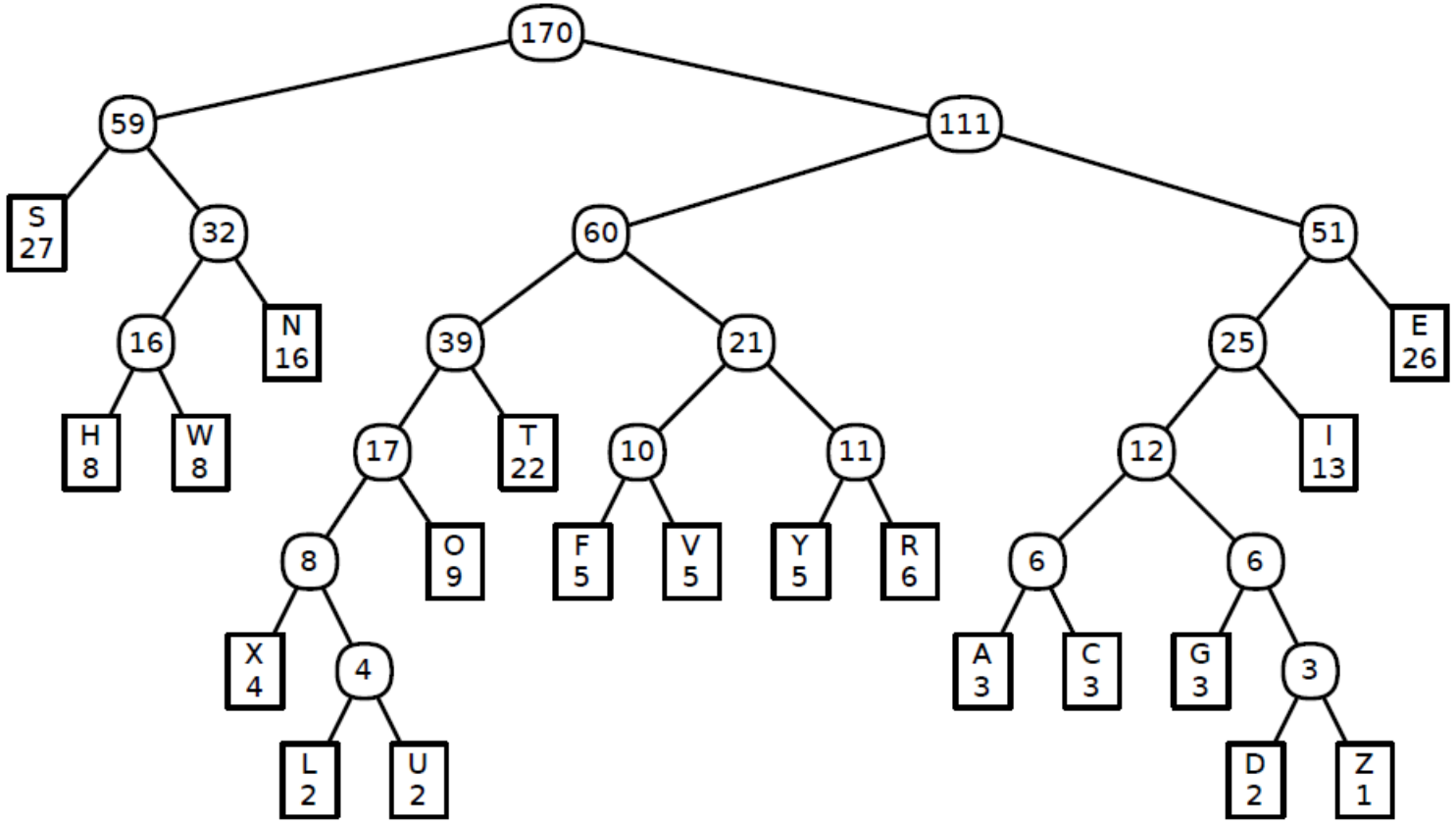
Por contradição, se maior frequência na folha mais baixa, troca.

Huffman: Complexidade

```
procedure Huffman(f)
Input:  An array f[1···n] of frequencies
Output:  An encoding tree with n leaves

let H be a priority queue of integers, ordered by f
for i = 1 to n:  insert(H, i)
for k = n + 1 to 2n − 1:
  i = deletemin(H),  j = deletemin(H)
  create a node numbered k with children i, j
  f[k] = f[i] + f[j]
  insert(H, k)
```

Complexidade: O(n log n)

A	C	D	E	F	G	H	I	L	N	O	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
3	3	2	26	5	3	8	13	2	16	9	6	27	22	2	5	8	4	5	1



Huffman: Exercício

Suponha que os símbolos a, b, c, d, e ocorram com frequências ½, ¼, 1/8, 1/16, 1/16, respectivamente.

a) Qual a codificação de Huffman do alfabeto?
b) Se esta codificação é aplicada a um arquivo consistindo em 1.000.000 caracteres com as dadas frequências, qual é o tamanho do arquivo codificado em bits?

Um problema de lógica

A mulher do coronel foi assassinada e existem três suspeitos: o coronel, o açougueiro e o amante. Definir quem é o assassino, dado que:

o assassinato aconteceu na cozinha

o assassinato aconteceu às 8 da noite

o coronel estava dormindo às 8 da noite

Problema de satisfabilidade

A mulher do coronel foi assassinada e existem três suspeitos: o coronel, o açougueiro e o amante. Definir quem é o assassino, dado que:

o assassinato aconteceu na cozinha
o assassinato aconteceu às 8 da noite
o coronel estava dormindo às 8 da noite

U – o coronel é inocente
X – o assassinato aconteceu na cozinha
W – o assassinato aconteceu às 8 da noite
Y – o açougueiro é inocente
Z – o coronel estava dormindo às 8 da noite

Cláusulas de Horn

- 1951, Alfred Horn
- É possível deduzir um fato a partir de um conjunto de implicações?
  - Fatos: variáveis lógicas
  - Implicações : com antecedente de conjunto de fatos (no máximo um negado) e um consequente unitário

- Conjunção de cláusulas de disjunção com no máximo uma variável não-negada
  - Subconjunto de problemas de satisfabilidade

Cláusulas de Horn

A mulher do coronel foi assassinada e existem três suspeitos: o coronel, o açougueiro e o amante. Definir quem é o assassino, dado que:

o assassinato aconteceu na cozinha
o assassinato aconteceu às 8 da noite
o coronel estava dormindo às 8 da noite

U – o coronel é inocente
X – o assassinato aconteceu na cozinha
W – o assassinato aconteceu às 8 da noite
Y – o açougueiro é inocente
Z – o coronel estava dormindo às 8 da noite

decom
departamento
de computação

Cláusulas de Horn

$$(w \wedge y \wedge z) \Rightarrow x, \quad (x \wedge z) \Rightarrow w, \quad x \Rightarrow y, \quad \Rightarrow x, \quad (x \wedge y) \Rightarrow w, \quad (\overline{w} \vee \overline{x} \vee \overline{y}), \quad (\overline{z})$$

Horn – Algoritmo Guloso Exato

```
Input:  a Horn formula
Output:  a satisfying assignment, if one exists

set all variables to false

while there is an implication that is not satisfied:
  set the right-hand variable of the implication to true

if all pure negative clauses are satisfied:  return the assignment
else:  return ''formula is not satisfiable''
```

Implementação em tempo linear: Norvig and Russel, Lógica Proposicional Forward Chaining

Um problema de seleção de atividades

- Seja $S=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ um conjunto de atividades propostas que desejam usar um recurso, que só pode ser usado por uma atividade de cada vez.
- Cada atividade a_i tem um tempo de inicio s_i e um tempo de termino f_i, onde $0 \leq s_i < f_i < \infty$.
- As atividades a_i e a_j são compatíveis se $s_i \geq f_j$ ou $s_j \geq f_i$.
- Problema: Selecionar um subconjunto de tamanho máximo de atividades mutuamente compatíveis.

Exemplo

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Subestrutura ótima

- Seja $S_{ij}=\{a_k \in S \mid f_i \leq s_k < f_k \leq s_j\}$, ou seja, o subconjunto de atividades que podem começar após a_i terminar e que terminam antes da atividade a_j começar.
- Acrescentamos duas atividades fictícias a_o e a_{n+1}, onde $f_o=0$ e $s_{n+1}=\infty$.
- Logo, $S = S_{o\ n+1}$
- Se uma solução para s_{ij} inclui a_k, então a_k gera dois subproblemas s_{ik} e $s_{kj} \subset s_{ij}$.
- Logo, se há uma solução ótima para s_{ij} que inclui a_k, as soluções para s_{ik} e s_{kj} usadas dentro da solução ótima de s_{ij} também devem ser ótimas.

Teorema

- Uma solução ótima para S_{ij} seria
  $A_{ij} = A_{ik} \cup \{a_k\} \cup A_{kj}$
- $A_{0\ n+1}$ seria a solução para o problema inteiro.
- Teorema: Considere qualquer subproblema não vazio S_{ij} e seja a_m a atividade em S_{ij} com término mais antigo. Então,
  1. A atividade a_m é usada em algum subconjunto de tamanho máximo de atividades mutuamente compatíveis de S_{ij}.
  2. O subproblema S_{im} é vazio, de forma que a escolha de a_m deixa o subproblema S_{mj} como único que pode ser não vazio.

Teorema

2. Suponha que exista algum $a_k \in S_{im}$. Então $f_i \leq s_k < f_k \leq s_m < f_m \Rightarrow f_k < f_m$.
   Então $a_k \in S_{ij}$ e ele tem $f_k < f_m$. Contradição.
1. Seja A_{ij} um subconjunto de tamanho máximo de atividades mutuamente compatíveis em S_{ij}.
   Ordene as atividade em A_{ij} em ordem crescente de tempo de término.
   Seja a_k a primeira atividade em A_{ij}.
   Se $a_k = a_m$, pronto.
   Caso contrário, construa $A'_{ij} = A_{ij} - \{a_k\} \cup \{a_m\}$.

Algoritmo

- Recursive-Active-Selector(s,f,i,j)

  $m \leftarrow i + 1$

  while $m<j$ and $s_m < f_i$

  $m \leftarrow m + 1$

  if $m < j$

  Return $\{a_m\} \cup$ Recursive-Active-Selector(s,f,m,j)

  return $\emptyset$

- Iteractive-Active-Selector(s,f)
  - n = comprimento(s)
  - A = {1}
  - i = 1
  - for m=2..n:
    - If $s_m \geq f_i$
      - $A = A \cup \{a_m\}$
      - i = m

Exemplo

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Estratégia gulosa

- Moldar o problema de otimização como um problema no qual fazemos uma escolha e ficamos com um único subproblema para resolver.
- Provar que sempre existe uma solução ótima para o problema original que contém a escolha gulosa.
- Demonstrar que, tendo feita escolha gulosa, o que resta é um subproblema com a propriedade de que, se combinarmos uma solução ótima para o subproblema com a escolha gulosa que fizemos, chegamos a uma solução ótima para o problema original.

Problema da mochila
Knapsack problem

- Há n itens, onde o i-ésimo item vale v_i e pesa w_i quilos.
- Deve-se colocar uma carga tão valiosa quanto possível em uma mochila, mas ela comporta no máximo w quilos.

Problema da mochila

- Problema da mochila 0-1
  - Subestrutura ótima: Para a carga mais valiosa que pese no máximo w quilos, se removermos o item j, a carga restante deve ser a mais valiosa que pese w – w_j.
- Problema da mochila fracionada
  - Se removermos um peso w de um item j da carga ótima, a carga restante deve ser mais valiosa que pese no máximo W-w que o ladrão pode levar dos n-1 itens originais, mais w_j-w do item j.

Problema da mochila

- Fracionada
  - Estratégia gulosa
    - Divida v_i/w_i para cada item
    - Pega o máximo do item de maior valor por quilo
    - Se o suprimento deste item esgotar e puder levar mais, pega o máximo possível do próximo item com maior valor por quilo.
- Exemplo:
  - Mochila – 50 quilos
  - Item 1 – 10 quilos, $60
  - Item 2 – 20 quilos, $100
  - Item 3 – 30 quilos, $120