

Autômato Finito Não Determinístico

Autômato Finito Não Determinístico (AFN)

- Um AFN é uma quintupla $(Q, \Sigma, \delta, I, F)$, onde:
 - Q é um conjunto finito de um ou mais de estados;
 - Σ é um alfabeto;
 - I , um subconjunto de Q , é um conjunto não vazio de estados iniciais;
 - F , um subconjunto de Q , é o conjunto de estados finais;
 - δ , a função de transição, é uma função total de $Q \times \Sigma$ para $\wp(Q)$.
- Observe que um AFD é um caso particular de AFN.

Exemplo AFN

- $M = (\{e_1, e_2\}, \{0, 1\}, \delta, \{e_1\}, \{e_2\})$, em que δ é

δ	0	1
e_1	$\{e_1, e_2\}$	$\{e_1\}$
e_2	$\emptyset$	$\emptyset$

Função de transição estendida

- Seja um AFN $M=(Q, \Sigma, \delta, I, F)$. A função de transição estendida $\hat{\delta}$, é uma função de $\wp(Q) \times \Sigma^*$ para $\wp(Q)$, definida recursivamente como:

$$\hat{\delta}(\phi, w) = \phi \quad \text{para todo } w \in \Sigma^*$$

$$\hat{\delta}(A, \varepsilon) = A \quad \text{para todo } A \subseteq Q$$

$$\hat{\delta}(A, ay) = \hat{\delta}(\cup_{q \in A} \delta(q, a), y) \quad \text{para todo } A \subseteq Q, a \in \Sigma \text{ e } y \in \Sigma^*.$$

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(I, w) \cap F \neq \phi\}$$

Exercícios

- Construa AFNs para as seguintes linguagens:
 1. $\{0,1\}^*\{1010\}$, $\Sigma = \{0,1\}$
 2. $\{0,00\}\{11\}^*$, $\Sigma = \{0,1\}$
 3. $\{a,b,c\}^*\{abc\}\{a,b,c\}^*$, $\Sigma = \{a,b,c\}$
 4. $\{a,b,c\}^* \{abc,bca\}$, $\Sigma = \{a,b,c\}$

AFN $\rightarrow$ AFD

Construção de subconjuntos de estados

Dado um AFN $N = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, o AFD equivalente é

$M(N) = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ onde

- O conjunto de estados de M é o *conjunto potência* de Q : $Q' = P(Q) = \{\text{todos os subconjuntos de } Q\}$
- Cada estado de aceitação de M consiste de um subconjunto que contém um estado de aceitação.
I.e. $F' = \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$
- O estado inicial de M é o conjunto $q_0' = I$

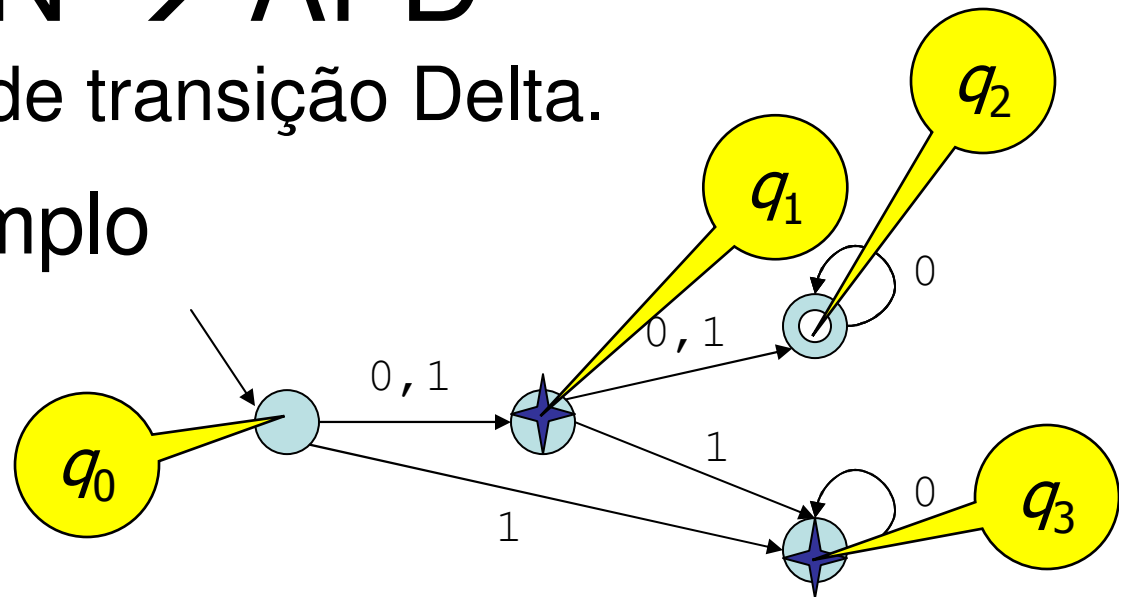
a função δ' é descrita a seguir:

AFN $\rightarrow$ AFD

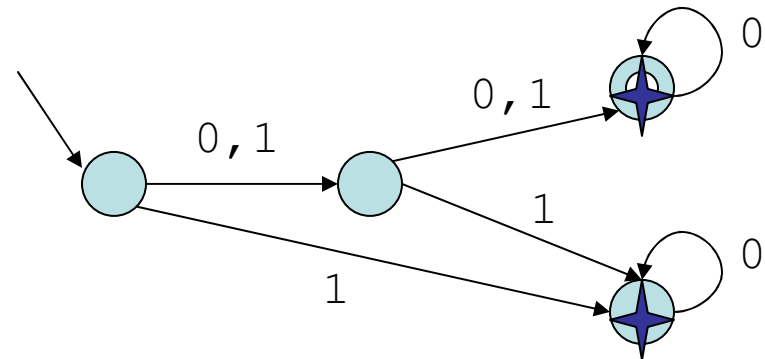
Função de transição Delta.

Considere o exemplo

Antes de ler 1:



Depois de ler 1:



Q: Porque $\delta'(\{q_1, q_2\}, 1) = \{q_2, q_3\}$?

AFN $\rightarrow$ AFD

Função de transição Delta.

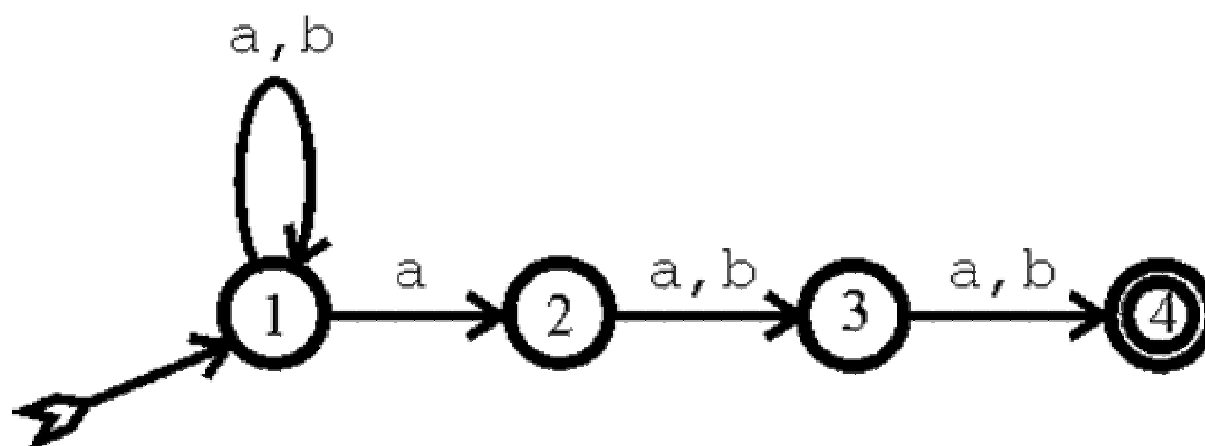
De modo geral temos:

$$\delta'(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a) = \{q' \in Q \mid \exists q \in S, q' \in \delta(q, a)\}$$

Isso completa a definição formal da construção do AFD cujos estados são subconjuntos de estados do AFN original.

AFN $\rightarrow$ AFD: na prática.

Vamos ver como o procedimento de conversão funciona na prática.

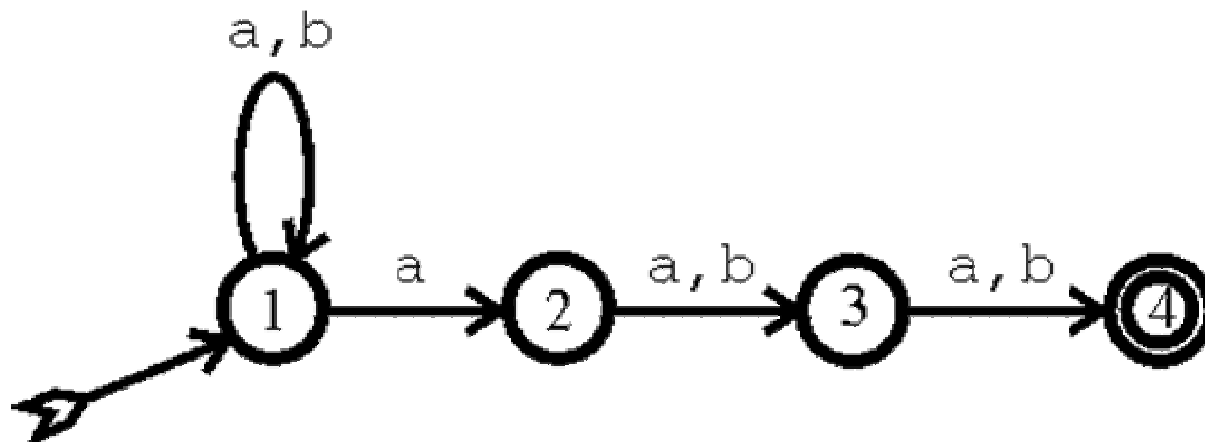


Q1: Qual é a linguagem aceita pelo AFN?

Q2: Quantos estados tem o AFD correspondente nesse caso?

AFN $\rightarrow$ AFD: na prática.

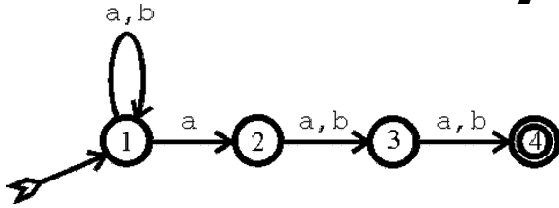
R1: $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid 3^{\text{o.}} \text{ bit de } x \text{ a partir da direita é } a\}$



R2: $16 = 2^4$ estados.

É um número bastante grande! Seria bom se pudermos construir apenas os estados úteis, i.e., aqueles atingíveis a partir do estado inicial.

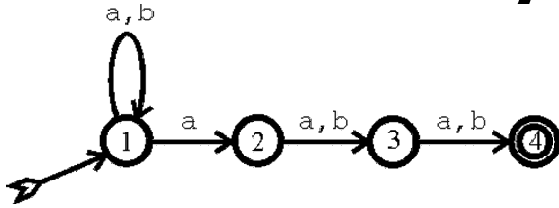
AFN $\rightarrow$ AFD: na prática.



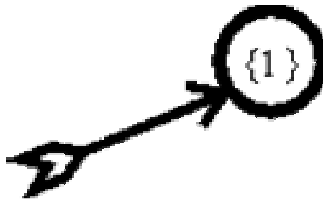
Podemos de fato construir apenas os estados de que precisamos. Começando a partir do estado inicial, fazemos uma pesquisa em largura sobre o grafo!

O primeiro estado será $\{1\}$:

AFN $\rightarrow$ AFD: na prática.

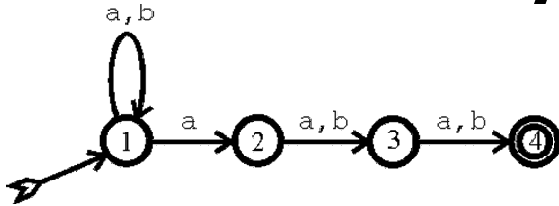


Comece com $\{1\}$:

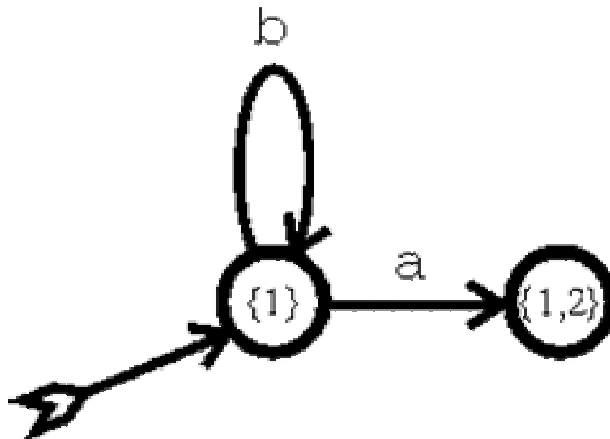


AFN $\rightarrow$ AFD

na prática.

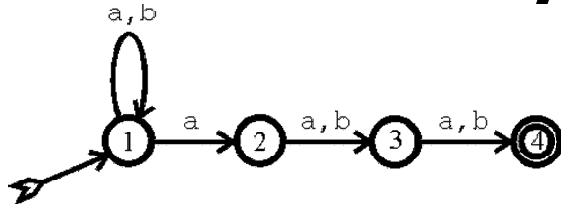


Prossiga: note que $\delta(1, a) = \{1, 2\}$.

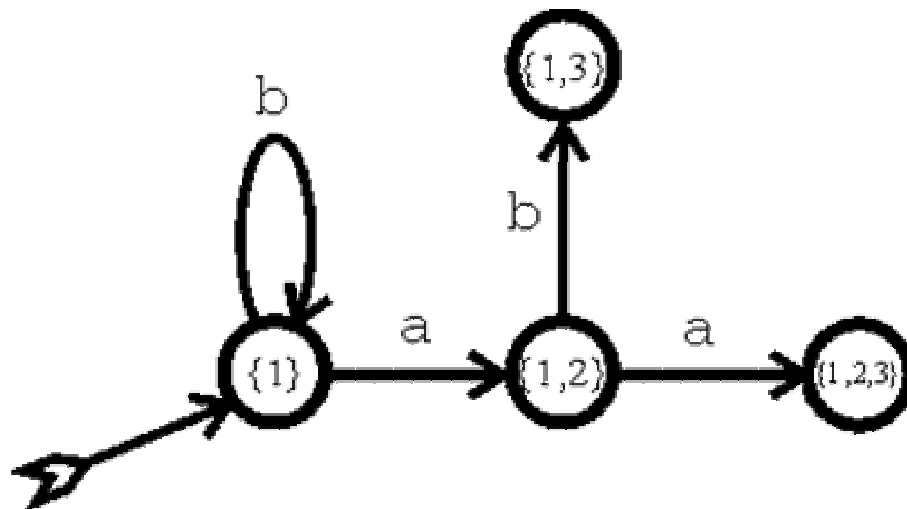


AFN $\rightarrow$ AFD

na prática.

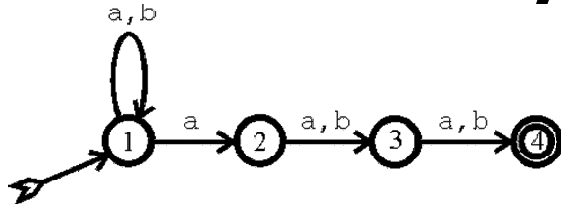


Prossiga: note que $\delta'(\{1,2\},a) = \{1,2,3\}$.

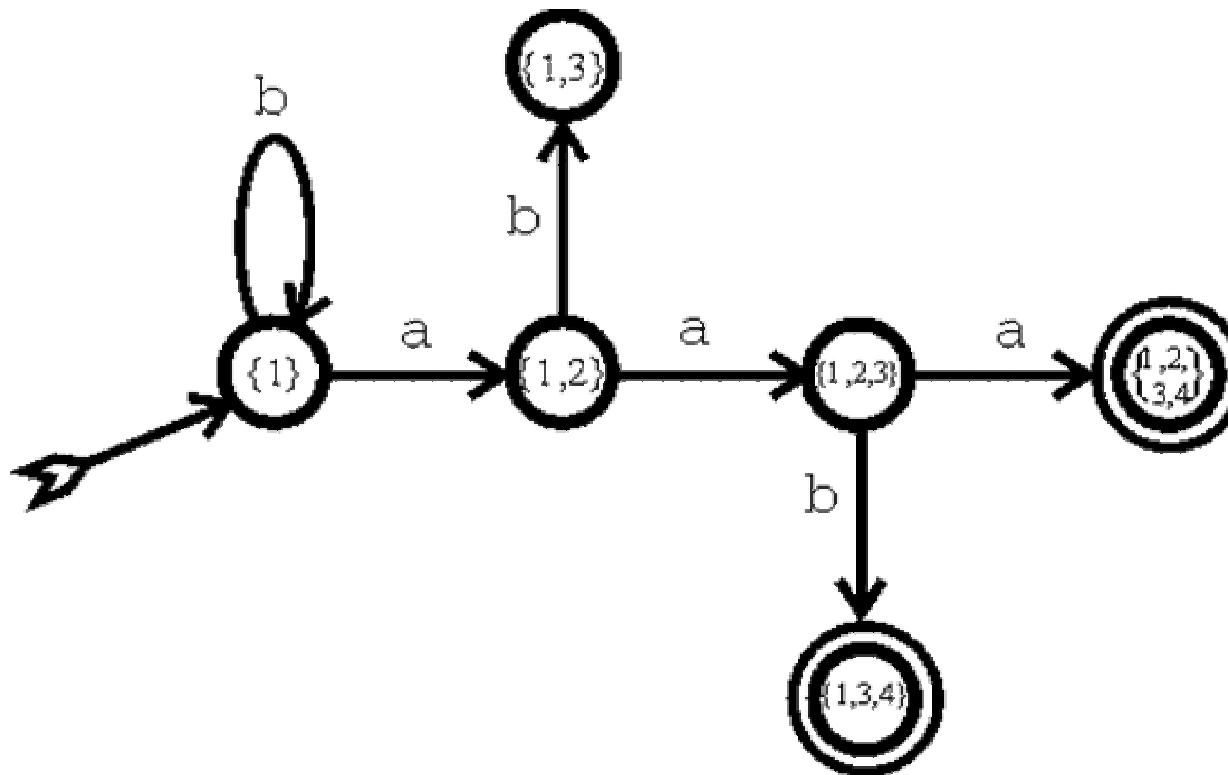


AFN $\rightarrow$ AFD

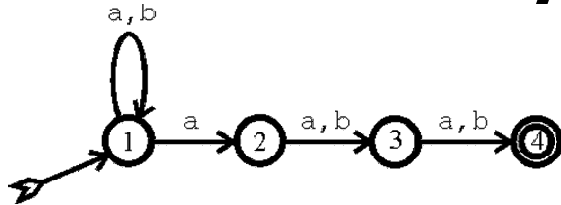
na prática.



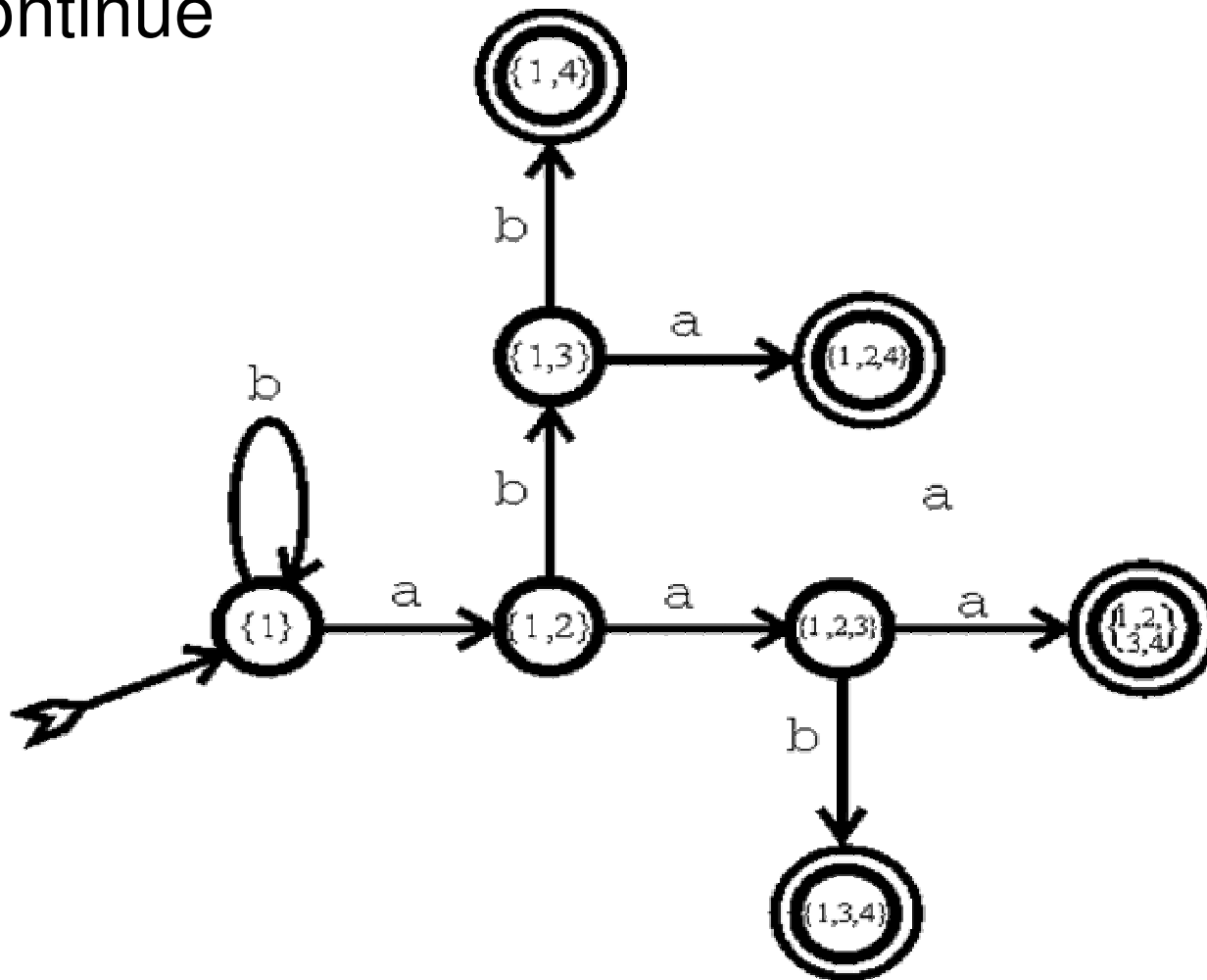
Prossiga: note que $\delta'(\{1,2,3\}, a) = \{1,2,3,4\}$



AFN $\rightarrow$ AFD na prática.

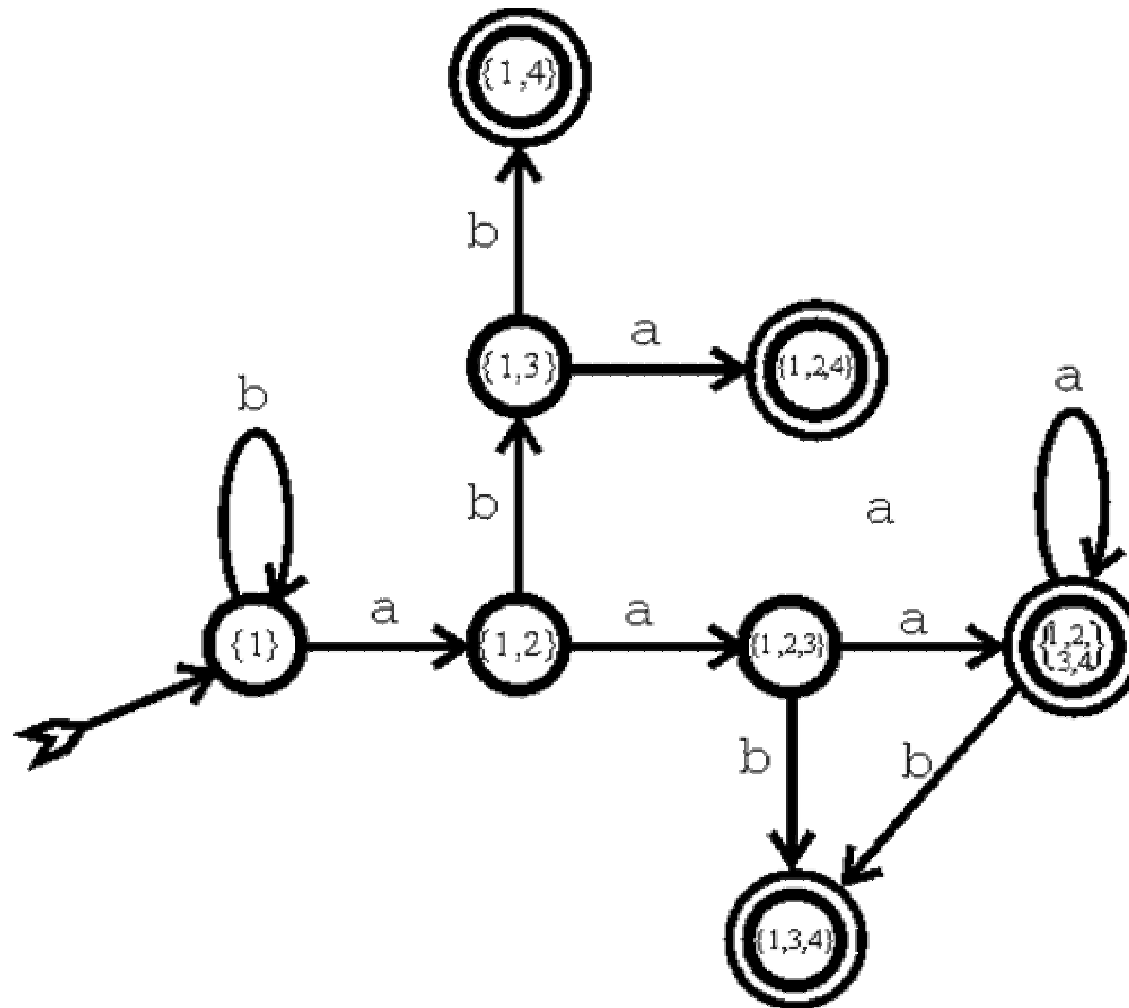
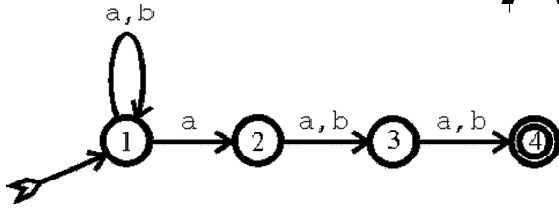


Continue



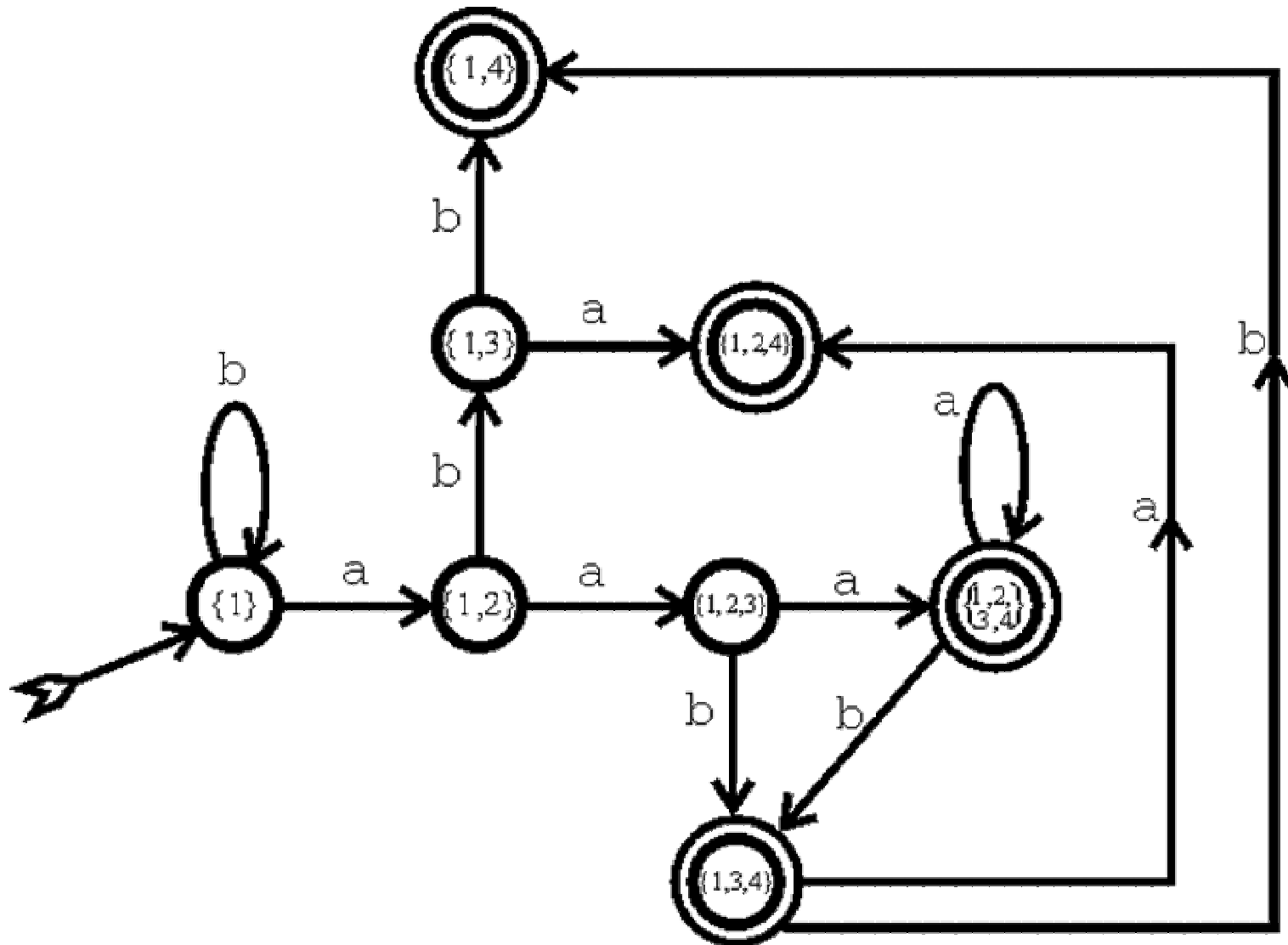
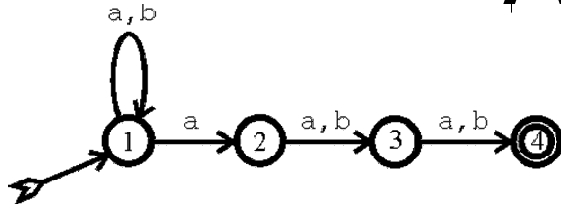
AFN $\rightarrow$ AFD :

na prática.

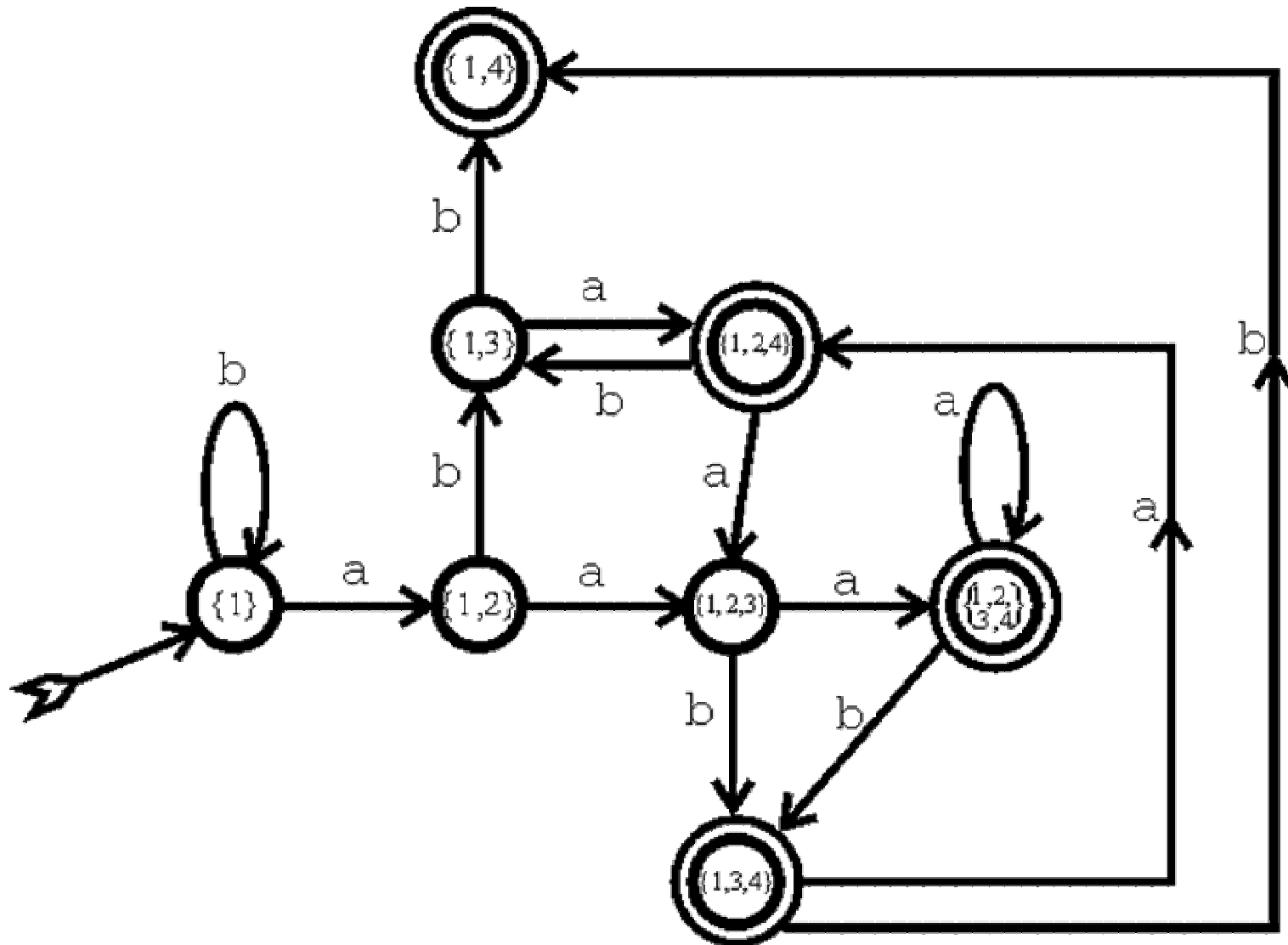
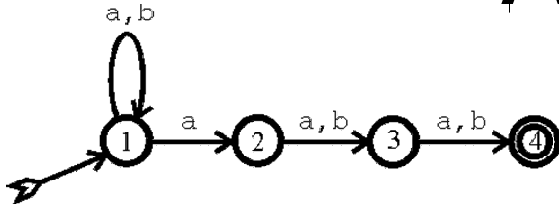


AFN $\rightarrow$ AFD :

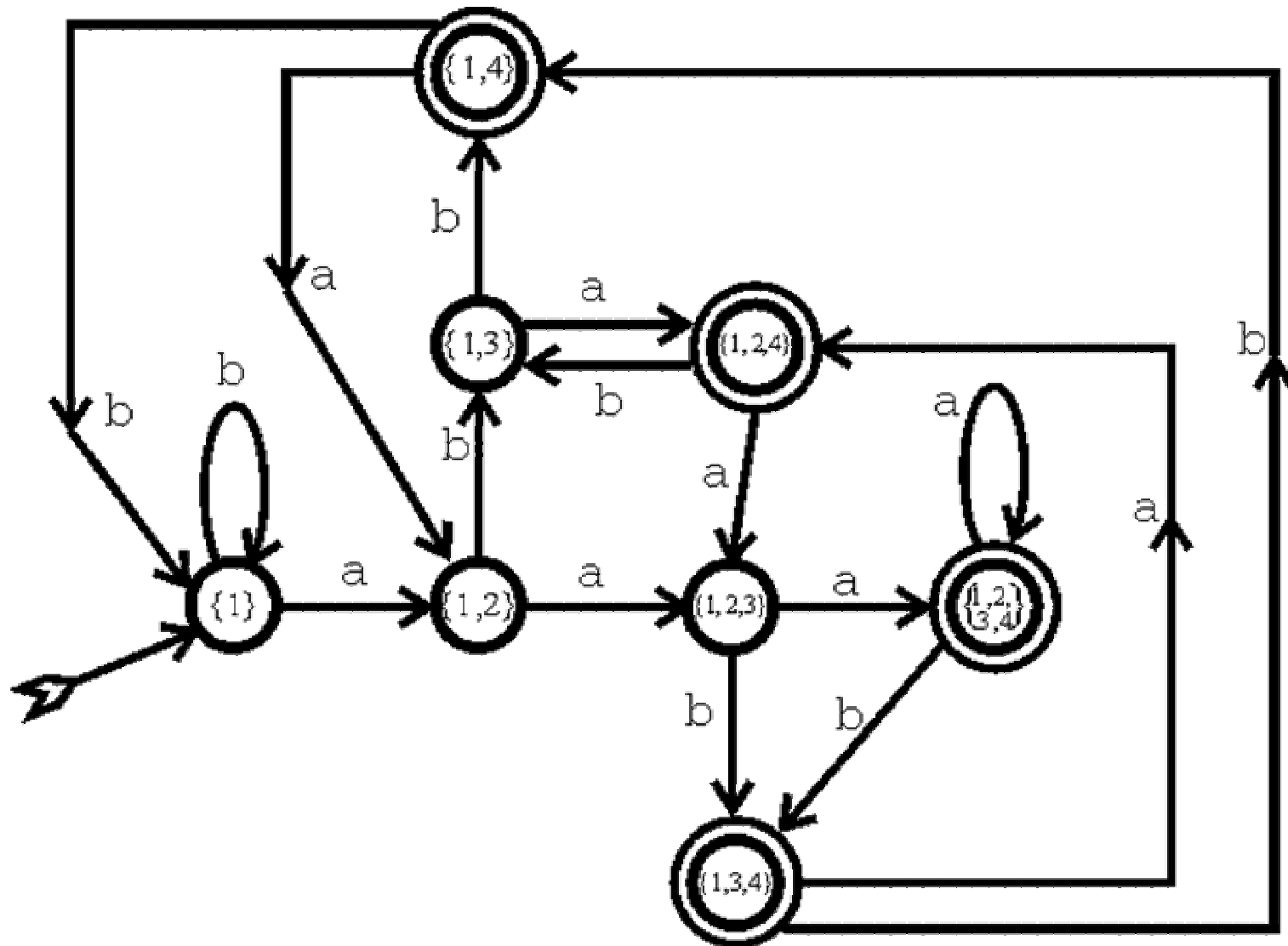
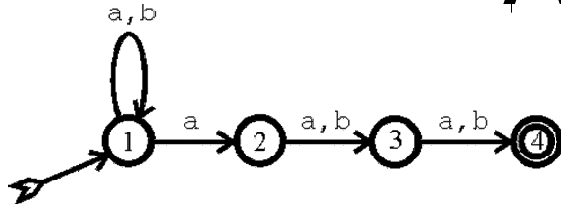
na prática.



AFN $\rightarrow$ AFD : na prática.

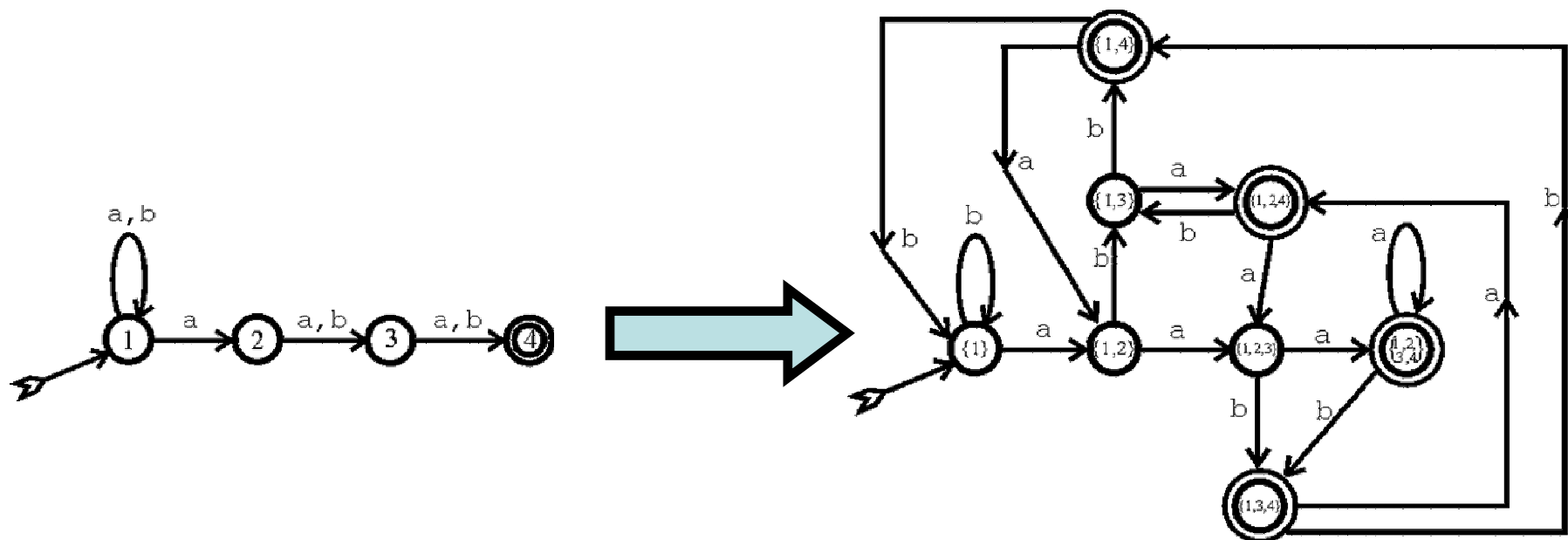


AFN $\rightarrow$ AFD :
na prática.



AFN $\rightarrow$ AFD : na prática.

Resumindo:



Portanto, economizamos 50% do esforço não construindo todos os possíveis estados.

Exercício

- Transforme os AFNs do exercício anterior em AFDs.

AFN Estendido (AFNE)

- Um AFNE é uma quintupla $(Q, \Sigma, \delta, I, F)$, onde:
 - Q, Σ, I e F são como os de um AFN e
 - δ é uma função parcial $Q \times D$ para $P(Q)$, onde D é algum subconjunto finito de Σ^* .
- Exemplo: $M = (\{1, 2, 3\}, \{0, 1\}, \delta, \{1\}, \{2, 3\})$

δ	ϵ	1	00	11
1	$\{2\}$	$\{3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3\}$

AFN com transições ε (AFN- ε)

- Um AFN- ε é uma quintupla $(Q, \Sigma, \delta, I, F)$, onde:
 - Q, Σ, I e F são como os de um AFN e
 - δ é uma função total $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow P(Q)$.
- Exemplo: $M = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{0, 1\}, \delta, \{1\}, \{2, 3\})$

δ	ε	0	1
1	{2}	{3}	$\emptyset$
2	$\emptyset$	{4}	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\emptyset$	{5}
4	$\emptyset$	{2}	$\emptyset$
5	$\emptyset$	$\emptyset$	{3}

Fecho- ε

- Seja um AFN- ε $M=(Q, \Sigma, \delta, I, F)$. A função fecho ε para M , f_ε , é uma função de $P(Q)$ em $P(Q)$, definida recursivamente como:
 - $f_\varepsilon(\emptyset) = \emptyset$
 - $f_\varepsilon(X) = X \cup f_\varepsilon(\bigcup_{e \in X} \delta(e, \varepsilon))$, para $X \neq \emptyset$.
- Exemplo: AFN- ε $M=(\{p0, p1, i0, i1\}, \{0, 1\}, \delta, \{p0\}, \{i1\})$

δ	ε	0	1
p0	{p1}	{i0}	{p0}
p1	$\emptyset$	{p1}	{i1}
i0	$\emptyset$	{p0}	{i0}
i1	$\emptyset$	{i1}	{p1}

AFN- $\epsilon \rightarrow$ AFN

- Para obter um AFN equivalente a um AFN- ϵ , basta eliminar as transições ϵ , utilizando a função fecho- ϵ .
- Seja um AFN- ϵ $M = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$. Uma AFN equivalente a M seria $M' = (Q, \Sigma, \delta', I', F)$, onde:
 - $I' = \text{fecho}_\epsilon(I)$
 - $\delta'(e, a) = \text{fecho}_\epsilon(\delta(e, a))$, para cada $e \in Q$ e $a \in \Sigma$.

Exercício

- Construa AFDs para:
 - $\{uavbxcy \mid u,v,x,y \in \{a,b,c\}^*\}$
 - $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ começa com } a \text{ e tem tamanho par}\}$
 - $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ tem um número ímpar de } b\text{'s}\}$