Projeto e Análise de Algoritmos

Aula 4: Dividir para Conquistar ou Divisão e Conquista (2.1-2.2)

DECOM/UFOP
2013/1– 5º. Período
Anderson Almeida Ferreira
Adaptado do material desenvolvido por Andréa Iabrudi Tavares

Estratégias para problemas tratáveis

- Estruturas de Dados
  - Use uma estrutura adequada
- Espaço por Tempo
  - Gaste mais espaço para economizar tempo
- Algoritmos Probabilísticos
  - Use aleatoriedade para conseguir eficiência
- Dividir para conquistar (top-down)
  - Divida em subproblemas semelhantes e disjuntos, resolva e combine
- Programação Dinâmica (bottom-up)
  - Comece com subproblemas e componha um maior, reusando solução de subproblemas compartilhados
- Algoritmos Gulosos
  - Sempre pegue o “melhor”

Ordenação:
Um problema, vários algoritmos

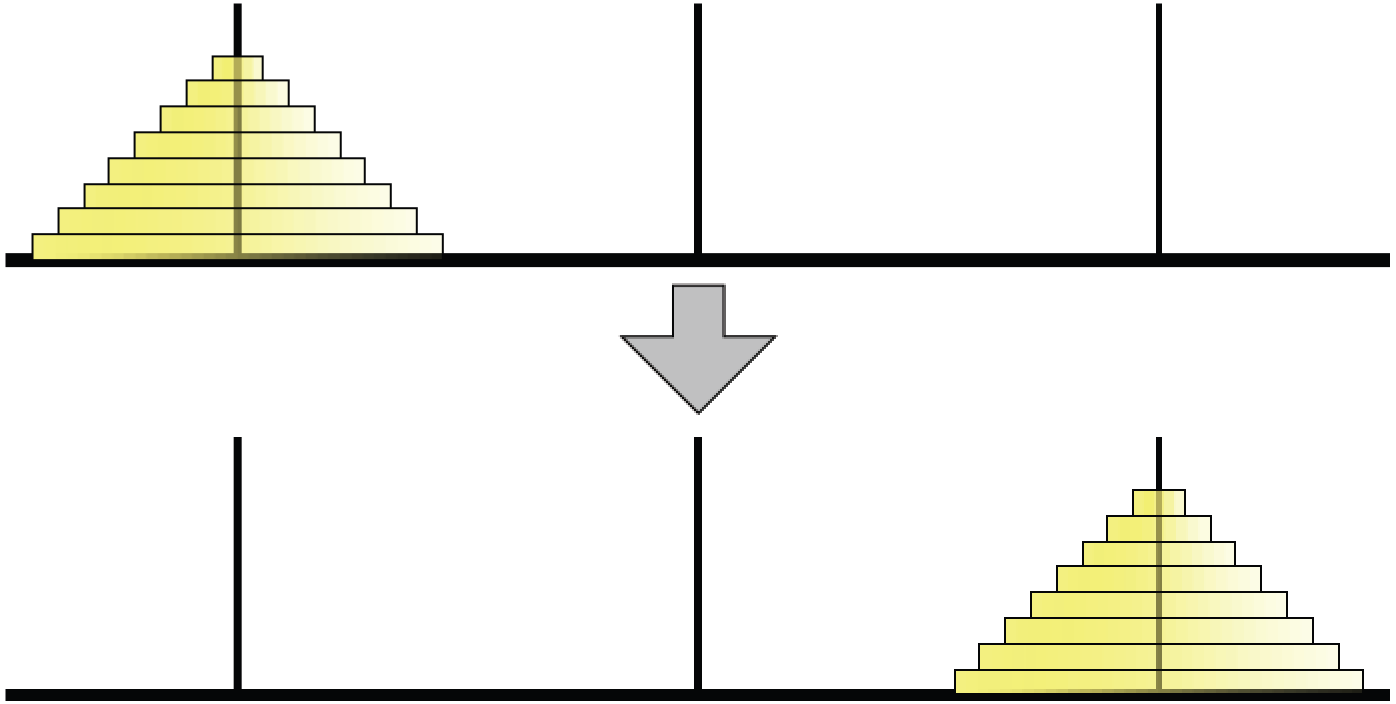
- Recursão: Inserção

- Dividir-para-conquistar: MergeSort e QuickSort

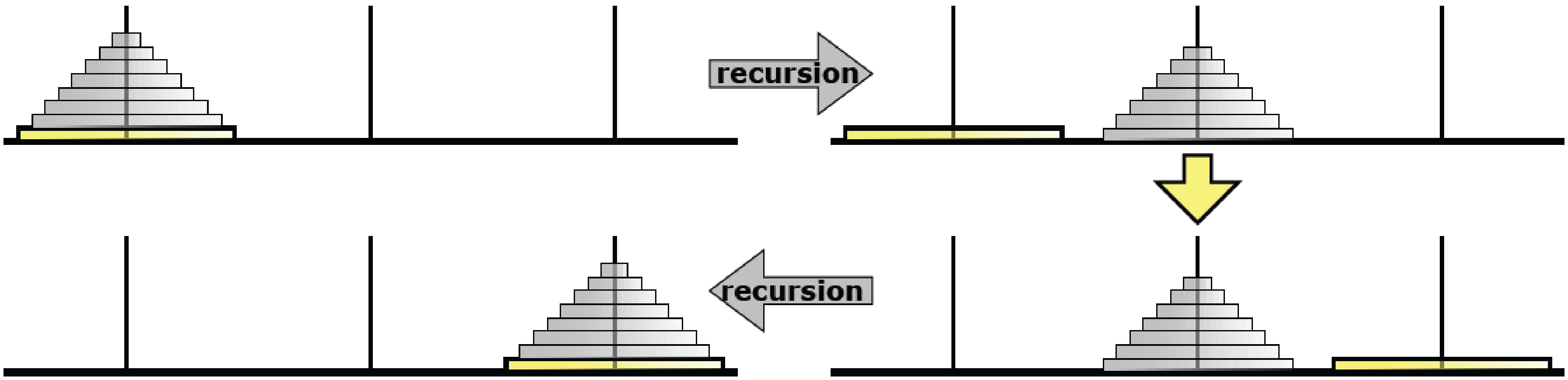
- Estrutura de dados: HeapSort

- Tempo por espaço: Counting Sort

Torre de Hanoi



Recursão: Diminuir para conquistar



$\underline{\textsc{Hanoi}(n, src, dst, tmp):}$

if $n > 0$

$\textsc{Hanoi}(n-1, src, tmp, dst)$

move disk n from src to dst

$\textsc{Hanoi}(n-1, tmp, dst, src)$

Recursão: Equação de Recorrência

```
HANOI(n, src, dst, tmp):
    if n > 0
        HANOI(n − 1, src, tmp, dst)
        move disk n from src to dst
        HANOI(n − 1, tmp, dst, src)
```

Recursão: Análise

```
HANOI(n, src, dst, tmp):
  if n > 0
      HANOI(n − 1, src, tmp, dst)
      move disk n from src to dst
      HANOI(n − 1, tmp, dst, src)
```

Tempo de Execução

Dividir para Conquistar (*Divide and Conquer*)

- Problema (instância) pode ser dividido em subproblemas menores (parecidos e independentes) que são resolvidos recursivamente e combinados.
    - Análise por equação de recorrência

Dividir para Conquistar

- Diminuir complexidade (em geral de linear para logarítmico) de algoritmos polinomiais
  - Busca
  - Ordenação
  - Multiplicação
  - Exponenciação

- Apresentar melhor função de complexidade de pior caso
  - Mínimo/máximo

Busca Sequencial

```
function BuscaSequencial(A,x,e,d)
//Entrada: sub-vetor A[e..d]
//Saída: x pertence ao sub-vetor

1. i = e;
2. while (i≤d) & (A[i]≠x)
3.    i = i +1;
4. return (i ≤ d);
```

Lembre-se, nada sendo dito, utilizaremos sempre análise assintótica de pior caso!

Busca Sequencial com Vetor Ordenado

```
function BuscaSequencial2(A,x,e,d)
//Entrada: sub-vetor A[e..d] ordenado
//Saída: x pertence ao sub-vetor

1. i = e;
2. while (i≤d) & (A[i]≤x)
3.    i = i +1;
4. if (i ≤ d): return (A[i]==x);
```

Busca Sequencial Recursiva

```
function BuscaSequencialRec(A,x,e,d)
//Entrada: sub-vetor A[e..d] ordenado
//Saída: x pertence ao sub-vetor

if (e = d): return (A[e] = x);
if (A[e]=x):
      return true;
else:
   if (A[e]>x):
      return false;
   else:
      return BuscaSequencialRec(A,x,e+1,d);
```

D&C: Busca Binária

```
function BuscaBinária(A,x,e,d)
//Entrada: sub-vetor A[e..d] ordenado
//Saída: x pertence ao sub-vetor

if (e = d): return (A[e] = x);
m = (e+d)/2;
if (A[m] = x):
  return true;
else:
  if (A[m] > x):
    return BuscaBinária(A,x,e,m-1);
  else:
    return BuscaBinária(A,x,m+1,d);
```

D&C: Passos

- Divida
  - problema em subproblemas menores
- Conquiste
  - resolva recursivamente cada subproblema OU
  - limite de tamanho: use outro método
- Combine
  - soluções de subproblemas para resolver problema

D&C: Meta-algoritmo

```
function DividirConquistar(P)
//Entrada: problema P
//Saída: solução S para P

if (ÉPequeno(P)):
   S = ResolvePequeno(P);
else:
   Divida(P, P1, … , Pa);
   for i=1..a:
      Si = DividirConquistar(Pi);
   S = Combine(S1,…,Sa);
return S;
```

Multiplicação de Inteiros Grandes

- *x* e *y* de *n* bits
- *n* multiplicações de *1-n* bit
- *n* somas de *n-n* bits

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1 \\ \times\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

Carry:	1			1	1	1		
		1	1	0	1	0	1	(53)
		1	0	0	0	1	1	(35)
	1	0	1	1	0	0	0	(88)

Custo: $\Theta(n^2)$

Multiplicação de Inteiros Grandes

- Podemos fazer melhor usando D&C?
  - Como dividir?

$$x = \boxed{\quad x_L \quad}\boxed{\quad x_R \quad} = 2^{n/2}x_L + x_R$$

$$y = \boxed{\quad y_L \quad}\boxed{\quad y_R \quad} = 2^{n/2}y_L + y_R.$$

  - Como combinar?

$$xy \;=\; (2^{n/2}x_L + x_R)(2^{n/2}y_L + y_R) \;=\; 2^n\, x_L y_L \;+\; 2^{n/2}\,(x_L y_R + x_R y_L) \;+\; x_R y_R.$$

  - Quanto custa?

Custo: $\Theta(n^2)$

D&C para Multiplicação

- Gauss em no século XVIII e Karatsuba em 1962:

$$bc + ad \quad = \quad (a+b)(c+d) - ac - bd.$$

$$xy \;=\; (2^{n/2}x_L + x_R)(2^{n/2}y_L + y_R) \;=\; 2^n\, x_L y_L \;+\; 2^{n/2}\,(x_L y_R + x_R y_L) \;+\; x_R y_R.$$

$$\boxed{x_L y_R + x_R y_L = (x_L + x_R)(y_L + y_R) - x_L y_L - x_R y_R}$$

D&C Multiplicação: algoritmo

```
function multiply(x, y)
Input:  Positive integers x and y, in binary
Output:  Their product
```

$n =$ max(size of x, size of y)
if $n = 1$: return xy

Parada recursão

x_L, $x_R =$ leftmost $\lceil n/2 \rceil$, rightmost $\lfloor n/2 \rfloor$ bits of x
y_L, $y_R =$ leftmost $\lceil n/2 \rceil$, rightmost $\lfloor n/2 \rfloor$ bits of y

Divide

$P_1 = \mathtt{multiply}(x_L, y_L)$
$P_2 = \mathtt{multiply}(x_R, y_R)$
$P_3 = \mathtt{multiply}(x_L + x_R, y_L + y_R)$

Conquiste: Recursão

return $P_1 \times 2^n + (P_3 - P_1 - P_2) \times 2^{n/2} + P_2$

Combine

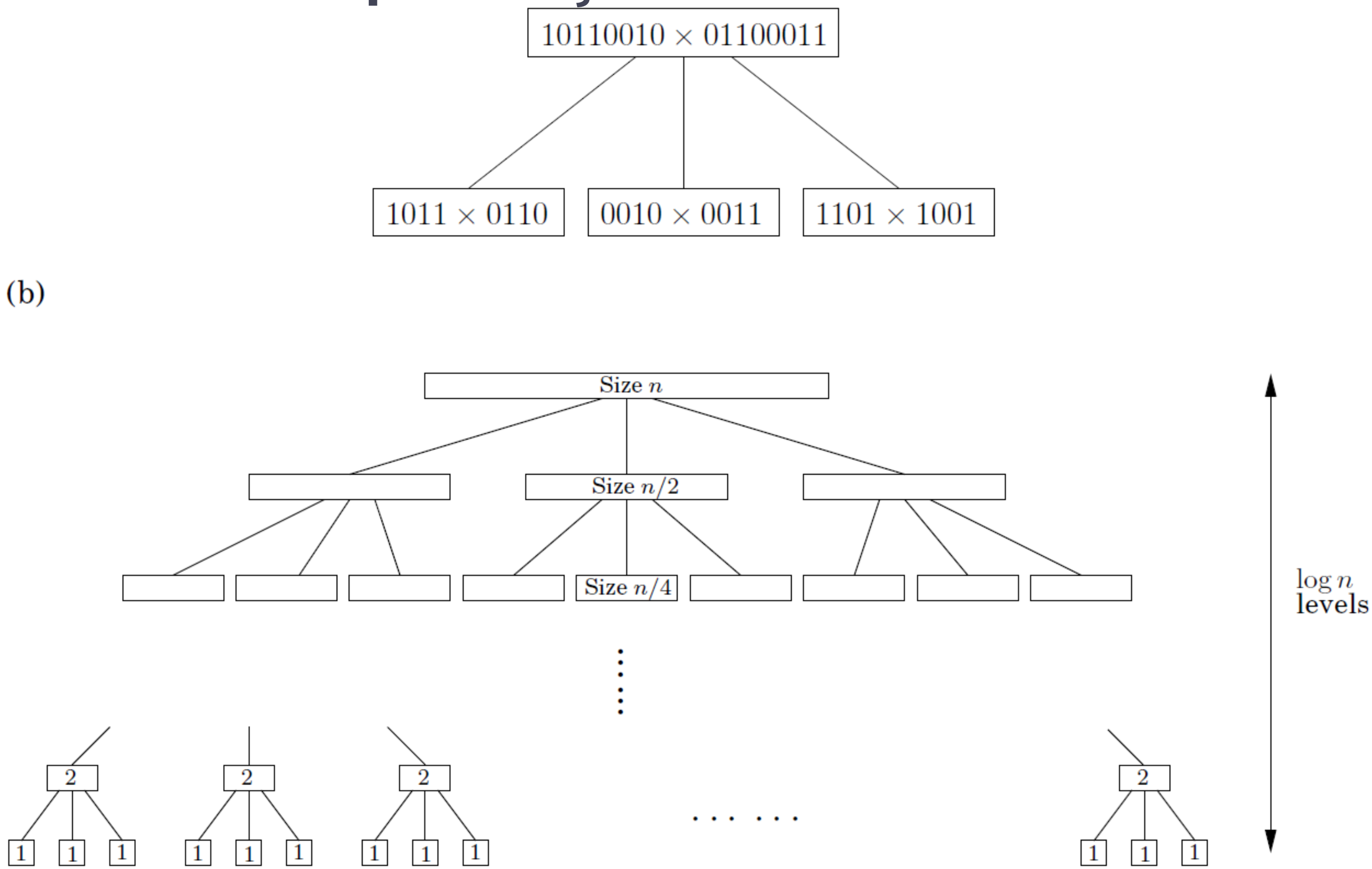
D&C Multiplicação: Complexidade

```
function multiply(x, y)
Input:  Positive integers x and y, in binary
Output:  Their product

n = max(size of x, size of y)
if n = 1:  return xy

x_L, x_R = leftmost ⌈n/2⌉, rightmost ⌊n/2⌋ bits of x
y_L, y_R = leftmost ⌈n/2⌉, rightmost ⌊n/2⌋ bits of y

P1 = multiply(x_L, y_L)
P2 = multiply(x_R, y_R)
P3 = multiply(x_L + x_R, y_L + y_R)
return P1 × 2^n + (P3 − P1 − P2) × 2^(n/2) + P2
```

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) = \Theta\left(n^{1.585}\right)$$

D&C Multiplicação - Análise

(a)



Forma Geral de Recursão

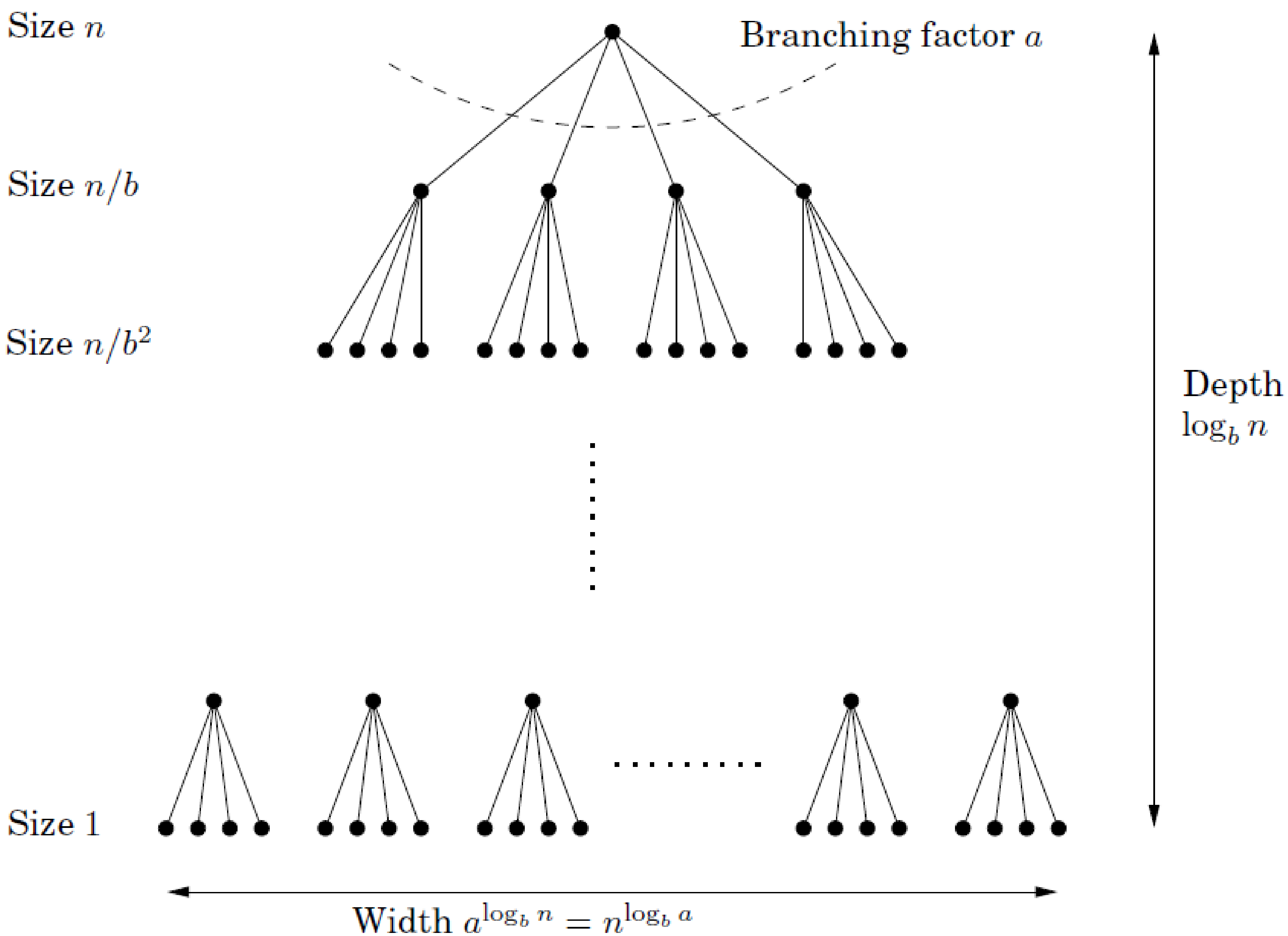
$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Número de subproblemas

Tamanho dos subproblemas

Custo local da função

Árvore de recursão



Teorema Mestre: intuição

- A cada nível *k* da recursão, qual o total de trabalho?

$$a^k \times O\left(\frac{n}{b^k}\right)^d = O(n^d) \times \left(\frac{a}{b^d}\right)^k.$$

- Complexidade é o somatório
  - Primeiro ou último termos se forem diferentes
  - Se iguais, multiplica pelo número de termos.

Teorema Mestre – forma simplificada

$T(n) = aT(\lceil n/b \rceil) + O(n^d)$ *for some constants* $a > 0$, $b > 1$, *and* $d \geq 0$,

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & \textit{if } d > \log_b a \\ O(n^d \log n) & \textit{if } d = \log_b a \\ O(n^{\log_b a}) & \textit{if } d < \log_b a\ . \end{cases}$$

D&C Ordenação: MergeSort

- Von Neumann (1945)

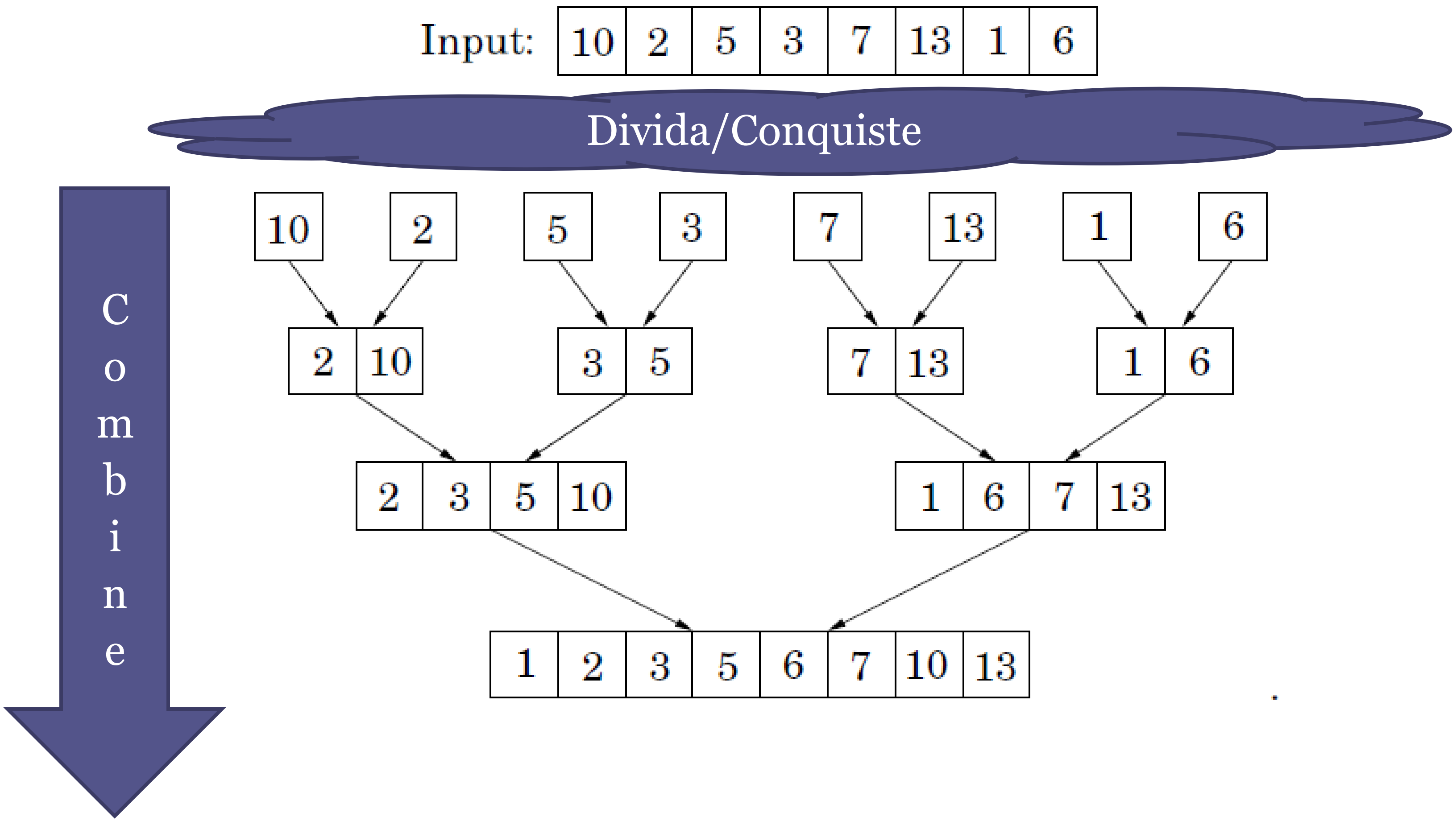
Input:	S	O	R	T	I	N		G	E	X	A	M	P	L
Divide:	S	O	R	T	I	N	|	G	E	X	A	M	P	L
Recurse:	I	N	O	S	R	T	|	A	E	G	L	M	P	X
Merge:	A	E	G	I	L	M		N	O	P	S	R	T	X

D&C: MergeSort

```
function mergesort(a[1...n])
Input:  An array of numbers a[1...n]
Output:  A sorted version of this array

if n > 1:
  return merge(mergesort(a[1...⌊n/2⌋]), mergesort(a[⌊n/2⌋+1...n]))
else:
  return a
```

```
function merge(x[1...k], y[1...l])
if k = 0:  return y[1...l]
if l = 0:  return x[1...k]
if x[1] ≤ y[1]:
  return x[1] ∘ merge(x[2...k], y[1...l])
else:
  return y[1] ∘ merge(x[1...k], y[2...l])
```

MergeSort: Exemplo



MergeSort: Complexidade

Quanto custa?

```
function mergesort(a[1...n])
Input:  An array of numbers a[1...n]
Output:  A sorted version of this array

if n > 1:
  return merge(mergesort(a[1...⌊n/2⌋]), mergesort(a[⌊n/2⌋+1...n]))
else:
  return a
```

```
function merge(x[1...k], y[1...l])
if k = 0:  return y[1...l]
if l = 0:  return x[1...k]
if x[1] ≤ y[1]:
  return x[1] ∘ merge(x[2...k], y[1...l])
else:
  return y[1] ∘ merge(x[1...k], y[2...l])
```

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

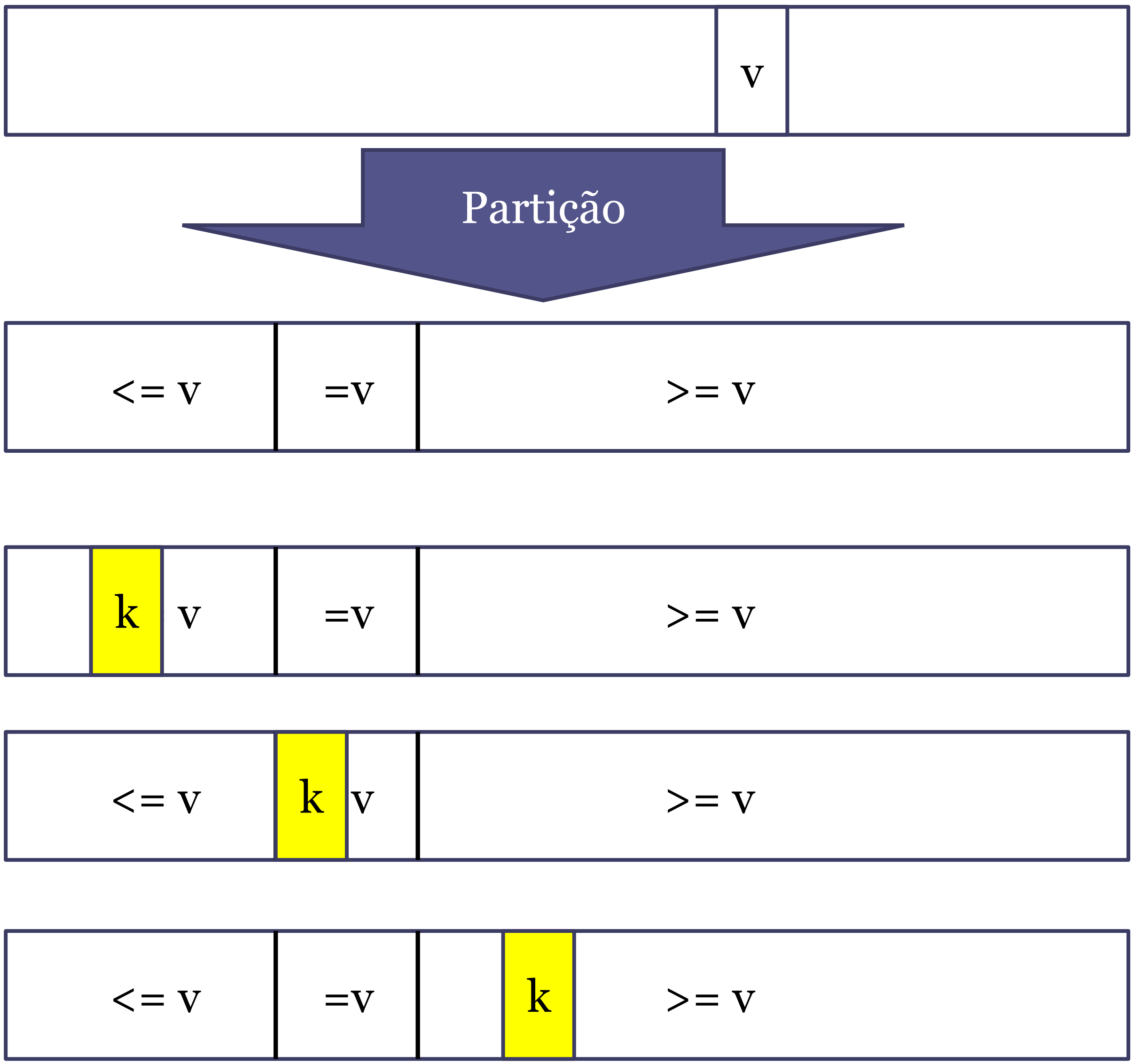
Seleção (Mediana)

- Entrada: Lista de n números S e inteiro k
- Saída: k-ésimo menor elemento de S

- Qual a complexidade?
  - Mínimo: $\Theta(n)$
  - Ordenação: $\Theta(n \log n)$

- Importância da aleatoriedade (outro paradigma de projeto).

D&C Seleção: dividindo...



decom departamento de computação

D&C Seleção: conquistando...

$$\text{selection}(S,k) = \begin{cases} \text{selection}(S_L,k) & \text{if } k \le |S_L| \\ v & \text{if } |S_L| < k \le |S_L| + |S_v| \\ \text{selection}(S_R, k - |S_L| - |S_v|) & \text{if } k > |S_L| + |S_v|. \end{cases}$$

S :

2	36	5	21	8	13	11	20	5	4	1

S_L :

2	4	1

S_v :

5	5

S_R :

36	21	8	13	11	20

Seleção: Algoritmo

$$\text{selection}(S,k) = \begin{cases} \text{selection}(S_L,k) & \text{if } k \le |S_L| \\ v & \text{if } |S_L| < k \le |S_L| + |S_v| \\ \text{selection}(S_R, k - |S_L| - |S_v|) & \text{if } k > |S_L| + |S_v|. \end{cases}$$

```
PARTITION(A[1..n], p):
  if (p ≠ n)
      swap A[p] ↔ A[n]
  i ← 0;  j ← n
  while (i < j)
      repeat i ← i + 1 until (i = j or A[i] ≥ A[n])
      repeat j ← j − 1 until (i = j or A[j] ≤ A[n])
      if (i < j)
          swap A[i] ↔ A[j]
  if (i ≠ n)
      swap A[i] ↔ A[n]
  return i
```

D&C Seleção: Complexidade

Quanto custa?

$$\text{selection}(S,k) = \begin{cases} \text{selection}(S_L, k) & \text{if } k \leq |S_L| \\ v & \text{if } |S_L| < k \leq |S_L| + |S_v| \\ \text{selection}(S_R, k - |S_L| - |S_v|) & \text{if } k > |S_L| + |S_v|. \end{cases}$$

Tamanhos das listas dependem do pivô v.
Como escolher????

D&C Seleção: Complexidade

- Melhor caso: partições sempre balanceadas...
  - Oráculo

$S:$

2	36	5	21	8	13	11	20	5	4	1

$$\boxed{T(n) = T(n/2) + O(n)}$$

D&C Seleção: Complexidade

- Pior caso: partição diminui somente de 1...
  - Primeiro elemento, achar o máximo e lista ordenada.

decom departamento de computação

D&C e Probabilístico: Seleção

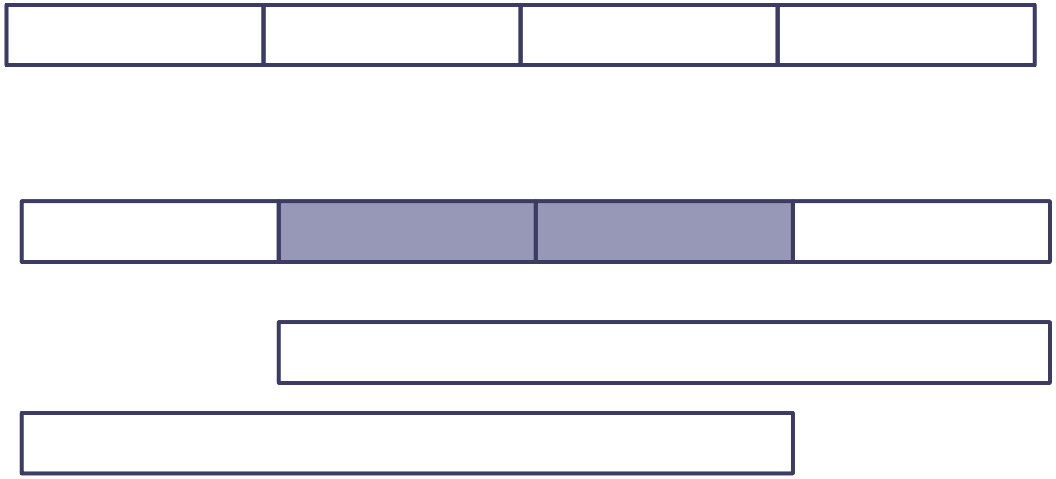
- Escolher o pivô aleatoriamente...
- Ideal: divide no meio
  - Custo:
  - Probabilidade (se todos diferentes):

- Boa: divide em no mínimo ¾
  - Custo:
  - Probabilidade: ????

decom
departamento de computação

D&C e Probabilístico: Seleção

- Boa: divide em no mínimo ¾
  - Probabilidade de v estar no 2o. ou 3o. quartil



D&C e Probabilístico: Seleção

- Boa: divide em no mínimo ¾
  - Probabilidade de v estar no 2o. ou 3o. Quartil
    - P[v dividir em ¾] = 0.5
- Qual o número esperado de escolhas para conseguir uma boa?
  - Número de jogadas até dar cara…
    - E[número de escolhas até dividir em ¾] = 2

decom
departamento de computação

D&C Seleção Aleatório: Complexidade

Tempo esperado para n é menor que o tempo esperado para reduzir a 3n/4 e depois resolver

D&C Ordenação: QuickSort

- Hoare 1962

Input:	S	O	R	T	I	N	G	E	X	A	M	P	L
Choose a pivot:	S	O	R	T	I	$\boxed{N}$	G	E	X	A	M	P	L
Partition:	M	A	E	G	I	L	N	R	X	O	S	P	T
Recurse:	A	E	G	I	L	M	N	O	P	S	R	T	X

D&C: QuickSort

Quanto custa?

$\underline{\textsc{QuickSort}(A[1..n]):}$
  if $(n > 1)$
    Choose a pivot element $A[p]$
    $k \leftarrow \textsc{Partition}(A, p)$
    $\textsc{QuickSort}(A[1..k-1])$
    $\textsc{QuickSort}(A[k+1..n])$

Depende da escolha do pivô!!!!!!
Sabemos, contudo, que escolha aleatória provê, em número esperado de duas pivotações, a divisão em 3n/4 .

$\underline{\textsc{Partition}(A[1..n], p):}$
  if $(p \neq n)$
    swap $A[p] \leftrightarrow A[n]$
  $i \leftarrow 0;\ j \leftarrow n$
  while $(i < j)$
    repeat $i \leftarrow i+1$ until $(i = j$ or $A[i] \geq A[n])$
    repeat $j \leftarrow j-1$ until $(i = j$ or $A[j] \leq A[n])$
    if $(i < j)$
      swap $A[i] \leftrightarrow A[j]$
  if $(i \neq n)$
    swap $A[i] \leftrightarrow A[n]$
  return i

MergeSort e QuickSort

Fase	MergeSort	QuickSort
Dividir	O(1)	O(n)
Conquistar	2T(n/2)	T(k) T(n-k)
Combinar	O(n)	O(1)

D&C: resumo

- Problemas menores (fração), independentes e não-sobrepostos
- Divisão e combinação são partes não-recursivas
  - Algoritmos tendem a tornar uma das duas mais complicada
  - Mergesort, Quicksort
- Importante definir o que é pequeno
  - Parada de recursão (multiplicação de números)

D&C: Exercícios

- Calcular x^n em $\Theta(\log n)$ passos.

Outros exemplos interessantes

- RSA
- Fast Fourier Transform
- Caixa convexa
- Par de pontos mais próximo
- Mínimo e máximo
- Fibonacci

Teorema Mestre – forma geral

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), a \geq 1, b > 1, f(n) > 0$$

$$1. f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right), \varepsilon > 0 \Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$$

$$2. f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log n\right) \Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log \ n\right)$$

$$3. f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right), \varepsilon > 0, af(n/b) \leq cf(n) \Rightarrow T(n) = \Theta\left(f(n)\right),$$

$$onde \qquad c < 1$$

Teorema Mestre: Aplicação Mecânica

- Identifique a, b, f(n)
- Calcule grau = log_b (a)
- Compare n^grau e f(n)
- Encontre o maior

Exemplos de Teorema Mestre

- $T(n) = 9T(n/3)+n$
- $T(n) = T(2n/3)+1$
- $T(n) = 3T(n/4)+n \log n$

Quando não se aplica?

function fatorial(n)

return n * fatorial(n-1);

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 + T(n-1) & n > 1 \end{cases}$$

Teorema Mestre: Quando não se aplica

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), a \geq 1, b > 1, f(n) > 0$$

$$1.\ f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right), \varepsilon > 0 \Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$$

$$2.\ f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \log \ldots\right) \ldots \Theta\left(n^{\log_b a} \log\ n\right)$$

$$3.\ f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right), \varepsilon > 0, af(n/b) \leq cf(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$$

Polinomialmente menor

Regularidade

Condição de regularidade violada

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n\left(\sin\left(n - \frac{\pi}{2}\right) + 2\right)$$

$$f(n) = \Omega(n)$$