Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas – ICEB
Departamento de Computação – DECOM
Disciplina: Teoria da Computação
Professor: Anderson A. Ferreira (anderson.ferreira@gmail.com)

Lista de exercícios

1) Forneça APD's para as linguagens a seguir:
   a) $\{0^n1^n \mid n \in \aleph \}$
   b) $\{0^m1^n \mid m < n \}$
   c) $\{0^n1^{2n} \mid n \in \aleph \}$
   d) $\{0^m1^n0^m \mid m, n \in \aleph \}$
   e) $\{0^n1^n \mid n \in \aleph \} \cup \{0^n1^{2n} \mid n \in \aleph \}$
   f) $\{0^n1^k \mid n \leq k \leq 2n \}$
   g) $\{0^n1^n0^k \mid n, k \in \aleph \}$
   h) $\{0^m1^n \mid m > n\}$

2) Construa um APD com alfabeto de pilha contendo apenas dois símbolos, além do \$, que reconheça $\{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w = w^R\}$.

3) Forneça PDA's para as CFG's a seguir:
   a) G=({E,T,F}, {a, (,), +, *}, R, P)
      R: $E \rightarrow E + T \mid T$
      $T \rightarrow T * F \mid F$
      $F \rightarrow (E) \mid a$
   b) G=({P, A, B}, {a,b,c}, R, P)
      R: $P \rightarrow ABA$
      $A \rightarrow aA \mid a$
      $B \rightarrow bBc \mid \varepsilon$
   c) G=({P, A, B, C}, {a,b,c}, R, P)
      R: $P \rightarrow APB \mid C$
      $A \rightarrow AaaA \mid \varepsilon$
      $B \rightarrow BBb \mid C$
      $C \rightarrow cC \mid \varepsilon$
   d) G=({L, S, E}, {a, (,)} , R, L})
      R: $L \rightarrow (S)$
      $S \rightarrow SE \mid \varepsilon$

4) Forneça CFG's para os PDA's das seguintes linguagens.
   a) $\{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
   b) $\{a^nb^n \mid n \in \aleph\}$
   c) $\{a^nb^n c^md^m \mid n,m \in \aleph\}$

5) Prove usando o Lema do Bombeamento que as seguintes linguagens não são livres de contexto.
   a) $\{0^n 1^n 0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
   b) $\{0^n \# 1^{2n} \# 0^{3n} \mid n \geq 0\}$
   c) {w#t | w é uma subcadeia de t, onde w e t $\in$ {a,b}*}

6) Mostre que a classe de linguagens livres-do-contexto é fechada sob as operações regulares união, concatenação e estrela(*).

7) Construa uma máquina de Turing (TM) que, recebendo como entrada um número na notação binária, some 1 ao mesmo e retorne o cabeçote para a posição inicial. Se a palavra de entrada for ε, a TM deverá escrever 0.

8) Construa um TM com alfabeto de entrada {a,b} que reconheça a linguagem denotada pela ER a(a+b)*.

9) Construa TM para reconhecer:
   a) $\{ a^{2n} \mid n \geq 0\}$
   b) $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
   c) $\{a^m b^n \mid m \neq n\}$
   d) $\{w \in \{a, b\}^* \mid$ o número de a´s em w é igual ao de b´s$\}$
   e) $\{a^n b^k c^n d^k \mid n,k \geq 0\}$
   f) $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
   g) $\{xx \mid x \in \{a, b\}^* \}$

10) Construa uma TM com 3 trilhas que, recebendo como entrada dois números em notação binária, um na primeira trilha e o outro na segunda trilha, determine a soma na terceira trilha

11) Escreva TM não determinísticas que reconheçam as linguagens:
   a) $\{x x \mid x \in \{a, b\}^* \}$
   b) $\{ x x^R y \mid x, y \in \{0,1\}^*$ e $|x| > |y| \}$
   c) $\{ x y z \mid x, y, z \in \{a,b,c\}^* , |x|<|y|<|z|$, x não tem as, y não tem bs e z não tem cs$\}$

12) Seja uma máquina de Turing que, em cada transição, só pode escrever um símbolo ou mover o cabeçote, mas não ambos. Faça uma definição formal desse tipo de máquina. Depois mostre que tais máquinas reconhecem exatamente Turing-Reconhecíveis.

13) Descreva como simular uma máquina de Turing por meio de um autômato com duas pilhas.

14) Descreva como construir TMs para computar as funções a seguir. Ambas são funções de {0,1}* para {0,1}*. O valor de f(w) deve ser escrito no lugar de w.
   a) $f(w) = w^2$

b) $f(w) = w^R$

15) Mostre que a máquina de Turing padrão e suas variantes (não determinística, com várias trilhas e com várias fitas) reconhecem a mesma classe de linguagens (são equivalentes).

16) Responda a cada um dos itens abaixo para o AFD M e dê razões para suas respostas.

M=({a,b,c}, {0,1}, δ, a, {a})

δ	0	1
A	A	b
B	c	c
C	a	B

a) <M,0100> ∈ A_{AFD}?
b) <M,011> ∈ A_{AFD}?
c) <M> ∈ A_{AFD}?
d) <M, 0100> ∈ A_{EXR}?
e) <M> ∈ E_{AFD}?
f) <M,M> ∈ EQ_{AFD}?

17) Considere o problema de se determinar se um AFD e uma expressão regular são equivalentes. Expresse esse problema como uma linguagem e mostre que ele é decidível.

18) Seja $INFINITA_{AFD}$ = { <A> | A é uma AFD e L(A) é uma linguagem infinita}. Mostre que $INFINITA_{AFD}$ é decidível.

19) Seja $INFINITA_{AP}$ = { <A> | A é uma AP e L(A) é uma linguagem infinita}. Mostre que $INFINITA_{AP}$ é decidível.

20) Seja A = {<M> | M é um AFD que não aceita nenhuma cadeia contendo um número ímpar de 1s}. Mostre que A é decidível.

21) Seja A = {<R,S> | R e S são expressões regulares e L(R) ⊆ L(S)}. Mostre que A é decidível.

22) Prove que EQ_{AFD} é decidível testando os dois AFDs sobre todas as cadeias até um certo tamanho. Calcule um tamanho que funcione.